

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

АРЗАМАССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(филиал НГТУ им. Р.Е. Алексева)

И. Т. Грушин, Л. П. Грушина

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного
технического университета им. Р.Е. Алексева
в качестве учебного пособия (лабораторного практикума)
для студентов всех специальностей и форм обучения*

Нижегород 2012

УДК 531+533.1+536
ББК 22.213; 22.317
Г 913

Рецензент

доктор педагогических наук, профессор *И. В. Фролов*

Грушин И. Т., Грушина Л. П.
Г 913 **Электричество и магнетизм:** учеб. пособие (лабораторный практикум) / И. Т. Грушин, Л. П. Грушина; НГТУ им. Р. Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2012. – 135 с.

ISBN 978-5-502-00062-8

Учебное пособие содержит сведения, необходимые при выполнении лабораторных работ по электромагнетизму. В ряде случаев изложение имеет углубленный характер (соответствующий материал предназначен для самостоятельного изучения). Последние четыре работы пособия выполняются на базе миниатюрной физической лаборатории МФЛЭМ-1.

Предназначается для студентов всех направлений подготовки и форм обучения.

Рис. 65. Табл. 12. Библиогр.: 5 назв.

УДК531+533.1+536
ББК 22.213; 22.317

ISBN 978-5- 502-00062-8

© Нижегородский государственный
технический университет
им. Р.Е. Алексеева, 2012
© Грушин И. Т., Грушина Л. П., 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1.	ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	4
ГЛАВА 2.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКА МОСТИКОМ УИТСТОНА.....	14
ГЛАВА 3.	ИССЛЕДОВАНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ.....	19
ГЛАВА 4.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПАРАМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ.....	25
ГЛАВА 5.	ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ.....	40
ГЛАВА 6.	ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА И ИЗМЕРЕНИЕ ЕГО ДОБРОТНОСТИ.....	51
ГЛАВА 7.	ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГИСТЕРЕЗИСА В ФЕРОМАГНЕТИКАХ.....	64
ГЛАВА 8.	ИЗУЧЕНИЕ ВАКУУМНОГО ДИОДА И ПРОВЕРКА ФОРМУЛЫ БОГУСЛАВСКОГО – ЛЕНГМЮРА.....	107
ГЛАВА 9.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНА ИЗ ВОЛЬФРАМА.....	115
ГЛАВА 10.	ЭФФЕКТ ХОЛЛА.....	126
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	134

ГЛАВА 1

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Лабораторная работа 2–1

Цель работы: исследование электростатического поля, которое моделируется полем стационарного тока.

Приборы и принадлежности:

1. Кювета из плексигласа, наполненная водой.
2. Вольтметр.
3. Набор электродов различной формы.
4. Электрический зонд, соединённый с гальванометром.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Физические поля являются особой формой материи – системами с бесконечно большим числом степеней свободы. Понятие поля (электрического и магнитного) было введено английским учёным Фарадеем (30-е гг. XIX в.). Согласно концепции поля, частицы, участвующие во взаимодействии, создают вокруг себя особое состояние – поле сил, проявляющееся в силовом воздействии на другие частицы, помещаемые в какие-либо точки пространства.

Электрическое поле – частная форма проявления (наряду с магнитным полем) *электромагнитного поля*, определяющая действие на электрический заряд силы, не зависящей от его скорости. Основная количественная характеристика электрического поля – *напряжённость электрического поля* \vec{E} , которая в данной точке пространства равна отношению силы \vec{F} , действующей на пробный заряд q , помещённый в эту точку, к величине этого заряда q :

$$\vec{E} = \vec{F}/q.$$

Напряжённость электрического поля неподвижного точечного заряда определяется законом Кулона. Напряжённость электрического поля системы неподвижных зарядов может быть найдена с помощью принципа суперпозиции. Для любого постоянного (электростатического) поля справедлива теорема Гаусса:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q/\epsilon_0. \quad (1.1)$$

В левой части (1.1) стоит поток векторного поля \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность S ; Q – электрический заряд внутри этой поверхности. Кроме того, циркуляция электростатического поля \vec{E} по любому замкнутому контуру L равна нулю:

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.2)$$

Соотношения (1.1) и (1.2), как правило, удобнее использовать в дифференциальной форме. Если к интегралам из (1.1) и (1.2) применить соответственно математические теоремы Гаусса – Остроградского и Стокса, то легко получить уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.4)$$

В уравнении (1.4) \vec{D} – вектор электрической индукции, а ρ – объемная плотность свободного электрического заряда (т.е. избыточного заряда, внесённого извне в систему в целом нейтральных макроскопических тел). В типичном случае электростатическое поле создаётся заряженными проводниками, разделёнными диэлектриком. Напомним, что при этом внутри проводников $\vec{E} \equiv 0$. Для линейных изотропных диэлектриков

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (1.5)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость. Далее будем рассматривать исключительно однородные диэлектрические среды, внутри которых $\rho = 0$. Константу ε можно тогда вынести из-под знака div и затем просто опустить. В итоге вместо (1.3) и (1.4) получим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.6)$$

Второе из уравнений (1.6) обращается в тождество, если положить

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.7)$$

где φ – скалярная функция координат (формальное доказательство этого факта легко получается при помощи оператора «набла»:

$\operatorname{rot} \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \operatorname{grad} \varphi \equiv -\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ – как векторное произведение «коллинеарных» векторов). Физический смысл φ нетрудно установить, замечая, что электрическая сила, действующая на заряд q , помещённый в некоторую точку поля, равна:

$$\vec{F} = q \vec{E} = -q \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{grad}(q\varphi).$$

Таким образом, $q\varphi$ является механической потенциальной энергией заряда q в электростатическом поле, а функция φ численно равна потенциальной энергии положительного единичного заряда. Функция $\varphi(\vec{r})$ называется **потенциалом электростатического поля**. Из формулы (1.7) видно, что потенциал определён с точностью до аддитивной постоянной. Обычно значение этой постоянной стремятся выбрать таким способом, чтобы на бесконечности

потенциал обращался в нуль. При этом потенциал некоторой точки поля будет численно равен квазистатической работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить положительный единичный заряд из бесконечности в данную точку.

Подставляя (1.7) в первое уравнение (1.6), получим

$$-\operatorname{divgrad}\varphi = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla\varphi) = 0, \quad \nabla^2\varphi = 0.$$

Иначе, обозначая $\nabla^2 = \Delta$, запишем:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1.8)$$

Оператор Δ называется оператором *Лапласа (лапласианом)*, а уравнение (1.8) – *уравнением Лапласа**. Уравнение Лапласа в форме (1.8) не зависит от выбора координат. В частном случае декартовых прямоугольных координат

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В результате уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.9)$$

Решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*. Чаще всего известны потенциалы проводников, создающих поле, а в пространстве между проводниками потенциал удовлетворяет уравнению (1.8). Обычно решение уравнения Лапласа в подобных случаях существует и единственно. Единственность решения имеет важное значение для данной лабораторной работы.

Распределение электростатического поля в пространстве можно изображать с помощью *эквипотенциальных поверхностей*. Однопараметрическое семейство эквипотенциальных поверхностей задается уравнением

$$\varphi(\vec{r}) = \text{const}. \quad (1.10)$$

Константа в правой части (1.10) пробегает все значения потенциала данного поля. Можно договориться проводить поверхности (1.10), например, через 1В, 2В и т.д. Почти очевидно, что, чем меньше расстояние между эквипотенциальными поверхностями, тем сильнее поле (больше градиенты). Иная возможность изображения распределения электростатического поля – использование *векторных линий* этого поля. Векторная линия поля $\vec{A}(\vec{r})$ – линия, в каждой точке которой касательная имеет направление вектора \vec{A} в этой точке. Векторные линии электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ называют *силовыми линиями*. В курсе математического анализа вводится производная функции $\varphi(\vec{r})$ по направлению. Она характеризует скорость изменения функции в данной точке по

* Пьер Симон Лаплас (1749–1827) – выдающийся французский астроном, математик и физик; известен трудами по небесной механике, теории вероятностей и математической физике).

данному направлению. Если задать направление единичным вектором \vec{l} и обозначить производную по направлению $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$, то для дифференцируемой функции φ будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \vec{l} \cdot \text{grad}\varphi = |\text{grad}\varphi| \cos \alpha, \quad (1.11)$$

где α – угол между векторами \vec{l} и $\text{grad}\varphi$.

Из формулы (1.11) вытекают важные следствия. Во-первых, $\text{grad}\varphi$ указывает направление быстрого возрастания функции в данной точке (экстремальное свойство градиента). Отсюда и из (1.7) выводим, что *силовая линия в каждой точке направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциала* (по антиградиенту φ). Во-вторых, семейства эквипотенциальных поверхностей и силовых линий *взаимно перпендикулярны*. В самом деле, $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0$ когда $\vec{l} \perp \nabla\varphi$. Но вдоль эквипотенциальной поверхности по определению изменение потенциала должно быть равно нулю, что и доказывает сделанное утверждение.

В настоящей работе изучается *плоское* электростатическое поле (точнее, приближенно плоское). Поле называется плоским в случае, когда $\varphi = \varphi(x, y)$. Здесь $E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = 0$. Таким образом, имеются только компоненты E_x и E_y , а силовые линии лежат в плоскостях, параллельных координатной плоскости Oxy . Фактически при выполнении работы получают линии пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью Oxy . Сами эквипотенциальные поверхности являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси Oz , направляющими которых служат экспериментальные кривые. Так как внутри проводников $\vec{E} \equiv 0$, все точки проводника имеют одинаковый потенциал, а поверхности проводников эквипотенциальны. В работе предусматривается построение силовых линий. Это надо делать следующим образом: задавшись некоторым числом линий (чтобы обеспечить их разумную густоту), следует вести их, начиная с проводников, перпендикулярно всем экспериментальным эквипотенциальным кривым и оканчивать на проводниках.

Как уже отмечалось, в электростатике поле внутри (однородных) проводников отсутствует. Постоянное электрическое поле существует, однако, в проводниках в случае протекания по ним *стационарного тока*. Основной характеристикой тока является *плотность тока* $\vec{j}(\vec{r})$. Величина электрического тока (в амперах) через любую поверхность равна потоку вектора \vec{j} через эту поверхность. Если ток стационарный (постоянный),

$$\text{div}\vec{j} = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) соответствует требованию, чтобы ток через любую замкнутую поверхность равнялся нулю – при этом нигде в цепи не происходит накопления

зарядов, что отвечает стационарности процесса. Как показывает опыт, для многих сред в широком диапазоне внешних условий

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.13)$$

где σ – постоянная для данного материала величина – удельная проводимость или электропроводность. Она зависит от физического состояния тела (температуры и т.п.).

В приложениях обычно пользуются обратной величиной $\rho = 1/\sigma$, называемой *удельным сопротивлением*, которое измеряется в Ом·м и приводится в таблицах. Соотношение (1.13) называется (*локальным*) *законом Ома*. Отметим, что «обычные» законы Ома для тонких проводников (проволок) вытекают из (1.13). Следует отметить, что, например, в местах контакта между полупроводниками или полупроводником и металлом закон Ома (10) не выполняется, связь между током и напряжением на этих участках *нелинейна*. Современная радиотехника и электроника были бы невозможны без таких «нелинейностей».

Вернемся к уравнениям (1.12) и (1.13). Если проводник с током является однородным, σ не зависит от координат. В результате

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = \sigma \operatorname{div} \vec{E}.$$

Таким образом, мы вновь приходим к уравнениям (1.16) (второе из них справедливо из-за стационарности процесса). Далее, электрическое поле опять потенциально (см. (1.7)), причем потенциал является решением уравнения Лапласа (1.8).

Допустим, что электрическая цепь состоит из разных проводников. Тогда внутри каждого из них потенциал ϕ представляет собой гармоническую функцию. На границах проводников ϕ должен удовлетворять определенным условиям, которые не следует выписывать, поскольку рассматривать проблема в общем виде не рассматривается. Нас интересует случай, когда проводимости проводников сильно различаются. При этом можно считать, что поле внутри хороших проводников практически равно нулю. Поясним изложенное примером. Пусть электрическая цепь составлена из двух проволок, имеющих одинаковые длины и поперечные сечения; удельное же сопротивление одного проводника (плохого) гораздо больше удельного сопротивления другого. Если такую цепь присоединить к источнику постоянной ЭДС, ток будет определяться, по существу, сопротивлением плохого проводника, а падение потенциала на хорошем проводнике окажется практически равным нулю.

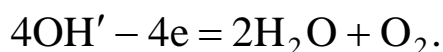
Предположим, наконец, что объемные токи текут в плохо проводящей среде, в которую помещены металлические проводники. Если поддерживать их потенциалы постоянными, то, в силу упоминавшейся ранее теоремы единственности, поле в пространстве между металлами будет таким же, как в случае замены плохого проводника диэлектриком.

Цель данной работы – исследование электростатического поля в диэлектрике (в том числе и в пустоте), которое моделируется полем стационарного тока.

Каково практическое значение такого моделирования?

Во-первых, получение аналитического решения уравнения Лапласа при реальных краевых условиях вряд ли возможно; достаточно сложную проблему представляет собой и компьютерный расчет. *Во-вторых*, измерение потенциалов в точках поля производится обычно с помощью *электрического зонда*. Зонд – это небольшое металлическое тело, соединенное проволокой с измерительной системой. Оказывается, что если имеется поле в диэлектрике, то практически зонд не может принять потенциал точки, в которую он помещен. Эта проблема не возникает в проводящей жидкости [3]. В качестве таких жидкостей можно брать растворы электролитов или просто водопроводную воду.

При прохождении тока через электролиты на электродах выделяются составные части растворенного вещества. Это портит установку, в связи с чем обычно рекомендуют работать со слабопеременным напряжением. При использовании обычной воды положительные ионы водорода перемещаются к катоду и разряжаются; в результате у катода выделяется газообразный водород H_2 . К аноду движутся отрицательные гидроксильные ионы. При их разряде образуются молекулы воды и кислорода:



Получающиеся при электролизе газы в конце концов улетучиваются, и остается лишь периодически подливать воду. Таким образом, если ванна заполняется водой, можно подавать на электроды и постоянное напряжение.

К экспериментальному исследованию электрических полей приходится прибегать при конструировании электронных, ионных и многих других приборов (многоэлектродные лампы; фокусирующие электростатические линзы; фотоэлектронные умножители и т.п.). Измерения внутри самих приборов не всегда можно выполнить по техническим причинам. Поэтому изготавливают увеличенные подобные и подобно расположенные модели электродов, помещаемые в электролит. Потенциалы проводников модели должны быть пропорциональны потенциалам соответствующих электродов прибора. При этом структура поля останется прежней (данное утверждение справедливо в силу того, что если $\varphi(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то и любая функция вида $A\varphi(\vec{r}/a)$, где A и a безразмерные постоянные, также является его решением – проверьте это!).

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

В ванну В, сделанную из плексигласа, помещают те металлические электроды, поле между которыми хотят изучить (рис. 1.1). Электроды А и Б опираются на дно ванны. Ванна заполняется водой. На приведенном рисунке контуры ванны показаны пунктирными линиями.

В схеме подачи напряжения на электроды А и Б имеется понижающий трансформатор и полупроводниковый выпрямитель Д. В измерительную часть

схемы, кроме зонда З, входят также гальванометр нулевого отсчета Г, вольтметр V и потенциометр П.

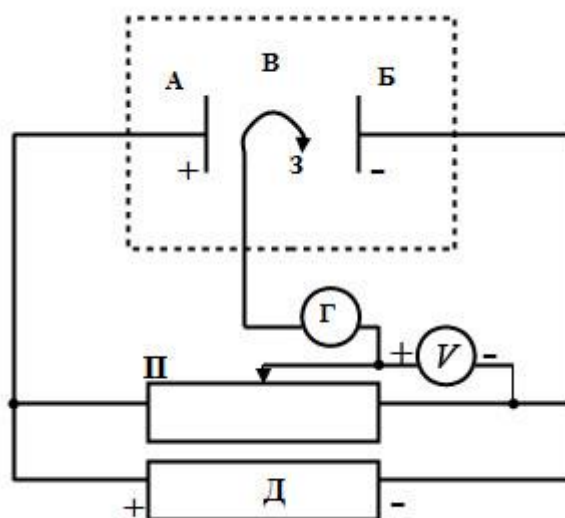


Рис. 1.1

Принцип работы схемы заключается в следующем. Перемещая движок потенциометра П, можно придавать ему различные значения потенциала относительно электродов, погруженных в ванну (в пределах полной разности потенциалов, приложенной к электродам и к делителю). Наличие или отсутствие тока в цепи гальванометра зависит при этих условиях от того, в какой точке поля находится зонд. Если он находится в такой точке поля, потенциал которой равен потенциалу, установленному на движке делителя, тока в цепи зонда не будет. **Геометрическое место точек поля, для которых в цепи зонда ток равен нулю (при данном положении движка на делителе), образует эквипотенциальную линию в исследуемом поле.**

Для измерения потенциала этой линии (относительно электродов, помещенных в ванну) служит вольтметр V, включенный между движком и одним из электродов.

Процесс изучения исследуемого поля сводится, таким образом, к следующему: перемещая по этапам движок на делителе напряжения, придают движку различные значения потенциала.

Для каждого установленного значения потенциала путем перемещения зонда в ванне находят соответствующую эквипотенциальную линию, которую и зарисовывают на миллиметровой бумаге.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Отыскание зондом эквипотенциальных поверхностей не должно проводиться бессистемно. Для каждого набора установленных в ванне электродов следует руководствоваться разумными соображениями о возможной в общих чертах конфигурации поля. В частности, следует проводить при этом предварительное рассмотрение свойств системы электродов. Но для полного

анализа структуры поля уже нужны опыты с зондом. Наконец, в ходе опытов необходимо обеспечить безопасные для гальванометра условия работы. Именно, устанавливая то или иное положение движка на делителе напряжения, следует перемещать зонд в соответствующем направлении. При необдуманном действии между зондом и движком реостата легко создать разность потенциалов, равную полной разности потенциалов между электродами, а это может привести к сгоранию обмотки рамки гальванометра. При выполнении работы необходимо соблюдать осторожность.

ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КРИВЫХ

Основные этапы построения:

1. Установить плоские электроды параллельно на расстоянии 10–15 см. Напряжение между ними должно равняться 10 В.
2. Найти зондом точки, имеющие потенциал 2 В, и сделать карандашом отметки на бумаге. Соединив найденные точки, получить эквипотенциальную кривую.
3. Аналогично построить другие кривые (через 1 В и до 8 В).
4. Между плоскими электродами поместить массивное металлическое кольцо. Построить эквипотенциальные кривые для 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 В.
5. Вынуть плоские электроды и кольцо. Вместо них в ванну поместить два металлических кольца, одно внутри другого (рис. 1.2). Подать напряжение между кольцами 10 В. Принимая потенциал на внутреннем кольце равным нулю, построить эквипотенциальную кривую, соответствующую 5 В. Определить потенциалы для точек A и B (рис. 1.2), которые находятся между внутренним кольцом и эквипотенциальной поверхностью ($\varphi = 5 В$) ($\cdot A$) и внешним кольцом и эквипотенциальной поверхностью ($\varphi = 5 В$) ($\cdot B$). Для тех же точек A и B определить потенциалы теоретически.
6. По полученным системам эквипотенциальных поверхностей построить для всех изученных полей картины силовых линий.

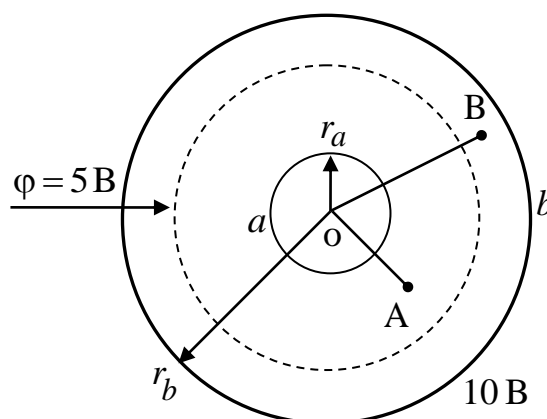


Рис. 1.2

К определению электрического поля между двумя кольцами

Напряженность электрического поля цилиндрического конденсатора может быть записана по формуле напряженности электрического поля бесконечного равномерно заряженного цилиндра:

$$E = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r}, \quad (1.14)$$

где τ – заряд, приходящийся на единицу длины внутреннего цилиндра (электростатическая теорема Гаусса). Так как

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}, \text{ то } \int_{(a)}^{(A)} d\varphi = \int_{r_a}^{r_A} \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r} dr.$$

После интегрирования получаем следующее выражение:

$$\varphi_A - \varphi_a = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \ln \frac{r_A}{r_a}. \quad (1.15)$$

В формуле (1.15) r_a – радиус малого цилиндра, r_A – координата точки A . Следуя (1.15), можно также записать, что

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}, \quad (1.16)$$

где r_b – радиус большого цилиндра. Делим (1.15) на (1.16):

$$\frac{\varphi_A - \varphi_a}{\varphi_b - \varphi_a} = \frac{\ln(r_A/r_a)}{\ln(r_b/r_a)}.$$

Принимая потенциал малого цилиндра за 0, а большого – $\varphi_b = 10\text{В}$, получаем:

$$\varphi_A = \varphi_b \frac{\ln(r_A/r_a)}{\ln(r_b/r_a)}. \quad (1.17)$$

Аналогичным образом можно определить и потенциал точки B :

$$\varphi_B = \varphi_b \frac{\ln(r_B/r_a)}{\ln(r_b/r_a)}. \quad (1.18)$$

С помощью выражений (1.17) и (1.18) производится сравнение теории с экспериментом.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие поля. Что является источником электрического поля. Закон Кулона.
2. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции полей. Графическое изображение полей. Что такое силовая линия? Примеры

- графического изображения полей. Какое поле называется *однородным*? Как изображаются однородные поля?
3. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса для поля в вакууме и ее применение для расчета напряженности полей: точечного заряда и сферы, цилиндра и нити, плоскости и плоского конденсатора.
 4. Циркуляция вектора напряженности электрического поля. Дифференциальные характеристики электрического поля. Их физический смысл.
 5. Потенциал, разность потенциалов двух точек поля. Связь потенциала с напряженностью электрического поля в общем виде и, в частности, в однородном поле. Потенциал поля точечного заряда и равномерно заряженной сферы. Потенциал поля системы точечных зарядов.
 6. Эквипотенциальные поверхности и силовые линии. Изобразите в общем виде взаимное расположение эквипотенциальных поверхностей, вектора напряженности поля \vec{E} и вектора $\text{grad } \varphi$ в некоторой точке поля.
 7. В чем заключается зондовый метод измерения потенциала поля?
 8. Объясните расположение силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для полей, исследованных в данной работе.
 9. Проводники в электрическом поле.
 10. Поля стационарных токов. Моделирование полей в диэлектриках.
 11. Вывести формулу (1.14), взяв в качестве вспомогательной поверхности пунктирный цилиндр (рис. 1.2).
 12. Порядок выполнения работы.

ГЛАВА 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКА МОСТИКОМ УИТСТОНА

Лабораторная работа 2–2

Цель работы: научиться пользоваться простейшим измерительным мостом.

Приборы и принадлежности:

1. Реохорд и панели.
2. Магазин сопротивлений.
3. Нуль - гальванометр.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Мостик Уитстона представляет собой схему, состоящую из четырех сопротивлений – “четырёхугольник сопротивлений”. В одну диагональ этого четырёхугольника включаются источник тока и ключ, в другую – проводник с гальванометром, который, собственно, и является мостиком, перекинутым между двумя параллельно соединенными ветвями АСВ и АДВ (рис. 2.1).

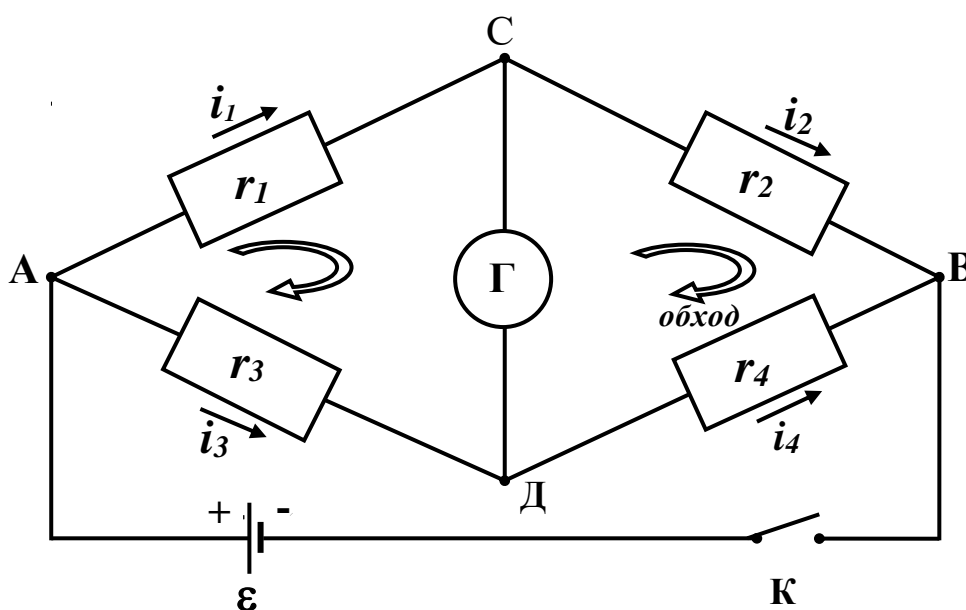


Рис. 2.1

При замкнутом ключе К и при произвольных значениях сопротивлений r_1 , r_2 , r_3 , r_4 через гальванометр Γ идет ток того или иного направления. Но можно

подобрать такие сопротивления, когда тока в гальванометре не будет. Это произойдет в случае равенства потенциалов точек С и Д. Найдем зависимость между сопротивлениями при нулевом токе на участке СД.

На основании первого закона Кирхгофа для точек С и Д могут быть записаны уравнения:

- для точки С: $i_1 - i_2 = 0; \quad i_1 = i_2;$ (2.1)

- для точки Д: $i_3 - i_4 = 0; \quad i_3 = i_4.$ (2.2)

На основании второго закона Кирхгофа имеем

- для контура АСДА: $i_1 r_1 - i_3 r_3 = 0; \quad i_1 r_1 = i_3 r_3;$

- для контура СВДС: $i_2 r_2 - i_4 r_4 = 0; \quad i_2 r_2 = i_4 r_4.$ (2.3)

Разделив равенства (2.3) одно на другое и учитывая (2.1) и (2.2), получим:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}. \quad (2.4)$$

Это уравнение и устанавливает связь между сопротивлениями, составляющими “плечи” мостика Уитстона, при отсутствии тока в гальванометре.

Зная три сопротивления, входящие в уравнение (2.4), можно определить четвертое. Для удобства ветвь АДВ делается из однородной проволоки (струны), имеющей всюду одинаковое поперечное сечение. Струна натягивается на миллиметровую шкалу (такую струну называют **реохордом**). Вдоль струны скользит движок Д (рис. 2.2), соединённый с гальванометром; движок делит струну на два участка, сопротивления которых соответствуют сопротивлениям r_3 и r_4 . При перемещении движка одно сопротивление уменьшается, а другое увеличивается. Очень легко найти такое положение движка, при котором тока в цепи гальванометра не будет, а потенциалы точек С и Д сравниваются.

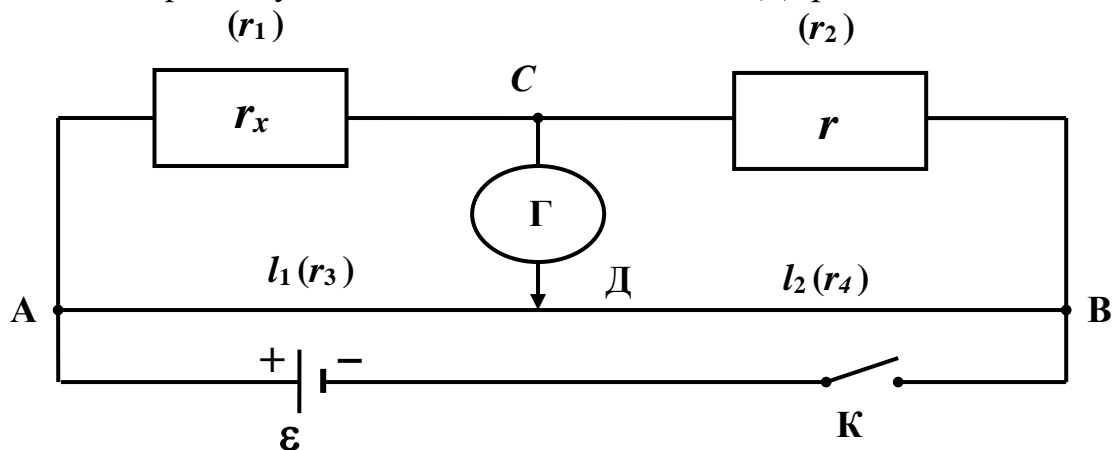


Рис. 2.2

Преобразуем уравнение (2.4), учитывая, что r_3 и r_4 являются сопротивлениями двух участков струны. Обозначим длину струны от А до Д через l_1 , а от Д до В через l_2 тогда

$$r_3 = \rho \frac{l_1}{S}; \quad r_4 = \rho \frac{l_2}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала струны;

S – поперечное сечение струны.

Разделив последние равенства одно на другое, получим

$$r_3/r_4 = l_1/l_2.$$

Это даёт нам право переписать соотношение (2.4) в следующем виде:

$$r_1/r_2 = l_1/l_2. \quad (2.5)$$

Определим сопротивление r_x , введенное в плечо АС; известное сопротивление r представляет собой магазин сопротивлений. Гальванометр, используемый в установке, должен быть большой чувствительности и иметь нуль на середине шкалы. При одном направлении тока стрелка будет отклоняться вправо от нуля, при другом – влево.

Уравнение (2.5) применительно к обозначениям схемы рис. 2.2 запишется так:

$$\frac{r_x}{r} = \frac{l_1}{l_2}; \quad \text{отсюда} \quad r_x = r \frac{l_1}{l_2}. \quad (2.6)$$

Добиться отсутствия тока в гальванометре можно при любом произвольно взятом значении l_1 . Однако, если подобрать сопротивления так, чтобы при нулевом токе через гальванометр движок Д находился приблизительно посередине струны, измерение будет иметь наибольшую точность. Чтобы обосновать это, преобразуем уравнение (2.6). Обозначим длину всей струны через L , а длину участка АД через l ; тогда (2.6) примет вид:

$$r_x = r \frac{l}{L-l}.$$

Найдём относительную погрешность r_x . Для этого вычислим дифференциал $d \ln r_x \equiv \Delta \ln r_x$:

$$\frac{\Delta r_x}{r_x} = \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta(L-l)}{L-l}, \quad (2.7)$$

где Δl – погрешность при отсчёте положения движка;

ΔL – погрешность, с которой дана длина всей линейки;

Δr – погрешность значения известного сопротивления (приборная погрешность магазина сопротивлений).

Величины L , Δl , Δr не зависят от положения движка, они в данных условиях остаются постоянными. При перемещении движка, т. е. с изменением l , как видно из уравнения (2.7), будет меняться и значение $\Delta r_x / r_x$. Найдём минимум $\Delta r_x / r_x$, пренебрегая малыми в условиях опыта Δr и ΔL . Учитывая, что $\Delta(l-L) = \Delta l - \Delta L$, пишем:

$$\frac{\Delta r_x}{r_x} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l}{L-l}; \quad \frac{\Delta r_x}{r_x} = \frac{L \Delta l}{l(L-l)}. \quad (2.8)$$

Переменная величина l входит лишь в знаменатель (2.8), следовательно, минимум $\Delta r_x / r_x$ будет достигаться при максимуме произведения $l(L-l)$. Максимум последнего выражения может находиться только в стационарной точке, поэтому вычисляем производную

$$\frac{d}{dl}[l(L-l)] = L - 2l.$$

Приравнявая её к нулю, находим: $l = L/2$, т. е. наивыгоднейшим положением движка является середина струны. Таким образом, $(\Delta r_x / r_x)_{\min} = 4 \Delta l / L$.

Необходимо отметить, что для измерения очень малых сопротивлений мостик Уитстона не пригоден по двум причинам: *во-первых*, потому, что при малых r_x мостик недостаточно чувствителен; *во-вторых*, потому, что сопротивление соединительных проводов при малых измеряемых сопротивлениях оказывается заметной величиной. Для измерения малых сопротивлений применяются мосты более сложных систем.

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ОПЫТА

Целью настоящей работы является определение сопротивления двух проводников, сначала каждого в отдельности, а затем соединенных последовательно и параллельно.

1. Ознакомившись с приборами и составив таблицу измерений, собирают схему, включая одно испытуемое сопротивление между А и С. Ключ К должен быть разомкнут.
2. Ставят движок Д на середину струны. Включают магазин сопротивлений на 90–100 Ом. Замкнув ключ К, наблюдают отклонение стрелки гальванометра, замечая при этом направление, в котором происходит отклонение. Изменяя сопротивление магазина, снова замечают направление отклонения стрелки гальванометра. Если в первом случае отклонение было в одну сторону, а во втором – в другую, то сближают пределы сопротивлений, добиваясь исчезновения тока. Во избежание перегрева проводников ключ К замыкают только на короткое время. Добившись отсутствия тока в гальванометре, записывают показание магазина сопротивлений r и длины l_1 и l_2 .
3. Передвигают движок Д влево от середины и снова добиваются отсутствия тока в гальванометре. Соответствующие значения r , l_1 и l_2 заносят в таблицу.
4. Затем движок Д передвигают вправо от середины и проводят аналогичные измерения; результаты записывают в таблицу. Исследуемое сопротивление $r_x^{(1)}$ определяют по формуле (26) трижды. Далее вычисляют среднее арифметическое трех значений $r_x^{(1)} - r_{cp}^{(1)}$. Обработка по методике Стюдента не производится, поскольку при аккуратном проведении описанных опытов случайных ошибок возникнуть не может.

5. Заменяв в схеме первое неизвестное сопротивление вторым, проделывают все измерения в том же порядке.
6. Соединяют последовательно испытуемые сопротивления и повторяют все измерения как для отдельного проводника.
7. Сопротивления соединяют параллельно и повторяют все измерения как для отдельного проводника.
8. По измеренным сопротивлениям отдельных проводников вычисляют общее сопротивление при параллельном и последовательном соединениях, пользуясь формулами:

$$r^{(\text{посл})} = r_{\text{ср}}^{(1)} + r_{\text{ср}}^{(2)}; \quad r^{(\text{пар})} = \frac{r_{\text{ср}}^{(1)} r_{\text{ср}}^{(2)}}{r_{\text{ср}}^{(1)} + r_{\text{ср}}^{(2)}}. \quad (2.9)$$

9. Результаты этих вычислений сравнивают с опытными значениями $r_{\text{ср}}^{(\text{посл})}$ и $r_{\text{ср}}^{(\text{пар})}$ (табл. 2.1).

Таблица 2.1

№ п/п	Номер проводника	r	l_1	l_2	r_x	$r_{x \text{ ср}}$	
1	1						$r_{\text{ср}}^{(1)}$
2							
3							
1	2						$r_{\text{ср}}^{(2)}$
2							
3							
1	1 и 2 последовательно						$r_{\text{ср}}^{(\text{посл})}$
2							
3							
1	1 и 2 параллельно						$r_{\text{ср}}^{(\text{пар})}$
2							
3							

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Закон Ома в дифференциальной и интегральной формах.
2. Закон Ома для неоднородного и однородного участка цепи. Закон Ома для полной или замкнутой цепи.
3. Последовательное и параллельное соединение проводников. Расчет их общего сопротивления.
4. Законы Кирхгофа и их физический смысл.
5. Изложите теорию моста Уитстона.
6. Начертите схему установки; расскажите об устройстве и назначении реохорда.
7. Вывести расчётную формулу (2.6).
8. Почему наивыгоднейшее положение движка находится посередине струны?

ГЛАВА 3

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

Лабораторная работа 2–3

Цель работы: научиться измерять емкости конденсаторов и их соединений.

Приборы и принадлежности:

1. Батарея эталонных конденсаторов и две батареи конденсаторов неизвестной емкости.
2. Реохорд.
3. Осциллограф.
4. Понижающий трансформатор.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Проводник, вблизи которого нет других проводников, называется *уединенным*. Потенциал, который он создает в любой точке пространства, в том числе потенциал самого проводника, пропорционален его заряду. Пропорциональность заряда и потенциала уединенного проводника записывается в виде:

$$q = C\varphi.$$

Коэффициент C называется *емкостью уединенного проводника*. Значительно бóльшая емкость может быть получена, если вместо уединенного проводника взять конденсатор.

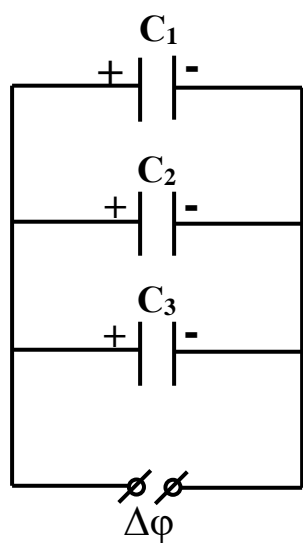
Электрический конденсатор – система двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком, толщина которого мала по сравнению с линейными размерами обкладок. Обкладки имеют равные и противоположные по знаку заряды, причем конфигурация проводников такова, что поле, ими созданное, сосредоточено в основном между ними.

Емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом и разностью потенциалов на его обкладках:

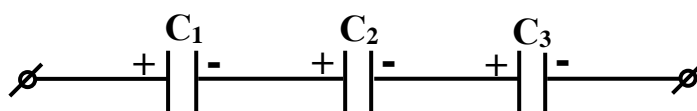
$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.1)$$

Емкость конденсатора пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика ϵ_r и тем больше, чем меньше толщина диэлектрика и чем больше площадь обкладок. Диэлектриками являются газы, жидкости и твердые электроизоляционные вещества с ϵ_r от 1 (газы) до 10^4 (сегнетокерамика).

В зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на плоские, сферические, цилиндрические и т.д. Используя формулу (3.1), можно вывести формулу емкости любого конденсатора. В электрических цепях конденсаторы служат для накопления энергии электрического поля. Всякий конденсатор характеризуется не только емкостью, но и пробивным напряжением – разностью потенциалов между его обкладками, при которой может произойти пробой диэлектрика. Для получения больших емкостей при данном рабочем напряжении конденсаторы соединяются параллельно в батареи (рис. 3.1, а).



а)



б)

Рис. 3.1

При параллельном соединении напряжение на всех конденсаторах одинаково, а заряд системы равен сумме зарядов конденсаторов:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i.$$

Емкость батареи конденсаторов равна сумме емкостей:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Последовательное соединение конденсаторов (рис. 3.1, б) применяют, когда во избежание пробоя требуется большое напряжение распределить между несколькими конденсаторами. В этом случае

$$q_1 = q_2 = q_3; \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

При подключении электрического конденсатора к источнику постоянного напряжения с разностью потенциалов на зажимах $\Delta\phi$ на обкладках накапливается электрический заряд, а в диэлектрике создается электрическое поле, энергия которого равна:

$$W = \frac{1}{2} C(\Delta\phi)^2.$$

Эта энергия может быть использована при кратковременном разряде конденсатора.

Конденсатор работает в цепи переменного тока. Для постоянного тока конденсатор представляет бесконечно большое сопротивление, т.е. его электропроводность практически равна нулю. В цепи переменного тока конденсатор обладает емкостным сопротивлением, зависящим от частоты ω :

$$X_c = \frac{1}{\omega C}.$$

Из изложенного следует, что измерение электроемкости конденсатора можно осуществить различными способами:

- а) исследовать разряд конденсатора с помощью *баллистического гальванометра*;
 - б) исследовать поведение конденсаторов в цепях переменного тока.
- В настоящей работе используется измерительный мост.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Для определения емкостей воспользуемся мостовой схемой рис. 3.2.

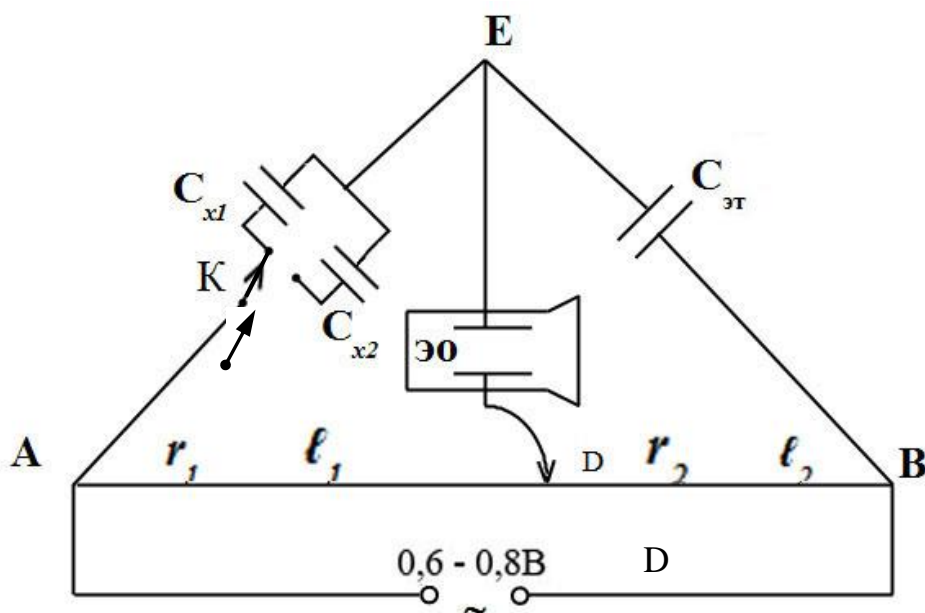


Рис. 3.2

На схеме: $C_{эт}$ – магазин эталонных конденсаторов, C_{x1} и C_{x2} – две батареи конденсаторов, электроемкость которых следует определить, ЭО – электронный

осциллограф, играющий роль индикатора нуля. Напряжение 0,6–0,8В подается на реохорд АВ от вторичной обмотки понижающего трансформатора.

Принцип измерения основан на нахождении такого положения движка реохорда D , при котором напряжение между вертикально отклоняющимися пластинами осциллографа равно нулю.

Допустим для простоты, что частота внешней ЭДС $\omega = 0$. Тогда в схеме устанавливается вполне определенное распределение потенциала φ . Пусть $\varphi_B > \varphi_A$. Если q_x и $q_{\text{эт}}$ – заряды соответственно конденсаторов C_x и $C_{\text{эт}}$, то, согласно (3.1),

$$\varphi_E - \varphi_A = \frac{q_x}{C_x}; \quad \varphi_B - \varphi_E = \frac{q_{\text{эт}}}{C_{\text{эт}}}. \quad (3.2)$$

Участок ED является, в сущности, просто разрывом цепи, так как пластины осциллографа разделены промежутком, а стеклянная колба электроннолучевой трубки откачана до высокого вакуума. Пренебрегая емкостью пластин, мы должны, очевидно, считать, что

$$q_x \approx q_{\text{эт}}. \quad (3.3)$$

По реохорду AB течет некоторый ток I . Если ввести сопротивления участков AD и DB (соответственно r_1 и r_2), то по закону Ома:

$$\varphi_D - \varphi_A = r_1 I \quad ; \quad \varphi_B - \varphi_D = r_2 I. \quad (3.4)$$

Нас интересует случай, когда

$$\varphi_E = \varphi_D. \quad (3.5)$$

Подставляя, согласно (3.5) φ_E вместо φ_D в (3.4) и принимая во внимание (3.2), имеем:

$$\frac{q_x}{C_x} = r_1 I, \quad \frac{q_{\text{эт}}}{C_{\text{эт}}} = r_2 I. \quad (3.6)$$

Разделив второе из равенств (3.6) на первое с учетом (3.3), получим

$$C_x = \frac{r_2}{r_1} C_{\text{эт}}. \quad (3.7)$$

Если ρ и S – удельное сопротивление и поперечное сечение проволоки реохорда, то

$$r_1 = \frac{\rho l_1}{S}; \quad r_2 = \frac{\rho l_2}{S},$$

где l_1 и l_2 — длины отрезков AD и DB . Подставляя эти выражения в (3.7), получим расчетную формулу:

$$C_x = \frac{l-l_1}{l_1} C_{\text{эт}}; \quad (3.8)$$

здесь $l = l_1 + l_2$ – длина реохорда.

При отсутствии напряжений на вертикально и горизонтально отклоняющих пластинах (последние на рис. 3.2 не показаны) светящееся пятно на экране исправного осциллографа располагается в центре. Если на вертикально отклоняющие пластины подать напряжение U_y , то вертикальное смещение пятна $y = bU_y$, где b – постоянная (чувствительность трубки к напряжению U_y).

Таким образом, даже в рассмотренном ранее стационарном случае можно зафиксировать достижение условия (3.5) – при этом светящаяся точка попадает в центр экрана. Значительно удобнее, однако, подавать на пластины переменное напряжение ($\omega > 0$). Светлое пятно на экране будет совершать колебания. Вследствие послесвечения экрана и способности глаза сохранять некоторое время световое восприятие на экране будет видна неподвижная вертикальная линия. На горизонтально отклоняющие пластины станем подавать пилообразное напряжение:

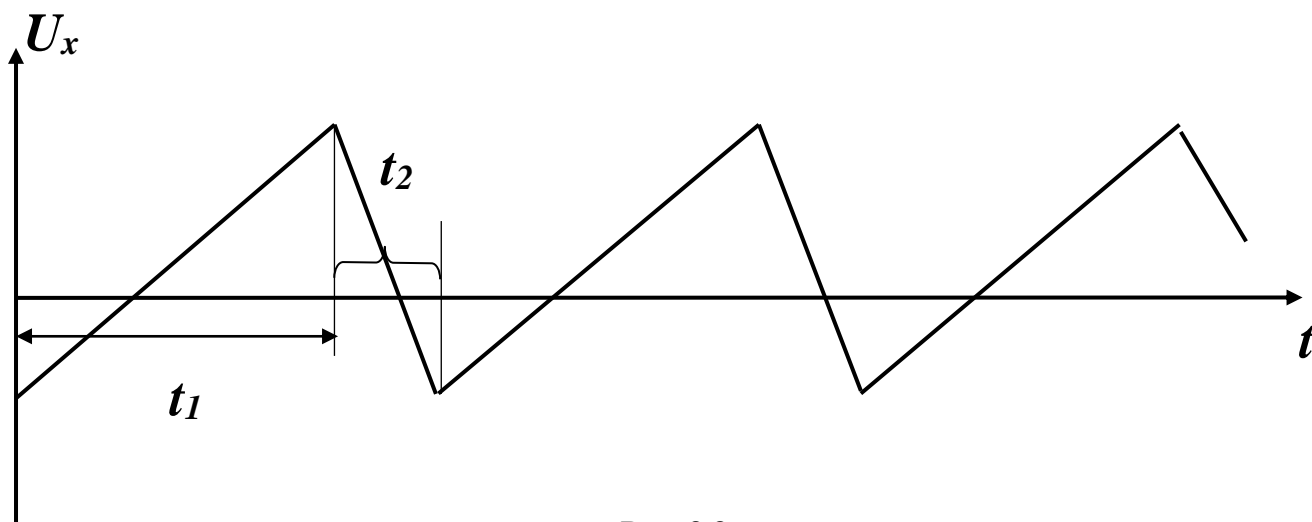


Рис. 3.3

В течение времени t_1 пятно будет равномерно двигаться по экрану в горизонтальном направлении ("развертка во времени"). За время $t_2 \ll t_1$ электронный луч возвратится в исходное положение. Результирующая траектория светлого пятна на экране окажется синусоидой. Для того чтобы картина была неподвижной, необходимо согласование периода повторения развертки $t_1 + t_2$ и периода повторения сигнала $\frac{2\pi}{\omega} : (t_1 + t_2) = K \frac{2\pi}{\omega}$, где K – небольшое натуральное число. Последнее условие – условие синхронизации – реализуется в осциллографах с помощью специальных вспомогательных устройств. Признаком выполнения условия (3.5) при описанной постановке опыта является, очевидно, "вырождение" синусоиды в горизонтальную прямую линию.

Заметим еще, что при $\omega \neq 0$ использованный ранее вывод формулы (3.8) становится не вполне корректным, так как потенциал ϕ перестает быть хорошо

определенной физической величиной. Это связано с тем, что в переменных полях циркуляция вектора напряженности электрического поля \vec{E} отлична от нуля: она пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, натянутую на контур, вдоль которого вычисляется циркуляция. Ясно, однако, что при невысоких частотах ω указанным обстоятельством можно пренебречь. Тогда $\text{rot } \vec{E} \approx 0$ и снова $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, что нам и нужно.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включаем установку в сеть и ждем появления на экране осциллографа синусоиды.
2. Включаем батарею конденсаторов C_{x_1} с помощью ключа К.
3. Устанавливаем на магазине эталонных емкостей емкость $C_{\text{эт}} = 1$ мкФ.
4. Производим балансировку моста, т.е., двигая ползунок реохорда, добиваемся появления горизонтальной прямой линии на экране осциллографа. Записываем соответствующие значения l_1 и l_2 .
5. Повторяем измерения для других эталонных конденсаторов $C_{\text{эт}} = 1.5, \dots, 10$ мкФ и той же самой батареи конденсаторов C_{x_1} .
6. Включаем батарею конденсаторов C_{x_2} . Проводим измерения, как и в случае батареи C_{x_1} (см. пункты 3 – 5).
7. По данным опытов вычисляем электроемкости C_{x_1} и C_{x_2} , используя формулу (3.8). Затем находим средние арифметические значения \bar{C}_{x_1} и \bar{C}_{x_2} .
8. Считая, что батареи C_{x_1} и C_{x_2} содержат конденсаторы емкостью 4 мкФ (широкие) и 2 мкФ (узкие), нарисовать схему соединения конденсаторов для обеих батарей и рассчитать электроемкости батарей теоретически. Сравнить полученные теоретические результаты с экспериментальными.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение электроемкости уединенного проводника. Емкость шара.
2. Конденсаторы. Емкость плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов.
3. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Расчет общей емкости при последовательном и параллельном соединении. Когда используется последовательное, а когда параллельное соединение конденсаторов?
4. Энергия уединенного проводника и энергия конденсатора.
5. В чем состоит метод измерения емкости с помощью мостика?
6. Вывести расчетную формулу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПАРАМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Лабораторная работа 2–4

Цель работы: экспериментальное определение магнитной восприимчивости водного раствора FeCl_3 .

Приборы и принадлежности:

1. U-образная трубка с раствором хлорного железа.
2. Электромагнит.
3. Выпрямитель и потенциометр.
4. Миллиамперметр.
5. Микроскоп.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Описание магнитного поля при наличии магнетиков

Магнетиками называются тела, присутствие которых способно либо видоизменять, либо возбуждать магнитное поле. Основным эмпирическим законом, определяющим индукцию магнитного поля $\vec{B}(\vec{r})$ в вакууме, является закон Био – Савара (см. литературу из списка в конце пособия). Согласно этому закону, источником постоянного магнитного поля служит объемная плотность электрического тока $\vec{j}(\vec{r})$. При наличии вещества поле возбуждается не только токами в проводниках, но и движениями заряженных частиц внутри молекул и атомов. Этим движениям можно сопоставить некоторую плотность «молекулярного» тока $\vec{j}_{\text{мол}}(\vec{r})$ (гипотеза Ампера). В учении о магнетизме чрезвычайно важную роль играет понятие магнитного момента системы замкнутых токов. В частном случае одного элементарного замкнутого тока (рис. 4.1) магнитный момент

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (4.1)$$

Здесь I – сила тока в витке, S – площадь витка, \vec{n} – единичная нормаль к витку, направление которой связано с направлением тока правым винтом.

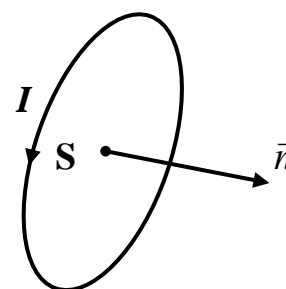


Рис. 4.1

Рассмотрим физически бесконечно малый объем магнетика δV (это макроскопически малый объем, в котором, однако, содержится большое количество микрочастиц). По определению, *намагниченность* (*вектор намагничивания*) в точке, связанной с δV , есть

$$\vec{J} = \frac{1}{\delta V} \sum_{i \in \delta V} \vec{p}_{mi} . \quad (4.2)$$

В (4.2) \vec{p}_{mi} – моменты молекул; суммирование распространяется на все молекулы в объеме δV . Оказывается, что плотность молекулярных токов может быть выражена через намагниченность:

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{J} . \quad (4.3)$$

Отметим, что, согласно квантовой теории, кроме описанного выше орбитального магнетизма, имеется еще и спиновый магнетизм. Последний связан с наличием у микрочастиц собственных механических и магнитных моментов (не имеющих отношения к орбитальному движению). Однако возбуждаемое спиновыми магнитными моментами поле по структуре аналогично полю некоторых электрических токов. Таким образом, формула (4.3) остается в силе и в этом случае.

Из закона Био–Савара следуют теорема Гаусса и теорема о циркуляции для вектора $\vec{B}(\vec{r})$ в вакууме (см., например, [2]). Учитывая в последней теореме наличие $\vec{j}_{\text{мол}}$ в форме (4.3), можно получить два основных дифференциальных уравнения магнитостатики:

$$\text{div} \vec{B} = 0 , \quad (4.4)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} . \quad (4.5)$$

Здесь

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (4.6)$$

– напряженность магнитного поля. Существует математическая теорема, согласно которой векторное поле однозначно определяется своими дивергенцией и ротором (при некоторых дополнительных условиях). Таким образом, уравнения (4.4), в принципе, достаточны для определения поля $\vec{B}(\vec{r})$. При этом, однако, необходимо выразить \vec{J} через \vec{B} (или, как это обычно делается, через \vec{H}). Различным типам связи между \vec{J} и \vec{H} отвечают различные типы магнетиков.

Простейшая зависимость \vec{J} от \vec{H} – линейная (все тела, находящиеся в поле, неподвижны):

$$\vec{J} = \chi \vec{H} . \quad (4.7)$$

Безразмерный коэффициент χ называется *магнитной восприимчивостью*. Подставляя (4.6) в (4.5), легко найти, что

$$\vec{B} = \mu \vec{H} ; \mu = \mu_0 \mu_r ; \mu_r = 1 + \chi . \quad (4.8)$$

Величина μ называется *магнитной проницаемостью* среды; она имеет размерность μ_0 (напомним, что $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м); μ_r – *относительная магнитная проницаемость*. Отметим, что в системе единиц Гауса, построенной на основе СГС - системы, μ_r обозначается просто μ и называется *магнитной проницаемостью*. Магнитная восприимчивость в системе единиц Гаусса равна $\chi/4\pi$.

Вещества, для которых выполняется соотношение (4.6), делятся на два класса. У *диамагнетиков* $\chi < 0$. Это приводит к ослаблению внешнего поля в диамагнитной среде. Характерное значение $|\chi|$ считается равным $\approx 10^{-5}$, χ не зависит от температуры. К диамагнетикам относятся, например, вода, стекло, висмут и др. В принципе, диамагнетизм проявляют любые вещества (см. п. 4.3).

У *парамагнетиков* $\chi > 0$. Отсюда следует, что парамагнетик усиливает внешнее поле. Восприимчивость χ парамагнетиков зависит от температуры. При комнатной температуре характерное значение $\chi \approx 10^{-3}$. Парамагнетиками являются, к примеру, кислород, алюминий, платина, хлорное железо (**Fe Cl₃**).

Как видно из приведенных ранее характерных значений χ , диамагнетики и парамагнетики можно назвать *слабыми магнетиками*: у них $|\chi| \ll 1$, $\mu_r \approx 1$, $\mu \approx \mu_0$. В противоположность этому, у *ферромагнетиков* $\chi \gg 1$, $\mu_r \gg 1$, $\mu \gg \mu_0$. При этом χ является функцией H , т.е. зависимость (4.6) оказывается нелинейной. Более того, намагниченность зависит от предыстории (гистерезис). Сохранившие после снятия внешнего поля намагниченность ферромагнетики представляют собой *постоянные магниты*.

Силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле

В магнитном поле магнетики должны испытывать действие некоторых механических сил. Эти силы называют *пондермоторными* (от латинского «пондус» – вес, «пондермоторный» – движущий весомые тела). Если исходить из представлений о некоторой микроструктуре магнетиков, то указанные силы сводятся к силам, действующим на молекулярные токи. В связи с этим выпишем формулу для силы, испытываемой элементарным током (рис. 4.1) во внешнем магнитном поле \vec{B} :

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_m \cdot \vec{B}). \quad (4.9)$$

В выражении (4.9) ∇ – оператор градиента (grad); точка (\bullet) обозначает скалярное произведение. Заметим, что в дальнейшем крестик (\times) будет обозначать векторное произведение. Подробный вывод (4.9) имеется, например, в [2]. С физической точки зрения, сила (4.9) является просто суммой сил Ампера, действующих на бесконечно малые участки линейного замкнутого тока. Отметим,

что в формуле (7) \vec{p}_m следует рассматривать как постоянный вектор (оператор ∇ на него не действует).

Для дальнейшего нам понадобится одна формула векторного анализа[1]:

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B}. \quad (4.10)$$

Эта формула может быть проверена, например, в декартовых координатах, где оператор

$$\vec{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя (4.10) к (4.9) при $\vec{p}_m = \text{const}$, имеем:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}_M + \vec{p}_m \times \text{rot} \vec{B}_M. \quad (4.11)$$

Здесь \vec{B}_M – индукция истинного микроскопического поля в месте нахождения молекулы. В общем случае \vec{B}_M совсем не обязана совпадать с индукцией \vec{B} из уравнений (4.4) и (4.6) – последняя предполагает, например, некоторое сглаживание по физически бесконечно малому объему. Однако в слабых магнетиках есть основания считать $\vec{B}_M \approx \vec{B}$.

Сложим теперь равенства (4.11), написанные для всех магнитных моментов некоторого объема δV . При этом $\sum_{\delta V} \vec{F} \equiv \vec{f} \delta V$, где \vec{f} – искомая объемная плотность пондермоторных сил, а $\sum_{\delta V} \vec{p}_m = \vec{J} \delta V$ согласно (4.2). Сокращая на δV , получим:

$$\vec{f} = (\vec{J} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{J} \times \text{rot} \vec{B}.$$

Далее, из (4.7) и (4.8) следует, что $\vec{J} = \frac{\chi}{\mu} \vec{B}$; $\vec{f} = \frac{\chi}{\mu} [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{B}]$.

Наконец, применяя (4.10) при $\vec{A} = \vec{B}$, находим:

$$\vec{f} = \frac{\chi}{2\mu} \text{grad} B^2. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) показывает, что на магнетики, как и утверждалось ранее, в магнитном поле действуют некоторые силы. Правда, поле должно быть неоднородным. У диамагнетиков $\chi < 0$, поэтому \vec{f} направлена по антиградиенту B^2 , т.е. в сторону ослабления поля. И, действительно, диамагнетики выталкиваются из магнитного поля. Парамагнетики же втягиваются в область более сильного поля. Этот эффект и используется в данной работе. Заметим, что приведенный ранее вывод формулы (4.12) не является вполне физически безупречным. Существует более общий метод получения выражения пондермоторных сил. Он связан с вычислением вариации магнитной энергии при бесконечно малом перемещении находящихся в поле тел. Не вдаваясь в

подробности, укажем лишь, что в важном случае, когда намагниченность линейно зависит от плотности, получается тот же самый результат (4.12).

Понятие о механизме намагничивания диа- и парамагнетиков

Поскольку в практически интересных случаях магнетики являются макроскопическими объектами, т.е. состоят из колоссального числа микрочастиц, их магнитные свойства (как и любые другие) должны рассматриваться на основе термодинамики и статистической физики. Между тем, существует *теорема Бора – ван Левен*, согласно которой в термодинамическом равновесии классическая система зарядов, помещенная в магнитное поле, не может обладать магнитным моментом. Таким образом, в рамках классической физики нельзя объяснить ни диа-, ни пара-, ни ферромагнетизм. В то же время, достаточно убедительная теория диа- и парамагнетизма была создана Ланжевенем за несколько лет до доказательств Бора и ван Левен без использования квантовой механики. Причина этого заключается в том, что в классические теории вводились сугубо квантовые представления. Нужно было сначала объяснить существование самих атомов и молекул (что удается только квантовомеханическим путем), а уже потом – существование намагниченности. Тем не менее, теория Ланжевена позволяет в основном понять природу намагничивания, так что коротко рассмотрим ее основные положения.

Будем представлять себе атом как систему электронов, совершающих ограниченное (финитное) движение в поле некоторой неподвижной частицы (ядра). Далее мы станем использовать две системы координат – «неподвижную» (инерциальную) и вращающуюся; начала обеих систем поместим в ядре. Величины, рассчитываемые в присутствии магнитного поля, снабдим индексом «м». Пусть \vec{V} – скорость некоторого электрона, \vec{a} – его ускорение, \vec{F}_0 – совокупная сила, действующая на электрон со стороны ядра и остальных электронов. В отсутствие магнитного поля уравнение движения электрона имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_0. \quad (4.13)$$

Здесь m – масса электрона. «Включим» магнитное поле \vec{B} и запишем уравнение движения электрона относительно системы отсчета, вращающейся в инерциальной системе с частотой $\vec{\Omega}$:

$$\vec{V}_M = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{R}; \quad (4.14)$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_0 + e\vec{V}_M \times \vec{B} + 2m\vec{V}' \times \vec{\Omega} + \vec{F}_{цб}. \quad (4.15)$$

Здесь \vec{V}' и \vec{a}' , по механической терминологии, относительные скорость и ускорение; $e\vec{V}_M \times \vec{B}$ – сила Лоренца (e – заряд электрона, т.е. $e < 0$); $2m\vec{V}' \times \vec{\Omega}$ – сила инерции Кориолиса; $\vec{F}_{цб}$ – центробежная сила инерции. $F_{цб} \sim m\Omega^2 R$; в то же время, $F_0 \sim m\omega_0^2 R$, где ω_0 – некоторая характерная частота обращения (угловая скорость) электрона по невозмущенной орбите. Пусть

$$\omega_0 \gg \Omega. \quad (4.16)$$

Тогда в уравнении (4.15) можно пренебречь членом $\vec{F}_{\text{цб}}$ по сравнению с \vec{F}_0 . Одновременно силу Лоренца с достаточной точностью можно переписать как $e\vec{V}' \times \vec{B}$. Возьмем теперь

$$\vec{\Omega} = -\frac{e}{2m} \vec{B}. \quad (4.17)$$

Тогда вместо (4.15) получаем: $m\vec{a}' = \vec{F}_0$. Последнее равенство совпадает с (4.13). Отсюда имеем **теорему Лармора**: при наличии внешнего магнитного поля внутреннее движение электронов атома не изменяется, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью (4.17). Таким образом, согласно (4.14), периодически выполняется равенство

$$\vec{V}_m \approx \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{R}. \quad (4.18)$$

Величина Ω называется **ларморовой частотой**. На рис. 4.2 схематически показано движение атомного электрона в случае, когда имеется внешнее поле \vec{B} .

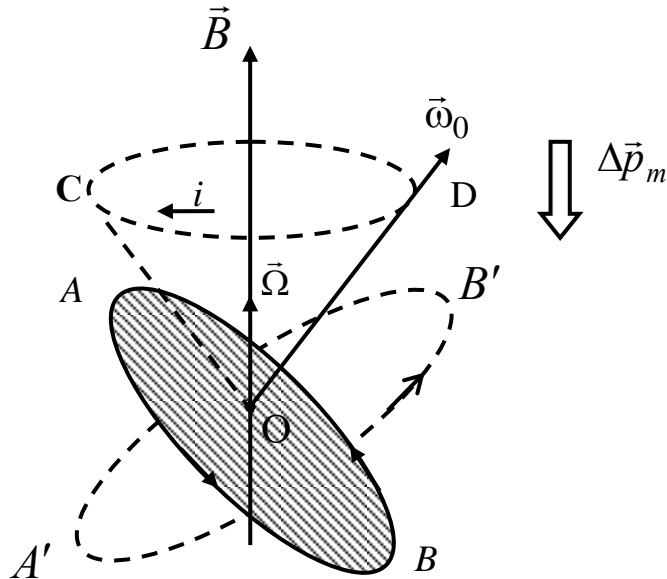


Рис. 4.2

Сплошная окружность АВ (охватываемая ею площадь заштрихована) является невозмущенной траекторией электрона (О – ядро атома); $\vec{\omega}_0$ – угловая скорость соответствующего вращения. Дополнительное вращение (второй член в (4.18)) приводит к непостоянству $\vec{\omega}_0$: вектор $\vec{\omega}_0$ описывает коническую поверхность COD. Это явление называется **прецессией Лармора**. Плоскость орбиты электрона также поворачивается (**прецессия орбит**) – одно из ее положений А'В' показано на рис. 4.2. Вращению электрона с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ отвечает некоторый ток i , направленный в противоположную сторону, так как заряд электрона отрицателен.

Этому току соответствует магнитный момент $\Delta\vec{p}_m$, направление которого на рис. 4.2 показано двойной стрелкой. $\Delta\vec{p}_m$ антипараллелен \vec{B} , а это и есть **диамагнетизм**.

Рассмотрим для простоты случай, когда $\vec{\omega}_0$ и $\vec{\Omega}$ коллинеарны. Пусть ν_L – частота ларморовой прецессии. Тогда

$$i = |e|v_L = \frac{1}{2\pi}|e|\Omega = \frac{e^2}{4\pi m}B, \quad (4.19)$$

$$\Delta p_m = i \cdot \pi r^2 = \frac{e^2}{4m}r^2B. \quad (4.20)$$

Здесь r – радиус орбиты. Теперь надо просуммировать выражения (4.20) по всем электронам атома. Более или менее ясно, что при произвольной ориентации орбиты под r^2 следует понимать квадрат расстояния электрона до оси $\vec{\Omega}$. Введем декартову систему координат с осью Oz , направленной вдоль $\vec{\Omega}$. Тогда $r^2 = x^2 + y^2$. Далее, выражение (4.20) можно написать, лишь имея в виду усреднение по промежутку времени $\Delta t \gg 2\pi/\Omega \gg 2\pi/\omega_0$. Поэтому сумма

$$\sum_{\alpha=1}^Z (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \equiv Z(\overline{x^2 + y^2}) = 2Z\overline{x^2} = \frac{2}{3}ZR^2.$$

Здесь Z – число электронов в атоме, черта означает усреднение по электронам и по времени Δt (в последнем нет необходимости в квантовой теории); $R^2 = \overline{x^2 + y^2 + z^2}$ – средний квадрат расстояния электрона от ядра. Мы считали $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$, так как диамагнитные атомы сферически симметричны (можно рассуждать и иначе, ссылаясь на хаотичность распределения атомов в единичном объеме).

Итак, для атома

$$\Delta p_m^{\text{ат}} = \frac{e^2 Z}{6m} \overline{R^2} B.$$

Пусть n – концентрация атомов. Тогда, по определению,

$$\vec{J}_{\text{диам}} = -\frac{nZe^2}{6m} \overline{R^2} \vec{B}. \quad (4.21)$$

Согласно (4.7) и (4.8), $\vec{J}_{\text{диам}} = \frac{\chi_{\text{диам}}}{\mu} \vec{B}$. Поскольку в слабых магнетиках $\mu \approx \mu_0$,

то из (4.21) выводим:

$$\chi_{\text{диам}} \approx -\mu_0 \frac{nZe^2}{6m} \overline{R^2}. \quad (4.22)$$

Теория, рассматриваемая в данном параграфе, пригодна в тех случаях, когда электронная оболочка атомов может свободно вращаться вокруг ядра. Опыт показывает, что основные результаты этой теории вполне применимы не только к

одноатомным, но и к многоатомным газам, а также ко многим жидким и твердым магнетикам. Однако уже в молекулярных газах возникают некоторые проблемы с определением $\overline{R^2}$.

Перейдем к объяснению парамагнетизма. Пусть \vec{R} – радиус-вектор электрона на орбите АВ (рис. 4.2). Момент импульса электрона

$$\vec{\ell} = mR^2\vec{\omega}_0. \quad (4.23)$$

Электронный ток направлен против вращения и равен $|e|\omega_0/2\pi$. Магнитный момент $p_m = \frac{|e|\omega_0}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{2}|e|R^2\omega_0$. Направление вектора \vec{p}_m устанавливается согласно рис. 4.1. В результате

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2}eR^2\vec{\omega}_0 = \Gamma_{\text{орб}}\vec{\ell}, \quad (4.24)$$

где

$$\Gamma_{\text{орб}} = e/2m < 0 \quad (4.25)$$

орбитальное гиромангнитное (точнее *магнитомеханическое*) отношение. При включении магнитного поля векторы $\vec{\ell}$ и \vec{p}_m каждого электрона прецессируют вместе с $\vec{\omega}_0$. Поэтому, если ввести магнитный момент атома $\vec{p}_m^{\text{ат}}$ и момент импульса атома \vec{L} соотношениями

$$\vec{p}_m^{\text{ат}} = \sum_{\alpha=1}^Z \vec{p}_{m\alpha}, \quad \vec{L} = \sum_{\alpha=1}^Z \vec{\ell}_{\alpha},$$

то по-прежнему окажется, что

$$\vec{p}_m^{\text{ат}} = \Gamma_{\text{орб}}\vec{L}, \quad (4.26)$$

причем $\vec{p}_m^{\text{ат}}$ и \vec{L} будут прецессировать с угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

У диамагнитных атомов в отсутствие поля $\vec{L} = \vec{p}_m^{\text{ат}} = 0$, так что весь эффект сводится к появлению величины $\Delta p_m^{\text{ат}}$, рассмотренной ранее. Пусть теперь $\vec{p}_m^{\text{ат}} \neq 0$ при $\vec{B} = 0$. Станем для удобства писать вместо $\vec{p}_m^{\text{ат}}$ просто \vec{p} . Введем снова декартову систему координат с осью Oz, направленной вдоль \vec{B} . Чрезвычайно существенно, что при прецессионном движении угол между \vec{p} и осью Oz не изменяется. Отсюда следует, что средние значения x- и y-составляющих \vec{p} для каждого атома равны нулю, а z-составляющая постоянна.

Таким образом, не может, очевидно, возникнуть намагниченность, перпендикулярная \vec{B} . Однако, казалось бы, не возникает намагниченность и

вдоль \vec{B} , так как z -компоненты векторов \vec{p} внутри единичного объема скорее всего распределены хаотично, так что $J_z \approx 0$.

Для понимания причины существования парамагнетизма необходимо учесть взаимодействие молекул. Этот вопрос обсуждается далее. В результате получается, что

$$\chi_{\text{парама}} \approx \mu_0 \frac{np^2}{3k_B T}. \quad (4.27)$$

Сделаем еще несколько замечаний. Формула (4.27) имеет вид: $\chi_{\text{парама}} = C/T$. Последнее соотношение называется *законом Кюри*. В выражении (4.22) в качестве характерного значения $\overline{R^2}$ следует брать квадрат так называемого *боровского радиуса*:

$$\overline{R^2} \sim a_0^2; \quad a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (me^2) = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

В формуле (4.27) характерным значением p является магнетон Бора μ_B :

$$p \sim \mu_B = |e| \hbar / (2m) = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}.$$

Здесь $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – *постоянная Планка* – основная квантовомеханическая постоянная. Частоту ω_0 , входящую в неравенство (4.16), можно оценить, полагая

$$m\omega_0^2 a_0 \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2}.$$

Отсюда $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ рад/с}$. Наибольшие доступные нам значения $H_{\text{max}} \sim 0,8 \cdot 10^9 \text{ А/м}$.

Отсюда (для слабых магнетиков) $B_{\text{max}} \sim \mu_0 H_{\text{max}} \sim 10^3 \text{ Тл}$, $\Omega_{\text{max}} \sim 10^{14} \text{ рад/с}$.

Таким образом, условие (4.16) выполняется с большим запасом. С другой стороны, примером слабого поля может служить магнитное поле Земли ($H \leq 60 \text{ А/м}$). В таком поле $\Omega \sim 10^6 \text{ рад/с}$. Ясно, что уже при таких Ω вполне допустимо усреднение по макроскопически малым временам, которые, однако, много больше периода прецессии. Если в неравенстве (4.35) взять температуру, близкую к комнатной ($T = 300 \text{ К}$), то получим $B \ll 4,5 \cdot 10^2 \text{ Тл}$. Это означает, что линейная зависимость J от H (4.36) сохраняется даже в довольно сильных полях. И последнее, в формулах (4.21) и (4.37) $n = \tau / M$, где τ – плотность вещества, а M – масса молекулы. Таким образом, $J \sim \tau$, а это, как указывалось, приводит к выражению (4.12).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Цель настоящей работы – определение магнитной восприимчивости водного раствора хлорного железа. Для этого одно колено U -образной трубки, в которую налит раствор, помещают между полюсами (наконечниками) электромагнита, создающего неоднородное магнитное поле (рис. 4.3). В условиях опыта необходимо, чтобы уровень жидкости в этом колене находился в центральной

части межполюсного пространства (где H максимальна), а нижняя часть колена – в области, где H пренебрежимо мала.

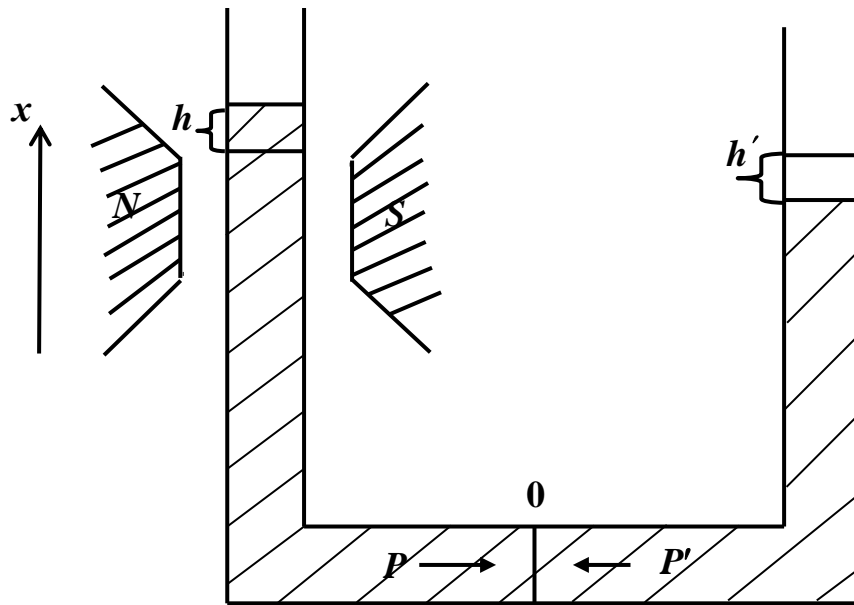


Рис. 4.3

Согласно (4.12), x -компонента объемной плотности пондеромоторной силы, действующей на раствор, есть

$$f_x = \frac{\chi}{2\mu} \frac{\partial B^2}{\partial x} \approx \frac{\chi}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_0^2 H^2) = \frac{1}{2} \chi \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial x}.$$

Пусть S – площадь сечения левого колена трубки, а H_{\max} – максимальное значение напряженности магнитного поля. Тогда полная x -компонента силы, приложенной к жидкости в левом колене, очевидно, равна

$$F_x = \int_{H=0}^{H=H_{\max}} f_x S dx = \frac{1}{2} \chi \mu_0 S \int_{H=0}^{H=H_{\max}} \frac{\partial H^2}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \chi \mu_0 H_{\max}^2 S.$$

Под действием силы F_x раствор в левом колене трубки поднимается на некоторую высоту h , а в правом – опускается на h' (вследствие неразрывности жидкости). Заметим, что в узких трубках проявляют себя силы поверхностного натяжения. Однако, как легко понять, в нашем опыте наличие этих сил может привести лишь к некоторой постоянной разности уровней раствора (за счет разницы лапласовских давлений). Пусть P – давление, создаваемое жидкостью левого колена в точке O (рис. 4.3), а P' – давление жидкости из правого колена. Условие равновесия и без магнитного поля, и при наличии магнитного поля одно и то же: $P = P'$. Следовательно, в очевидных обозначениях,

$$\Delta P = \Delta P'.$$

Силу F_x можно рассматривать в качестве некоторого отрицательного давления:

$$\Delta P = -F_x / S + \rho gh;$$

кроме того, $\Delta P' = -\rho gh'$ (ρ – плотность раствора). Итак,

$$-F_x / S + \rho gh = -\rho gh' ;$$

$$\frac{1}{2} \chi \mu_0 H_{\max}^2 = \rho g (h + h'). \quad (4.28)$$

Таким образом, поверхностное натяжение действительно выпало из формулы (4.28) (оно, однако, приводит к искривлению свободной поверхности жидкости, т.е. к образованию мениска). В опыте измеряется только h , но не h' . Это возможно в двух случаях. Если площадь поперечного сечения правого колена трубки $S' \gg S$, то будет $h + h' \approx h$, так как $h' \ll h$. Если же, как в нашей установке, $S' = S$, то $h' = h$ и вместо (4.28) имеем

$$\chi = \frac{4\rho gh}{\mu_0 H_{\max}^2}. \quad (4.29)$$

Неоднородное поле создается благодаря тому, что наконечники электромагнита имеют форму усеченных конусов. Величину H_{\max} можно рассчитать по формуле:

$$H_{\max} = NI / l_0,$$

где I – сила тока в обмотке электромагнита; N – число витков в обмотке; l_0 – ширина зазора электромагнита. Подставляя H_{\max} в (4.29), получаем, наконец:

$$\chi = \frac{4\rho g h l_0^2}{\mu_0 N^2 I^2}. \quad (4.30)$$

Высота подъема h определяется при помощи отсчета микроскопа. Повернув его шкалу на 90° , можно измерить ширину l_0 межполюсного зазора электромагнита. Силу тока измеряют миллиамперметром. В данной работе число витков катушки равно $N = 4160$, а плотность парамагнитной жидкости $\rho \approx 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Собирают электрическую схему. Для этого напряжение 250В с выпрямителя (ВУП-2) подают на потенциометр и, далее, на обмотку электромагнита через миллиамперметр.
2. Настраивают установку так, чтобы в микроскопе был виден мениск жидкости. Измеряют l_0 , поворачивая шкалу микроскопа в горизонтальное положение. Цена деления 0,05 мм.
3. Поворачивают микроскоп таким образом, чтобы шкала была расположена вертикально. Записывают начальную высоту мениска (при $I = 0$).
4. Включают схему и выставляют по миллиамперметру значение I не менее 20 делений. Измеряют высоту подъема жидкости h .
5. Вычисляют χ по формуле (4.30).

6. Проводят несколько замеров, увеличивая силу тока и измеряя количество делений, на которое поднялась жидкость.
7. Результаты измерений заносят в таблицу 4.1:

Таблица 4.1

Номер измерения	h	I	χ
1			
2			
3			
4			
...			

$$l_0 = \dots$$

8. Вычисляют среднее арифметическое значение $\bar{\chi}$.

Рассмотрим вывод формулы (4.27)

В газе взаимодействие молекул сводится к их соударениям. При каждом соударении направления векторов \vec{p} скачкообразно изменяются. Сам акт столкновения в деталях мы проследить не можем, но для нас важно лишь то, что столкновения ведут к состоянию термодинамического равновесия. Для газоподобных систем в равновесии справедливо **распределение Больцмана**, согласно которому вероятность состояния молекулы тем больше, чем меньше ее энергия. Рассмотрим кинетическую энергию E_M электронной оболочки атома, совершающей ларморову прецессию. Согласно (4.18),

$$\begin{aligned} E_M &= \sum_{\alpha=1}^Z \frac{1}{2} m \left\{ \vec{V}_\alpha + \vec{\Omega} \times \vec{R}_\alpha \right\}^2 \approx \sum_{\alpha=1}^Z \frac{1}{2} m V_\alpha^2 + m \sum_{\alpha=1}^Z \vec{V}_\alpha \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R}_\alpha) \equiv \\ &\equiv E + m \sum_{\alpha=1}^Z (\vec{R}_\alpha \times \vec{V}_\alpha) \cdot \vec{\Omega} = E + \left\{ \sum_{\alpha=1}^Z \vec{R}_\alpha \times (m \vec{V}_\alpha) \right\} \cdot \vec{\Omega} = E + \vec{L} \cdot \vec{\Omega} = \\ &= E - \frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \left(-\frac{2m}{e} \vec{\Omega} \right) = E - \vec{p} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Таким образом, в магнитном поле атом приобретает дополнительную энергию

$$\Delta E = -\vec{p} \cdot \vec{B}. \quad (4.31)$$

При выводе (4.31) мы пренебрегли членами $\sim \Omega^2$, а также произвели циклическую перестановку в смешанном произведении:

$$(\vec{\Omega} \times \vec{R}) \cdot \vec{V} = (\vec{R} \times \vec{V}) \cdot \vec{\Omega}.$$

Из-за экспоненциальной формы распределения Больцмана в магнитном

поле в функции распределения появляется дополнительный множитель $e^{-\vec{p} \cdot \vec{B} / k_B T}$

(k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура). Именно один этот множитель нас и интересует, так как при усреднении все остальные множители, связанные с другими видами энергии молекулы, выпадают вследствие нормировки. Введем декартовы координаты с осью Oz вдоль \vec{B} , а также сферические координаты ϑ и φ , как показано на рис. 4.4.

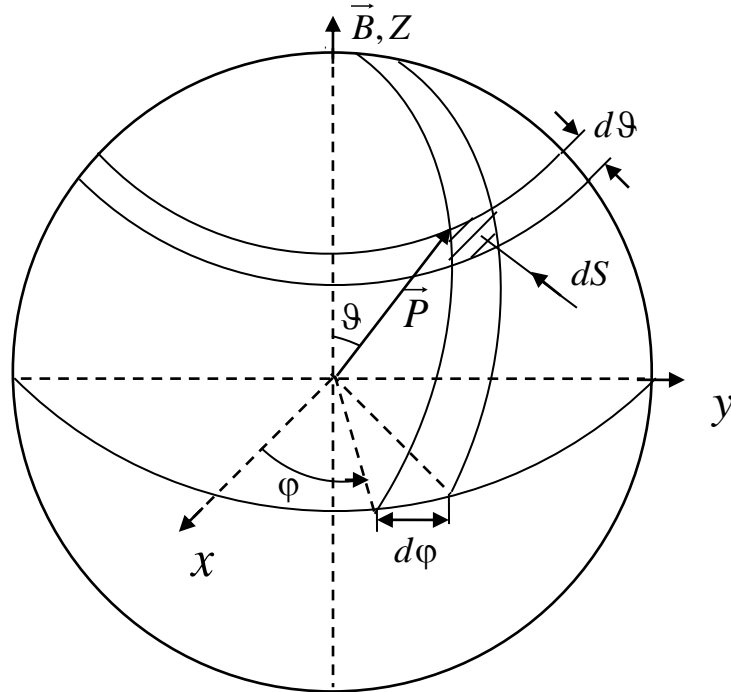


Рис. 4.4

На рис. 4.4 z -компонента магнитного момента молекулы $p_z = p \cos \vartheta$; среднее значение этой компоненты, взятое по ансамблю одинаковых молекул,

$$\langle p_z \rangle = p \int \cos \vartheta \cdot e^{a \cos \vartheta} d\Omega / \int e^{a \cos \vartheta} d\Omega ,$$

где

$$a = \frac{pB}{k_B T} ;$$

интегрирование ведется по направлениям вектора \vec{p} постоянной длины, а $d\Omega$ – элемент соответствующего телесного угла.

Здесь мы не можем подробнее рассматривать $d\Omega$. Заметим лишь, что, записывая известное выражение для элемента объема в сферических координатах: $dV = p^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dp$, мы, в сущности, подразумеваем, что $p^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = dS$ (dS заштрихована на рис. 4.4). По определению телесного угла,

$$d\Omega \equiv dS / p^2 = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi .$$

Легко понять, что в выражении для $\langle p_z \rangle$ интегралы по долготе φ (от 0 до 2π) сокращаются; таким образом,

$$\langle p_z \rangle = p J_1(a) / J_0(a) ,$$

где обозначено

$$J_n(a) = \int_0^\pi \cos^n \vartheta e^{a \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Очевидно, $J_1(a) = \frac{d}{da} J_0(a)$. Интеграл по полярному углу ϑ в выражении $J_0(a)$ вычисляется элементарно:

$$J_0(a) = -\frac{1}{a} \int_0^\pi e^{a \cos \vartheta} d(a \cos \vartheta) = -\frac{1}{a} e^{a \cos \vartheta} \Big|_0^\pi = \frac{e^a - e^{-a}}{a}.$$

Далее,

$$J_1(a) = \frac{d}{da} \left(\frac{e^a - e^{-a}}{a} \right) = \frac{e^a + e^{-a}}{a} - \frac{e^a - e^{-a}}{a^2}.$$

Окончательно

$$\langle p_z \rangle = p \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right).$$

Пусть, как и ранее, n – концентрация молекул; тогда, по смыслу усреднения,

$$\vec{J}_{\text{парам}} = npL \left(\frac{pB}{k_B T} \right) \frac{\vec{B}}{B}. \quad (4.32)$$

Здесь

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \equiv \text{ctha} - \frac{1}{a} \quad (4.33)$$

– функция Ланжевена (cth – гиперболический котангенс).

При $a \rightarrow \infty$ $e^{-a} \rightarrow 0$, так что $L(a) \rightarrow 1$. При $a \rightarrow 0$ гиперболический котангенс можно представить несколькими первыми членами его ряда Лорана:

$$\text{ctha} = \frac{1}{a} + \frac{1}{3}a - \frac{1}{45}a^3 + \dots \quad (4.34)$$

График функции Ланжевена (4.33) изображен на рис. 4.5.

Из рис. 4.5 следует, что в сильных полях наступает *насыщение намагниченности*: $J_{\text{нас}} = np$. При сравнительно высоких температурах и малых полях, когда

$$pB \ll k_B T, \quad (4.35)$$

в разложении (4.34) оставляем только первые два члена. Подставляя их в (4.33), имеем из (4.32):

$$\vec{J}_{\text{парам}} \approx np \frac{1}{3} \frac{pB}{k_B T} \frac{\vec{B}}{B} \approx \frac{1}{3} \frac{np^2}{k_B T} \mu_0 \vec{H}. \quad (4.36)$$

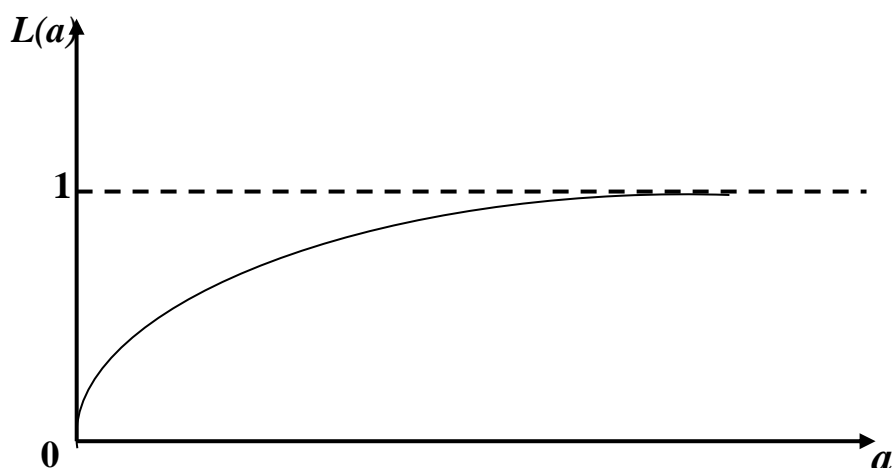


Рис. 4.5

Сравнивая (4.36) с (4.7), находим, наконец, что

$$\chi_{\text{парам}} \approx \mu_0 \frac{np^2}{3k_B T}. \quad (4.37)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что является источником магнитного поля в вакууме? Силовая характеристика магнитного поля – индукция \vec{B} . Принцип суперпозиции полей. Примеры графического изображения полей.
2. Закон Био – Савара и его применение к расчёту магнитных полей.
3. Закон полного тока для поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора \vec{B}).
4. Что является источником магнитного поля в веществе? Атом с классической точки зрения. Магнитный момент атома.
5. Магнетики, их типы. Вектор намагничивания.
6. Закон полного тока для поля в веществе. Связь напряжённости с намагниченностью и индукцией магнитного поля.
7. Прецессия Лармора. Механизм намагничивания диамагнетиков.
8. Механизм намагничивания парамагнетиков. Функция Ланжевена.
9. Силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле.
10. Вывод расчётной формулы (24).
11. Порядок выполнения работы.

ГЛАВА 5

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Лабораторная работа 2–5

Цель работы: экспериментальное определение взаимной индуктивности прямолинейного проводника и тороидальной катушки.

Приборы и принадлежности:

1. Звуковой генератор.
2. Вольтметр переменного тока.
3. Прямолинейный проводник (рамка).
4. Две тороидальные катушки квадратного сечения.
5. Милливольтметры.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

При изменении магнитного потока, пронизывающего контур замкнутого проводника, в последнем возникает ЭДС. Это явление называется *электромагнитной индукцией*. На рис. 5.1 ℓ – проводящий виток (стрелкой показано направление обхода); S (на рисунке заштрихована) – произвольная поверхность, опирающаяся на контур ℓ ; \vec{n} – единичный вектор нормали к элементу dS поверхности. Обратим внимание на то обстоятельство, что вектор \vec{n} составляет правый винт с направлением обхода (см. рис. 5.3). Наконец, \vec{B} – индукция магнитного поля.

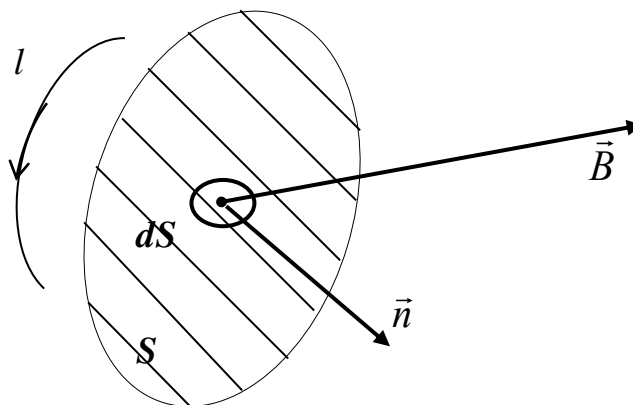


Рис. 5.1

Магнитный поток, проходящий через поверхность S , зависит от выбора направления \vec{n} :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS, \quad (5.1)$$

где точка (\bullet) обозначает скалярное умножение. Приняв определение (1), можно сформулировать закон электромагнитной индукции количественно:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.2)$$

Здесь \mathcal{E}_{ind} – ЭДС индукции, действующая в выбранном направлении обхода. Соотношение (5.2) называют **законом Фарадея**, а знак "минус" в правой части соответствует **правилу Ленца**: индукционный ток в замкнутом контуре, возбуждаемый ЭДС индукции \mathcal{E}_{ind} , имеет такое направление, что своим магнитным полем он препятствует изменению магнитного потока, которым наводится.

Напишем дифференциальные уравнения магнитостатики, пренебрегая для простоты магнитными свойствами среды (воздуха):

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j}. \quad (5.3)$$

Здесь \vec{j} – объемная плотность тока проводимости. При прочих неизменных условиях абсолютная величина \vec{j} прямо пропорциональна силе тока в проводнике: $j \sim I$. Уравнения (5.3) линейны. Отсюда следует, что $B \sim j$. В силу определения (5.1), $\Phi \sim B$. Таким образом, $\Phi \sim I$. Уточним этот результат для случая двух замкнутых проводников 1 и 2, с токами I_1 и I_2 соответственно. Пусть Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки через поверхности, опирающиеся на контуры проводников (форма упомянутых поверхностей произвольна в силу первого из уравнений (5.3)). Имеем:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2; \quad \Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1. \quad (5.4)$$

Величины L_1 и L_2 называются **индуктивностями (коэффициентами самоиндукции)** проводников 1 и 2, величины L_{12} и L_{21} – **взаимными индуктивностями (коэффициентами взаимной индукции)**.

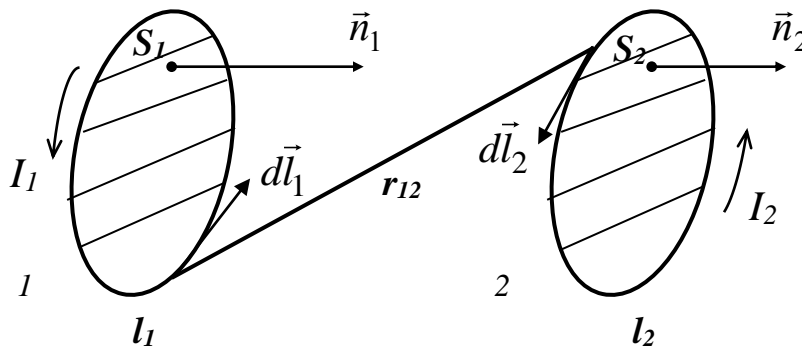


Рис. 5.2

На рис. 5.2 показаны два замкнутых контура с выбранными направлениями обхода. Единичные нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 связаны с обходом правым винтом. Фиксируем знаки магнитных потоков Φ_1 и Φ_2 , полагая в (5.1) $\vec{n} = \vec{n}_1$ и $\vec{n} = \vec{n}_2$. При таком выборе $L_1 > 0$ и $L_2 > 0$. Это легко понять из следующих соображений. Пусть, например, в контуре l_1 течет ток в направлении обхода. Естественно считать его положительным. Направление собственного магнитного поля тока I_1 определяется внутри контура правилом правого винта.

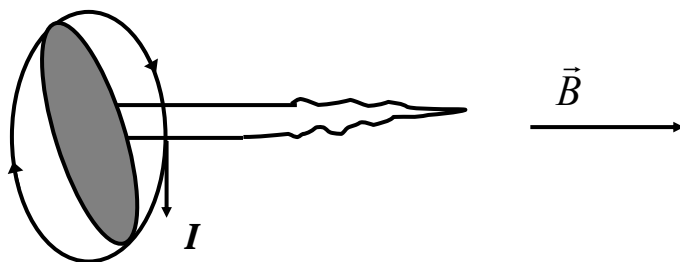


Рис. 5.3

Сравнивая рис. 5.2 и 5.3, убеждаемся, что $\int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dS > 0$. Таким образом, $L_1 I_1 > 0$ и $L_1 > 0$. Если же ток течет против направления обхода ($I_1 < 0$), то и $L_1 I_1 < 0$. Аналогично $L_2 > 0$.

Сложнее обстоит дело со знаком L_{12} и L_{21} . Не вдаваясь в подробности, приведем точную формулу:

$$L_{12} = L_{21} = (\mu_0 / 4\pi) \int_{l_1} \int_{l_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) / r_{12}. \quad (5.5)$$

Смысл величин $d\vec{l}_1$, $d\vec{l}_2$ и r_{12} ясен из рис. 5.2. Видно, что если изменить направление обхода одного контура на противоположное, то L_{12} переменит знак. В однородной диа- или парамагнитной среде μ_0 заменяется на магнитную проницаемость μ . При наличии ферромагнетиков всё изложенное ранее, начиная со второго из уравнений (5.3), не имеет места. Важным исключением, однако, является трансформатор с сердечником из магнитно-мягкого материала (с узкой петлей гистерезиса). Здесь $\mu / \mu_0 \gg 1$ и $L_1 L_2 = L_{12}^2$. Отметим также, что, как это видно из (5.5), единицей измерения L_{12} является генри (Гн), так как $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. В тех же единицах, разумеется, измеряются L_1 и L_2 .

В работе измеряется взаимная индуктивность прямолинейного проводника AB и тороидальной катушки, охватывающей его (рис. 5.4).

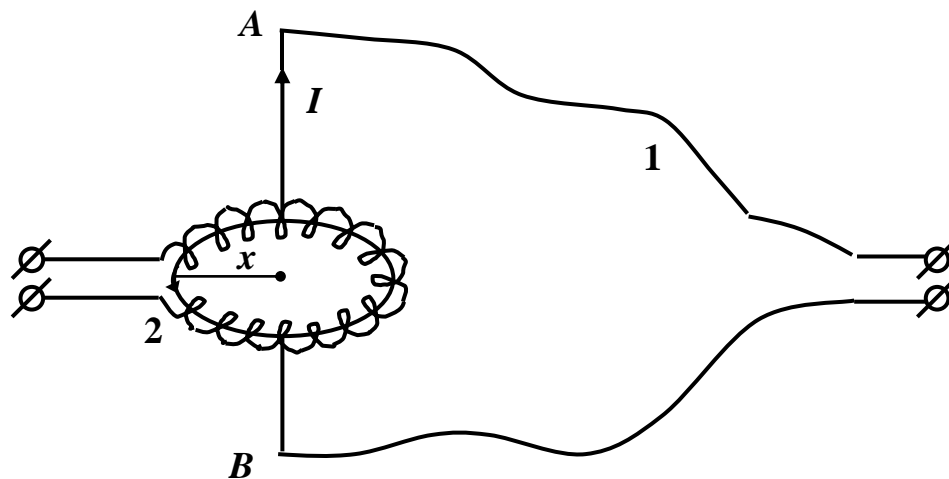


Рис. 5.4

Замкнутая кривая на рис. 5.4 – это одна из силовых линий магнитного поля тока I , текущего вдоль AB . Её направление связано с направлением I правилом правого винта. Вследствие аксиальной (осевой) симметрии задачи можно ожидать, что силовые линии имеют вид окружностей с центрами на проводнике AB . Эти окружности лежат в перпендикулярных к AB плоскостях. Для вычисления $B(x)$ применим теорему о циркуляции, вытекающую из второго уравнения (5.3). В нашем случае эта теорема дает:

$$2\pi x B(x) = \mu_0 I, \quad B(x) = (\mu_0 I) / 2\pi x. \quad (5.6)$$

В лабораторной установке катушка намотана на квадратный каркас. На рис. 5.5 приведено сечение катушки плоскостью, проходящей через проводник AB .

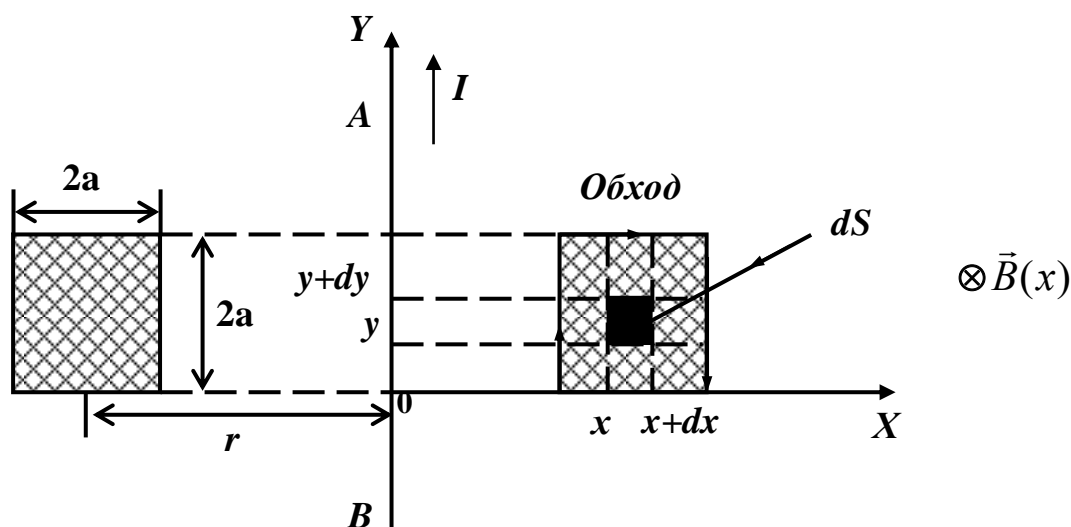


Рис. 5.5

В правой полуплоскости рис. 5.5 поле $\vec{B}(x)$ направлено за плоскость чертежа; туда же направим и единичную нормаль \vec{n} . Этим выбором определяется обход

витка катушки и знак коэффициента взаимной индукции. Имеем:
 $\vec{B}(x) \cdot \vec{n} = B(x)$; поток через заштрихованный квадрат:

$$\Phi = \int B(x) dS = \int_0^{2a} dy \int_{r-a}^{r+a} dx (\mu_0 I / 2\pi x) = (\mu_0 I / 2\pi) 2a (\ln x) \Big|_{r-a}^{r+a} = (\mu_0 I a / \pi) \ln \frac{r+a}{r-a}$$

(мы подставили $B(x)$ из (5.6)). Для катушки с плотной намоткой полный магнитный поток ψ через охватываемую ее витками поверхность с хорошей точностью равен $N\Phi$, где N – число витков. Таким образом,

$$\psi = (\mu_0 / \pi) a N I \ln \frac{r+a}{r-a} \quad (5.7)$$

(поток ψ обычно называют *потокосцеплением* катушки). Сравнивая (5.7) с (5.4), находим, что

$$L_{12} = (\mu_0 / \pi) a N \ln \frac{r+a}{r-a}. \quad (5.8)$$

Начиная с (5.8), будем условно считать проводник АВ (рамку) проводником 1, а катушку – проводником 2. Предлагаем самостоятельно показать, что индуктивность катушки, изображенной на рис. 5.5,

$$L_2 = N L_{21}. \quad (5.9)$$

Докажите также, что для тонкой катушки ($a \ll r$) имеем обычный результат:

$$L_2 \approx \mu_0 N^2 S / l, \quad (5.10)$$

где $S = 4a^2$, $l = 2\pi r$. Отметим ещё, что вычисление самоиндукции линейного проводника представляет собой трудную задачу. Нельзя, например, применить формулу (5.5), отождествив в ней l_1 и l_2 , – интеграл (5.5) окажется логарифмически расходящимся. Обычно используются энергетические соображения. Приведем здесь одну общую приближенную формулу:

$$L_1 \approx (\mu_0 / 2\pi) l \ln \frac{l}{a}. \quad (5.11)$$

Здесь l – полная длина провода, a – его радиус. Выражение (5.11) имеет логарифмическую точность. Оно применимо не только при больших отношениях l/a , но, дополнительно, и при больших $\ln \frac{l}{a}$. Упомянем, наконец, и о том, что

наряду с обозначением L_{21} почти столь же широкое распространение имеет и обозначение M_{21} .

Вернёмся теперь к явлению электромагнитной индукции, описываемому уравнением (5.2). В правой части (5.2) стоит производная по времени от изменяющегося магнитного потока. В то же время, формулы (5.4) пригодны лишь для случая постоянного поля. Таким образом, возникает вопрос: при каких условиях можно всё-таки подставлять (5.4) в (5.2) и, далее, записывать, к примеру,

«обычный» закон Ома? Ответ состоит в том, что *поля* и *токи* должны быть *квазистационарными*. *Переменные токи называются ква-зистационарными, если магнитное поле этих токов в каждый данный момент времени практически такое же, как магнитное поле постоянных токов той же силы, что и мгновенная сила переменных токов*. Первое из условий квазистационарности состоит в следующем. Пусть, например, ток в проводнике 1 изменился. Проводник 2 "почувствует" это не сразу, а через промежуток времени $\sim \ell / c$, где ℓ – размер установки; c – скорость света. Если ток меняется с циклической частотой ω , то в случае, когда

$$2\pi/\omega \gg \ell/c, \quad \omega \ll 2\pi c/\ell, \quad (5.12)$$

он просто не успевает сколько-нибудь измениться за время ℓ/c . Поле в окрестности второго проводника окажется соответствующим значению тока в тот же момент. Одного условия (5.12) ещё, однако, мало для квазистационарности. Дело в том, что в переменном электромагнитном поле в правой части второго уравнения (3) появляется дополнительный член – ток смещения $\partial \vec{D} / \partial t$ (\vec{D} – электрическая индукция). Ясно, что квазистационарность невозможна, если током смещения нельзя пренебречь. Сделаем небольшое замечание. Пусть физическая величина A изменяется по гармоническому закону: $A = A_0 \sin \omega t$. Известно, что характерное значение A есть A_0 : $A \sim A_0$. $dA/dt = \omega A_0 \cos \omega t$. Очевидно, $dA/dt \sim \omega A_0 \sim \omega A$. Напишем теперь для внутренних точек проводников известные соотношения:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (5.13)$$

Первое из равенств (5.13) – закон Ома в дифференциальной форме (σ – статическая проводимость); $\varepsilon \sim \varepsilon_0$. Имеем: $j \sim \sigma E$, $\partial D / \partial t \sim \varepsilon_0 \omega E$. Таким образом, надо потребовать, чтобы было

$$\sigma \gg \varepsilon_0 \omega; \quad \omega \ll \sigma / \varepsilon_0. \quad (5.14)$$

У металлов $\sigma \sim 10^7$ См/м, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м (См = 1/Ом – сименс). Более сложным является вопрос о том, можно ли пренебречь током смещения в окружающей проводники с током диэлектрической среде (здесь $\vec{j} = 0$). В большинстве технически интересных случаев это допустимо, если проводники образуют замкнутую цепь (сюда же относятся и цепи с конденсаторами — мы не делаем различия между токами проводимости в проводах и током смещения в конденсаторе). Иное дело — разомкнутый проводник (антенна). Здесь ни о каком полном замкнутом токе говорить не приходится; одновременно нельзя пренебрегать и током смещения.

При записи закона Ома (5.13) мы не случайно подчёркиваем, что σ – статическая проводимость. Если это не так, мгновенным значениям внешних ЭДС будут соответствовать иные распределения \vec{j} (и \vec{H}), чем равным им по величине значениям постоянных ЭДС. Сохранение (5.13) возможно лишь при

условии, когда период изменения поля велик по сравнению с временами, характерными для микроскопического механизма проводимости. Другими словами, если τ – время свободного пробега электронов, то должно быть:

$$2\pi/\omega \gg \tau; \quad \omega \ll 2\pi/\tau. \quad (5.15)$$

Советуем произвести оценки допустимых ω с помощью неравенств (5.12), (5.13) и (5.15). В (5.12) $l \sim 1\lambda$. В соотношении (5.15) τ можно оценить (для металлов), исходя из формулы Друде:

$$\sigma = ne^2 \tau/m.$$

Здесь e и m – заряд и масса электрона, концентрация электронов $n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Заметим, что при увеличении частоты даже выполнение условия (5.15) не гарантирует установления того распределения плотности тока \vec{j} , какое имеет место в статическом случае. Дело заключается в наличии *скин-эффекта* (skin в переводе с английского означает "кожа"). Явление состоит в том, что переменный ток (и соответствующие поля) концентрируется вблизи поверхности проводника. Глубина проникновения полей в проводник называется толщиной скин-слоя:

$$\delta \sim \sqrt{2/\sigma\mu_0\omega}. \quad (5.16)$$

Если a – радиус цилиндрического проводника, то скин-эффектом можно пренебречь, когда

$$\delta \gg a. \quad (5.17)$$

При невыполнении (5.17) омическое сопротивление проводника становится больше статического значения R , а индуктивность – меньше статической L .

Для нашей лабораторной установки условия (5.12), (5.14), (5.15) и (5.17) справедливы с большим запасом. Включим в цепь 1 (см. рис. 5.4) внешнюю гармоническую ЭДС – ε , а в цепь 2 – милливольтметр mV . Пусть R_1 и R_2 – сопротивления цепей. Тогда, применяя закон Ома и подставляя выражения (5.4) в формулу (5.2), получим:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varepsilon - L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2, \\ I_2 R_2 = -L_2 \dot{I}_2 - L_{21} \dot{I}_1. \end{cases} \quad (5.18)$$

Точка над буквой, как всегда, обозначает производную d/dt ; коэффициенты индукции не дифференцируются, так как форма и размеры проводников не изменяются в ходе опыта. Пусть частота внешней ЭДС равна ω . Тогда токи I_1 и I_2 также будут гармоническими функциями той же частоты. Имеем: $\dot{I}_1 \sim \omega I_1$, $\dot{I}_2 \sim \omega I_2$. Потребуем, чтобы выполнялись неравенства:

$$\omega L_1 \ll R_1; \quad \omega L_2 \ll R_2. \quad (5.19)$$

Первому из соотношений (5.19) легко удовлетворить из-за малости L_1 (см. (5.11)), а второму – из-за большой величины R_2 . Принимая во внимание (5.19), уравнения (5.18) можно упростить:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varepsilon - L_{12} \dot{I}_2, \\ I_2 R_2 = -L_{21} \dot{I}_1. \end{cases} \quad (5.20)$$

Очевидно, $I_2 \approx \omega L_{21} I_1 / R_2$; $L_{12} \dot{I}_2 \approx L_{12} \omega I_2 \approx (\omega L_{12})^2 I_1 / R_2$.

Оказывается, что вследствие (5.19)

$$R_1 \gg (\omega L_{12})^2 / R_2. \quad (5.21)$$

В самом деле, (5.21) эквивалентно неравенству: $(\omega L_{12})^2 \ll R_1 R_2$. Если же перемножить неравенства (5.19), то получим: $\omega^2 L_1 L_2 \ll R_1 R_2$. Известно, что $L_{12}^2 \leq L_1 L_2$ (это следует из условия положительности энергии магнитного поля). Таким образом, $(\omega L_{12})^2 \leq \omega^2 L_1 L_2 \ll R_1 R_2$, что и требуется. Теперь, исходя из (5.21), вместо (5.20) имеем:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varepsilon, \\ I_2 R_2 = -L_{21} \dot{I}_1. \end{cases} \quad (5.22)$$

Применим уравнения (5.22) к лабораторной схеме, изображённой на рис. 5.6:

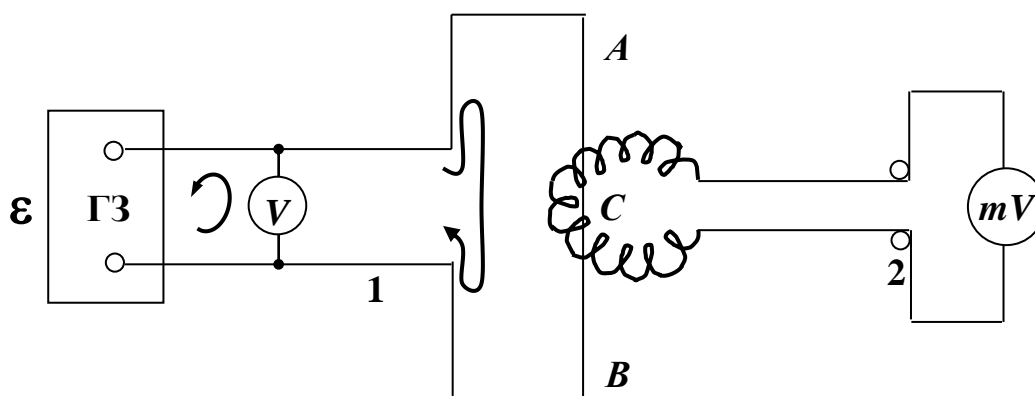


Рис. 5.6

Цепь 1 состоит из звукового генератора ГЗ типа ГЗ-3 и прямолинейного проводника АВ (рамки). К выходу ГЗ подключён вольтметр переменного тока V (щитовой). В цепи 2 C – тороидальная катушка, mV – милливольтметр ВЗ-38А. Сейчас нам важно уяснить, что показывает вольтметр. Большинство электроизмерительных приборов реагирует на протекающий через них ток. Если

ток постоянный, то исправный вольтметр показывает падение напряжения на самом себе : $U = I_V R_V$ (I_V и R_V — ток через вольтметр и его сопротивление). Сопротивление R_V должно быть большим. При этом в случае параллельного подключения (как у вольтметра V в цепи I рис. 5.6) прибор не возмущает исходное распределение токов. В то же время, применяя закон Кирхгофа к контурам, направление обхода которых показано на рис. 5.6, имеем:

$$\mathcal{E} = I_V R_V; I_V R_V = I_1 R_{AB}.$$

Здесь \mathcal{E} — ЭДС генератора, I_1 — ток в рамке AB , R_{AB} — сопротивление рамки. Таким образом,

$$I_1 = U/R_{AB}.$$

Пусть U_i ($i=1,2$ — см. далее) — показание милливольтметра mV в цепи 2. Как видно из рис. 5.6, здесь вольтметр и катушка C соединены последовательно. Если R_C и R_{mV} — сопротивления катушки и милливольтметра, то по закону Ома ($R_2 = R_C + R_{mV}$),

$$I_2 (R_C + R_{mV}) = \mathcal{E}_{ind}$$

(мы отвлекаемся от того обстоятельства, что ЭДС индукции \mathcal{E}_{ind} не существует в статическом случае). При условии $R_{mV} \gg R_C$ $I_2 R_{mV} \equiv U_i = \mathcal{E}_{ind}$.

Когда речь идет о вольтметрах переменного тока, то имеют в виду синусоидальные токи. Написанные ранее соотношения справедливы и для них. Надо лишь вместо значений постоянных величин взять **действующие** (эффективные) значения гармонических величин (они в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудных). Конкретно, пусть

$$I_1 = I_0 \sin \omega t.$$

Тогда имеем:

$$I_0 / \sqrt{2} = U / R_{AB}.$$

Рамка AB свита из n параллельных проводников сопротивлением R : $R_{AB} = R/n$.

Таким образом, амплитуда тока в цепи I

$$I_0 = \sqrt{2} U n / R, \tag{5.23}$$

где U — показание вольтметра V . Далее, $\dot{I}_1 = I_0 \omega \cos \omega t$. Тогда второе уравнение (5.22) для мгновенных значений токов даёт ($R_2 \approx R_{mV}$):

$$I_2 R_{mV} = -L_{21} \omega I_0 \cos \omega t,$$

здесь $L_{21} \omega I_0$ — амплитуда ЭДС в цепи 2. Поскольку милливольтметр mV даёт действующее значение ЭДС индукции, то

$$U_i = L_{21}^{(i)} \omega I_0 / \sqrt{2}, \quad (5.24)$$

где U_i – показание милливольтметра при подключении i -й катушки, ($i=1$ – *большой тороид*, $i=2$ – *малый тороид*); $L_{12}^{(i)}$ – коэффициент взаимной индукции i -го тороида и рамки. Знак $L_{12}^{(i)}$ по определению выбран положительным. Введём частоту тока f (число полных колебаний тока в секунду):

$$\omega = 2\pi f. \quad (5.25)$$

Тогда, объединяя (5.23), (5.24) и (5.25), получим :

$$L_{21}^{(i)} = U_i R / 2\pi n U f. \quad (5.26)$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Собрать электрическую схему, изображённую на рис. 5.6. Напряжение на вольтметре V должно быть 2,4 В.
2. Полагая частоту звукового генератора $f = 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ; 120$ Гц, записывать показания милливольтметра mV , присоединённого к большой тороидальной катушке ($i=1$). **Предел измерения милливольтметра установить на 100 мВ.** Ток в рамке АВ поддерживать постоянным.
3. Рассчитать по формуле (5.26) коэффициент взаимной индукции $L_{21}^{(1)}$ для всех значений частоты. Найти среднее значение $\langle L_{21}^{(1)} \rangle$. Результаты вычислений и измерений занести в таблицу:

Номер измерения	f , Гц	U_1 , мВ	$L_{21}^{(1)}$, Гн	U_2 , мВ	$L_{21}^{(2)}$, Гн
		Большой тороид		Малый тороид	
1	20				
2	40				
3	60
4	80				
5	100				
6	120				

$$\langle L_{21}^{(1)} \rangle = \dots \qquad \langle L_{21}^{(2)} \rangle = \dots$$

$$U = 2,4 \text{ В}; R = 12 \text{ Ом}; n = 100.$$

4. Произвести измерения и расчёты по пунктам 2 и 3 с катушкой 2 (малый тороид). **Предел измерения милливольтметра установить на 30 мВ. Перед отключением большого тороида выключить Милли-**

вольтметр. Присоединить милливольтметр к малому тороиду. Только после этого включить его.

5. Построить зависимость действующего значения ЭДС индукции в катушке от частоты f : $U_i(f)$ ($i=1,2$).
6. Рассчитать по формуле (5.8) теоретические значения коэффициентов взаимной индукции и сравнить их с экспериментальными. Геометрические размеры тороидальных катушек указаны на стенде.

Данные стенда:

Большой тороид
 $r = 21$ мм,
 $a = 12$ мм,
 $N = 800$ витков.

Малый тороид
 $r = 15$ мм,
 $a = 5,5$ мм,
 $N = 500$ витков.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Правило Ленца.
2. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции. Индуктивность контура.
3. Явление взаимной индукции. ЭДС взаимной индукции. Взаимная индуктивность двух контуров.
4. Считая, что ток через один круговой контур возрастает, укажите направление индукционного тока в связанном с ним другом круговом контуре.
5. Выведите формулу (индукции) магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым током.
6. Формула взаимной индуктивности прямоугольного проводника и охватывающей его тороидальной катушки – (5.8).
7. Вывод расчетной формулы (5.26).
8. Каков физический смысл индуктивности и взаимной индуктивности двух контуров. От чего они зависят? Единица измерения индуктивности.
9. Цель и порядок выполнения работы.
10. Объясните характер зависимости ЭДС взаимной индукции от частоты тока.

ГЛАВА 6

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА И ИЗМЕРЕНИЕ ЕГО ДОБРОТНОСТИ

Лабораторная работа 2–6

Цель работы: Исследование колебательного контура и определение его характеристик.

Приборы и принадлежности:

1. Колебательный контур.
2. Автоматический переключатель, позволяющий периодически заряжать конденсатор колебательного контура.
3. Источник ЭДС.
4. Магазин сопротивлений.
5. Электронный осциллограф.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим простейшую электрическую цепь переменного тока – *колебательный контур*, в который включена внешняя ЭДС. Схема цепи показана на рис. 6.1. Здесь:

$\varepsilon(t)$ – источник ЭДС;

R – активное сопротивление, включенное на участке 1–2;

C – конденсатор;

L – катушка индуктивности

(ε , R , C , L одновременно используются для обозначения параметров соответствующих элементов – мгновенной ЭДС, величины сопротивления, емкости конденсатора и индуктивности катушки).

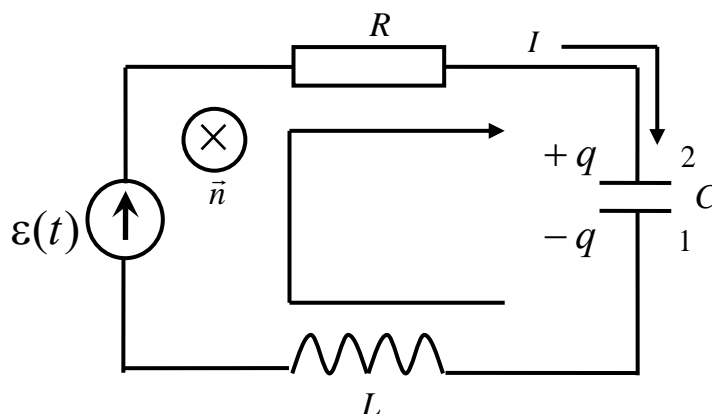


Рис. 6.1

Если функция $\varepsilon(t)$ не содержит гармоник высокой частоты, процессы, происходящие в цепи на рис. 6.1, могут быть исследованы в рамках *квазистационарного приближения*. При этом, как и в цепях постоянного тока, зададимся произвольным направлением обхода нашего контура (от точки 1 к

точке 2 по часовой стрелке) и направлением тока I (у нас оба направления совпадают, хотя это и не обязательно). К участку $1 \in 2$ применим обычный закон Ома:

$$IR = U + \varepsilon. \quad (6.1)$$

В уравнении (6.1) U – напряжение между точками 1 и 2; оно представляет собой линейный интеграл напряженности электрического поля, взятый по осевой линии проводников (последние предполагаются квазилинейными). Отметим, что если ток постоянный, то $U = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – (однозначные) потенциалы точек 1 и 2. ЭДС ε действует в направлении обхода (правило знаков такое же, как для постоянных токов).

Отдельного рассмотрения требует участок цепи $2C1$, содержащий конденсатор. Предположение о квазистационарности включает в себя, в частности, допущение, согласно которому напряженность электрического поля внутри и вблизи конденсатора находится в той же зависимости от мгновенной величины его заряда, как и в статическом случае. Другими словами, линейный интеграл напряженности \vec{E} , взятый между обкладками внутри конденсатора,

$$\int_{2C1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{C}. \quad (6.2)$$

Здесь q – заряд обкладки 2. Складывая левую часть (6.1) с правой частью (6.2) и наоборот, получим

$$IR + \frac{q}{C} = \varepsilon + \int_{1 \in 2C1} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (6.3)$$

Интеграл в правой части (6.3), согласно одному из уравнений Максвелла, равен $(-d\Phi/dt)$, где Φ – поток магнитной индукции через поверхность, натянутую на контур, в направлении единичной нормали \vec{n} . Известно, что $\Phi = LI$ ($L > 0$). Поскольку контур у нас жесткий, $dL/dt = 0$ и $d\Phi/dt = LdI/dt$. Таким образом, соотношение (6.3) принимает вид:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon(t). \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) содержит две неизвестные функции $I(t)$ и $q(t)$. Они, однако, не являются независимыми. Так как предполагается, что стекания заряда наружу не происходит, должно, очевидно, выполняться условие:

$$\frac{dq}{dt} = I. \quad (6.5)$$

Если ввести напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C}, \quad (6.6)$$

то уравнения (6.4) и (6.5) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} + RI + U_c = \varepsilon(t), \\ \frac{dU_c}{dt} = I / C. \end{cases} \quad (6.7)$$

Далее будем рассматривать *свободный* колебательный контур, в котором

$$\varepsilon(t) \equiv 0. \quad (6.8)$$

Подставляя I из второго уравнения (6.7) в первое уравнение, получим

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0. \quad (6.9)$$

Опуская для упрощения обозначений нижний индекс c , уравнение (6.9) перепишем в форме:

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U = 0. \quad (6.10)$$

Здесь

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad \delta = R/2L, \quad (6.11)$$

точка над буквой соответствует взятию производной по времени t .

Равенство (6.10) есть обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $U(t)$, а более точно – линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение может быть найдено без труда с помощью методов, изучаемых в курсе высшей математики. Здесь мы лишь выпишем так называемое характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6.12)$$

Оно представляет собой квадратное уравнение относительно λ . Запишем решение (6.12) в форме $\lambda = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ($\sqrt{\quad}$ обозначает оба значения квадратного корня). Наибольший интерес для нас представляет случай $\delta < \omega_0$. При этом λ комплексно и имеет вид

$$\lambda = -\delta \pm i\omega, \quad (6.13)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (6.14)$$

(радикал в правой части (6.14) арифметический).

Общее решение дифференциального уравнения (6.10) целиком определяется параметрами (6.13):

$$U = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.15)$$

Здесь A_0 и φ_0 – произвольные независимые постоянные (можно считать, что $A_0 > 0$). График функции (6.15) – $U(t)$ – можно построить, рассматривая правую часть (6.15) как произведение двух функций – простой гармонике $\cos(\omega t + \varphi_0)$ и мгновенного значения амплитуды, определяемого соотношением

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}. \quad (6.16)$$

График зависимости (6.15) имеет вид, показанный на рис. 6.2.

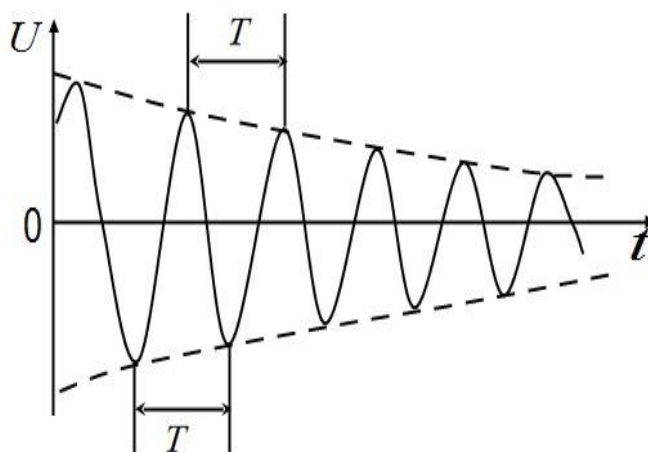


Рис. 6.2

Пунктиром проведены огибающие, одна из которых построена по уравнению (6.16), а другая является ее зеркальным отражением относительно оси t . Промежуток времени

$$T = 2\pi / \omega, \quad (6.17)$$

разделяющий два соседних максимума или минимума $U(t)$, сохраняет постоянное значение (докажите это). Он называется **условным периодом**. Само решение (6.15), представленное на рис. 6.2, является примером **затухающих колебаний**. Нетрудно убедиться в том, что и сила тока $I = C\dot{U}$ также может быть записана в форме, подобной (6.15).

Если бы параметр δ был равен нулю ($R=0$), то решение (6.15) оказалось бы просто гармоническими (незатухающими) колебаниями частоты $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и соответственно периода $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ (формула Томсона). Величина δ , определяющая скорость убывания амплитуды колебаний, называется **коэффициентом затухания**. В качестве характерного времени затухания τ может быть принято время, за которое начальная амплитуда уменьшается в e раз:

$$A_0 e^{-\delta\tau} = A_0 / e, \quad \tau = 1/\delta. \quad (6.18)$$

Введем отношение

$$\Delta = T / \tau \equiv \delta T. \quad (6.19)$$

Декремент затухания представляет собой отношение двух последовательных амплитуд колебаний, разделенных одним периодом:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T} = e^{\Delta}. \quad (6.20)$$

Поскольку параметр Δ есть, очевидно, натуральный логарифм декремента затухания, то Δ называют **логарифмическим декрементом затухания**. Наряду с введенными ранее величинами быстроту затухания колебаний характеризует также **добротность** контура:

$$D = \pi / \Delta. \quad (6.21)$$

Следует, однако, иметь в виду, что определение D посредством формулы (6.21) является несколько формальным. На самом деле добротность характеризует так называемые **резонансные свойства** колебательной системы (последние проявляются при отказе от выполнения условия (6.8)). В этом смысле (6.21) можно применять лишь в случае слабого затухания, когда

$$\delta \ll \omega_0, \quad \omega \approx \omega_0. \quad (6.22)$$

Имеем

$$D = \frac{\pi}{\delta T} \approx \frac{1}{2\delta} \omega_0 = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.23)$$

Условие (6.22) эквивалентно неравенству

$$R \ll 2\sqrt{L/C} \equiv R_{\text{кр}}. \quad (6.24)$$

Здесь $R_{\text{кр}}$ – **критическое сопротивление**; его физический смысл мы выясним ниже (величину $R_{\text{кр}}/2 = \sqrt{L/C} \equiv \rho$ обычно называют **характеристическим сопротивлением** контура).

Если $\delta \geq \omega_0$, т.е. сопротивление R достаточно велико ($R \geq R_{\text{кр}}$), частота ω , определяемая формулой (6.4), сначала обращается в нуль, а потом становится мнимой. Это означает, что при $R \geq R_{\text{кр}}$ решение дифференциального уравнения (6.10) уже нельзя записать в форме (6.15). Легко понять, что теперь корни характеристического уравнения (6.12) вещественны и отрицательны. Колебательный контур находится, как утверждают, в **апериодическом режиме** – разряд конденсатора не имеет даже приближенно колебательного характера.

Наглядное представление об электромагнитных колебаниях в контуре можно получить, рассматривая его **фазовую плоскость**. По оси абсцисс фазовой плоскости откладываем, например, значение U , а по оси ординат – силу тока I (т.е. $C\dot{U}$). Каждой точке плоскости соответствует определенное физическое состояние нашей системы. При изменении состояния со временем изображающая точка движется по фазовой плоскости, описывая кривую – фазовую траекторию. Совокупность всех фазовых траекторий образует **фазовый портрет** системы, по виду которого можно судить о возможных видах движений системы.

Найдем для примера фазовые траектории *идеального* контура ($R=0$). В равенстве (6.15) полагаем $\delta = 0$, $\omega = \omega_0$. Тогда

$$\begin{aligned} U &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ I &= -CA_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Нам нужно исключить время из уравнений (6.25). Проще всего возвести их в квадрат –

$$U^2 / A_0^2 = \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad I^2 / (\omega_0 CA_0)^2 = \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

а затем сложить. Получим

$$\frac{U^2}{A_0^2} + \frac{I^2}{(\omega_0 CA_0)^2} = 1. \quad (6.26)$$

Соотношение (6.26) – уравнение эллипса в плоскости (U, I) с полуосями A_0 и $\omega_0 CA_0$. Поскольку A_0 произвольно (оно вместе с φ_0 определяется начальными условиями $U|_{t=0}$ и $I|_{t=0}$), на самом деле имеется *семейство* эллипсов, которое покрывает фазовую плоскость. Эти эллипсы и являются фазовыми траекториями идеального контура (рис. 6.3).

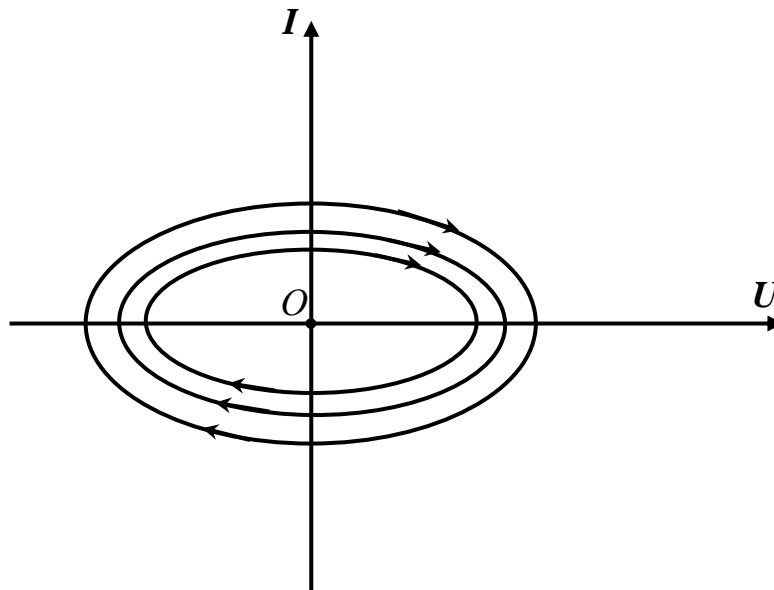


Рис. 6.3

На каждом эллипсе указано направление движения изображающей точки (поскольку $\dot{U} = I/C$, в верхней полуплоскости, где $I > 0$, точка должна двигаться направо).

При учете сопротивления, когда контур находится в режиме затухающих колебаний, как нетрудно сообразить, эллипсы превращаются в спирали. Одна из них схематически изображена на рис. 6.4.

Двигаясь по любой из таких спиралей, изображающая точка будет асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к началу координат O , т.е. к состоянию покоя.

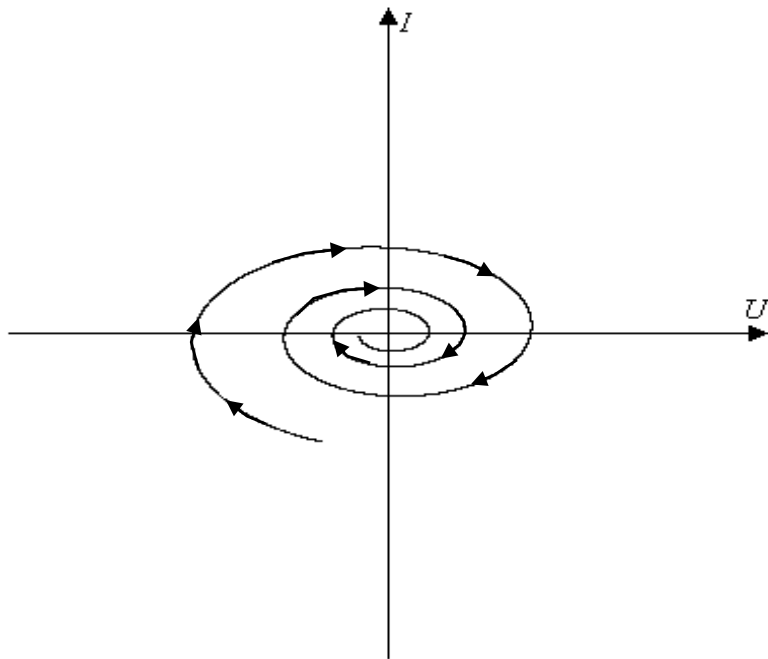


Рис. 6.4

Следует отметить, что плоскость (U, I) не является в строгом смысле фазовой. У нас выполнено лишь одно условие: ток I пропорционален \dot{U} . Нужно еще, однако, чтобы используемые величины были *канонически сопряженными*. Примером таких переменных служат, в частности, U и LCI . Переход к «настоящей» фазовой плоскости не меняет качественно фазового портрета, а сопровождается лишь растяжением – сжатием траекторий вдоль осей. Таким образом, для наших целей подходит любая плоскость типа (U, KI) , где K – какая-то постоянная. Можно, конечно, и сами оси U, I поменять местами.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

В работе применяется автоматический переключатель, позволяющий осуществлять переключение конденсатора с источника ЭДС на контур с частотой используемого тока, т.е. 50 раз в секунду. Схема переключателя приведена на рис. 6.5.

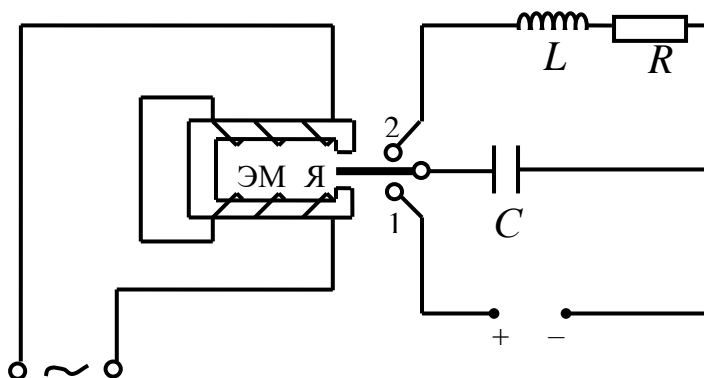
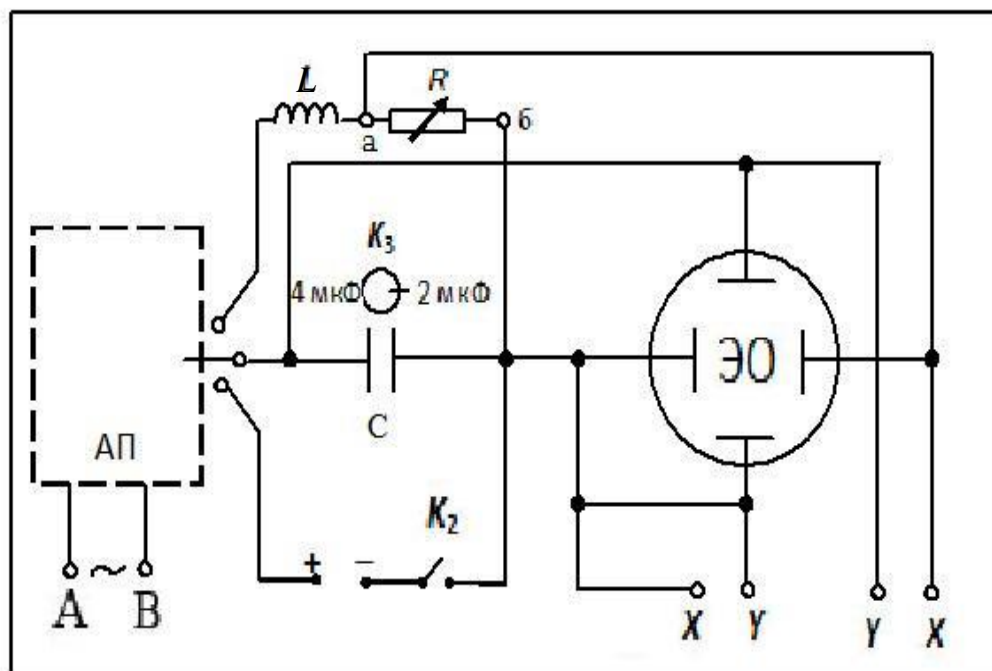


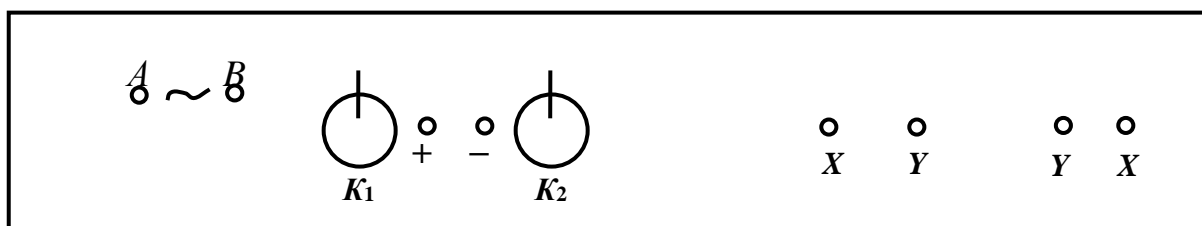
Рис. 6.5

Здесь ЭМ – электромагнит, питаемый переменным током; Я – якорь, расположенный между полюсами электромагнита. В нижнем положении якорь соприкасается с контактом 1, замыкая цепь источника ЭДС, что приводит к зарядке конденсатора; в верхнем положении якорь касается контакта 2, замыкая собственно колебательный контур – при этом конденсатор C разряжается через индуктивность L и сопротивление R . Отметим, что переключатель является, в сущности, электрическим *реле*, в котором якорь, намагничиваясь в поле электромагнита, поочередно притягивается к его полюсам.

В нашей лабораторной установке автоматический переключатель и колебательный контур собраны в одном блоке. На рис. 6.6, а изображена верхняя панель этого устройства, одновременно представляющая схему, используемую в лабораторной работе; на рис. 6.6, б – его передняя панель. Здесь АП – автоматический переключатель см. рис. 6.5), ЭО – электронный осциллограф, K_1 , K_2 , K_3 – тумблеры. Стрелка на сопротивлении показывает, что его можно изменять, подключая к клеммам a , b магазин сопротивлений (собственное сопротивление контура равно 8 Ом). Проводники, перекрещивающиеся на рис. 6.6, а, соединены, если их пересечение отмечено точкой.



а)



б)

Рис. 6.6

Основной элемент электронного осциллографа – электронно-лучевая трубка. Она представляет собой вакуумный прибор, накаливаемый катод которого испускает электроны. Далее электроны разгоняются и фокусируются в тонкий пучок. Широкое плоское дно трубки – экран – покрыто флуоресцирующим веществом. В результате на экране в том месте, куда бьет электронный луч, образуется светлое пятнышко. Электроны проходят на своем пути к экрану между двумя парами управляющих пластин – вертикально отклоняющих (Y -пластины) и горизонтально отклоняющих (X -пластины). Если между пластинами имеется разность потенциалов, то возникающее электрическое поле вызывает отклонение пучка в соответствующем направлении. Смещение светлого пятна на экране пропорционально, как показывает расчет, разности потенциалов. В общем случае смещение конца луча будет суперпозицией вертикального и горизонтального отклонений.

Важнейшим свойством электронов является их исключительно малая инертность (масса электронов в тысячи раз меньше масс атомов). Поэтому электронный пучок реагирует на *мгновенные* значения разностей потенциалов отклоняющих пластин. Подадим, например, на Y -пластины синусоидально изменяющуюся разность потенциалов (напряжение). Светлое пятно на экране будет совершать колебания. Вследствие световой инерции (послесвечения) экрана и способности глаза сохранять некоторое время световое восприятие мы увидим на экране неподвижную вертикальную линию. Обычно на X -пластины от специального генератора развертки, находящегося внутри осциллографа, подается *пилообразное напряжение*. Это напряжение в течение времени t_1 линейно возрастает, а затем за время $t_2 \ll t_1$ почти мгновенно падает до исходного значения. Светлое пятно на экране при наличии развертки будет равномерно перемещаться в горизонтальном направлении и, далее, быстро возвращаться в начальное положение. Если нам нужно изучить периодический (или квазипериодический) сигнал периода T , мы подаем его на Y -пластины. Тогда, при условии, что сумма $t_1 + t_2$ равна или кратна T , на экране возникает “остановившееся” изображение сигнала, “развернутого во времени”. Отметим, что кривая зависимости какой-нибудь величины от времени в физике очень часто называется *осциллограммой*.

Перед выполнением работы необходимо под руководством лаборанта внимательно ознакомиться с используемым осциллографом.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Первое задание

Получение на экране осциллографа осциллограммы напряжения на конденсаторе колебательного контура и определение периода колебаний.

Для сборки соответствующей схемы выполняют следующие операции.

К клеммам A , B (рис. 6.6, b) подключают переменное напряжение, снимаемое с блока питания ВС-24 м. Напряжение должно составлять около 16 В.

К клеммам $+$, $-$ присоединяют источник постоянной ЭДС.

К клеммам a , b (рис. 6.6, a) подключают магазин сопротивлений.

Клеммы “У” (рис. 6.6, б) соединяют с клеммами “вход У” и “З” (земля) электронного осциллографа.

Штепсельной вилкой подключают ЭО к сети переменного тока.

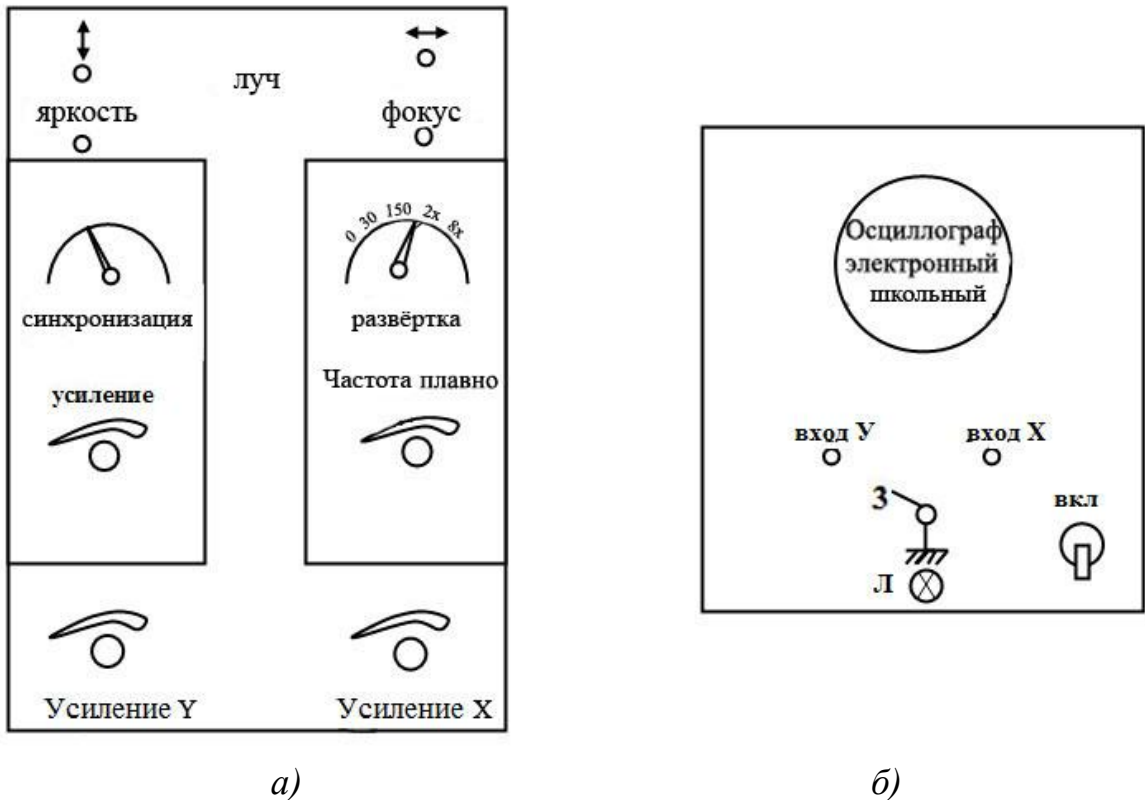


Рис. 6.7

Тумблером “вкл” (рис. 6.7, б) включают питание ЭО. При этом должна загореться сигнальная лампочка Л.

После этого тумблером K_1 (рис. 6.6, б) замыкают цепь питания автоматического переключателя, а тумблером K_2 – цепь зарядки конденсатора колебательного контура.

Для того чтобы кривая на экране осциллографа была неподвижной, необходимо подобрать нужное положение переключателя диапазонов развертки (на верхней панели ЭО) и плавного регулятора частоты.

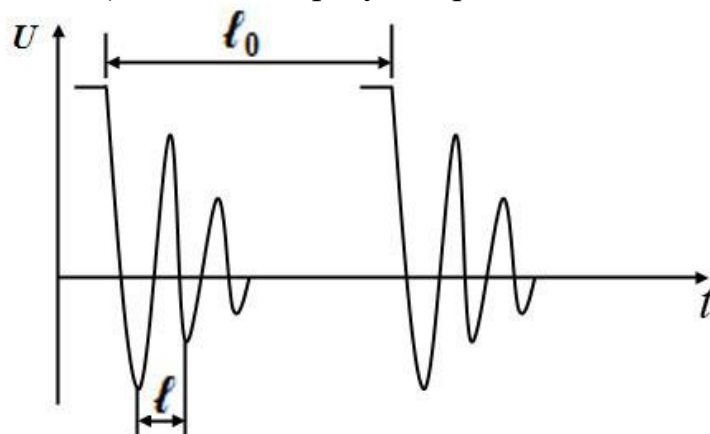


Рис. 6.8

Необходимый размер кривой, ее яркость и четкость обеспечиваются вращением ручки “усиление У” на верхней панели ЭО и четырех ручек около слова “луч” там же.

Располагая осциллограммой напряжения на конденсаторе колебательного контура, нетрудно вычислить условный период затухающих колебаний (рис. 6.8).

При использовании автоматического переключателя конденсатор заряжается 50 раз в секунду, т.е. промежуток времени от одного заряжения до следующего составляет $1/50 \text{ с} = 0,02 \text{ с}$.

Если длина той части временной развертки, на которой наблюдается процесс зарядки и разрядки конденсатора, равна ℓ_0 , а длина, на которой укладывается один период – ℓ , то

$$\frac{\ell}{\ell_0} = \frac{T}{0,02},$$

откуда

$$T = \frac{0,02\ell}{\ell_0}. \quad (6.27)$$

Для выполнения задания необходимо:

1. изменяя сопротивление контура и емкость конденсатора, получить на экране ЭО несколько (не меньше пяти) осциллограмм;
2. зарисовать их (прикладывая к экрану кальку) и для каждой из них вычислить по формуле (6.27) период колебаний. Значения ℓ и ℓ_0 определяются при помощи миллиметровой шкалы, нанесенной на экране осциллографа.

Рекомендуются следующие значения R : 8 Ом (при нуле на магазине сопротивлений), 25 Ом (на магазине 17 Ом) и 40 Ом (на магазине 32 Ом).

Результаты измерений заносятся в первые четыре столбца следующей таблицы:

1	2	3	4	5	6
Номер измерения	R (Ом)	C (мкФ)	T (с)	D	$1 / R\sqrt{C}$
1					
2					
3					
4					
5					
.					
.					

Остальные столбцы таблицы заполняются при выполнении второго задания.

Второе задание

Вычисление добротности колебательного контура и определение ее зависимости от параметров контура.

Для выполнения этого задания необходимо в формуле (6.23)

$$D = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

индуктивность L выразить через период колебаний T по формуле Томсона:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C};$$

$$D = \frac{T}{2\pi RC}. \quad (6.28)$$

Далее, используя величины R , C и T из таблицы, определяют значения добротности колебательного контура D и заносят их в пятый столбец таблицы.

Поскольку в используемой схеме величина L не изменяется, то, как показывает формула (6.23), добротность D пропорциональна $1/R\sqrt{C}$, т.е. график зависимости D от $1/R\sqrt{C}$ должен представлять собой прямую линию.

Вычислив значения $1/R\sqrt{C}$, заносят их в шестой столбец таблицы, после чего строят график

$$D = f\left(\frac{1}{R\sqrt{C}}\right).$$

Третье задание

Получение на экране осциллографа фазовой траектории колебательного контура.

Используемая здесь схема отличается от схемы для выполнения первого задания только тем, что теперь клеммы “Х” (рис. 6.6, б) соединяются с клеммами “Х” и “З” осциллографа (как видно из схемы, приведенной на рис. 6.6, а, достаточно соединить правую клемму “Х” с клеммой “Х” ЭО).

Переключатель диапазонов развертки (на верхней панели) устанавливают в положение “выкл”, отключая тем самым генератор пилообразного напряжения. При этом на горизонтально отклоняющие пластины подается напряжение, имеющееся на сопротивлении, т.е. пропорциональное силе тока, текущего в колебательном контуре; на пластины же, вертикально отклоняющие луч, подается напряжение, имеющееся на конденсаторе. В результате на экране должна появиться фазовая траектория.

Добившись получения четкой фазовой траектории, зарисовывают её, приложив кальку к экрану.

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Что такое колебательный контур? Какие величины, характеризующие состояние колебательного контура, изменяются при происходящих в контуре колебаниях?
2. Как изменяется со временем какая-либо из величин, характеризующих состояние контура (например, заряд на конденсаторе), если контур не обладает активным сопротивлением? Напишите закон колебаний и объясните

- смысл входящих в него величин. Как зависит период этих колебаний от параметров контура? Как называются такие колебания?
3. Что такое осциллограмма? Постройте ее для колебаний контура без сопротивления. Какие постоянные, характеризующие данное колебание, можно определить по осциллограмме?
 4. При каком условии контур с сопротивлением будет находиться в колебательном, апериодическом режиме? Напишите решение уравнения (6.10) при $\delta = \omega_0$ и $\delta > \omega_0$.
 5. Напишите закон, по которому изменяется со временем какая-либо из величин, характеризующих состояние контура, если контур обладает сопротивлением и находится в колебательном режиме. Постройте осциллограмму.
 6. Что такое коэффициент затухания? Как он зависит от параметров контура? Как меняется осциллограмма колебаний при изменении коэффициента затухания?
 7. Что такое логарифмический декремент затухания? Что такое добротность колебательной системы?
 8. Что такое фазовая плоскость и фазовая кривая? Какова форма фазовой кривой при незатухающих колебаниях, при затухающих колебаниях?

ВОПРОСЫ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Как устроен электронный осциллограф?
2. Как при помощи электронного осциллографа получить осциллограмму какого-либо переменного напряжения?
3. Как при помощи электронного осциллографа получить фазовые траектории колебательного контура? Нарисуйте используемую схему.

ГЛАВА 7

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГИСТЕРЕЗИСА В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Лабораторная работа 2–7

Цель работы: изучение намагничивания ферромагнетиков во внешнем переменном магнитном поле, экспериментальное получение петли гистерезиса, измерение значений остаточной индукции и коэрцитивной силы ферромагнетика.

Приборы и принадлежности:

1. Функциональный генератор.
2. Осциллограф.
3. Тороид из ферромагнитного материала.
4. Катушка К1, создающая в тороиде переменное магнитное поле.
5. Измерительная катушка К2.
6. Сопротивления $r_0=10$ Ом и $R_1=10$ кОм.
7. Конденсатор $C_3=68$ нФ.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В магнитном отношении все вещества можно разделить на слабомагнитные (парамагнетики и диамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики). Пара- и диамагнетики в отсутствие магнитного поля не намагничены и характеризуются однозначной зависимостью намагниченности \vec{J} от напряженности \vec{H} :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (7.1)$$

где χ – магнитная восприимчивость (безразмерная величина), характерная для каждого данного магнетика.

Ферромагнетиками называют вещества (твердые), которые могут обладать спонтанной намагниченностью, т. е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. Типичные представители ферромагнетиков – железо, кобальт и многие их сплавы.

Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость $J(H)$ или $B(H)$. На рис. 7.1 приведена кривая намагничивания ферромагнетика, намагниченность которого при $H = 0$ тоже равна нулю. Ее называют **основной кривой намагничивания**. Уже при

сравнительно небольших значениях H намагниченность J достигает насыщения $J_{\text{нас}}$. Магнитная индукция $B = \mu_0(H + J)$ также растет с увеличением H , а после достижения состояния насыщения B продолжает расти с увеличением H по линейному закону: $B = \mu_0 H + \text{const}$, где $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$.

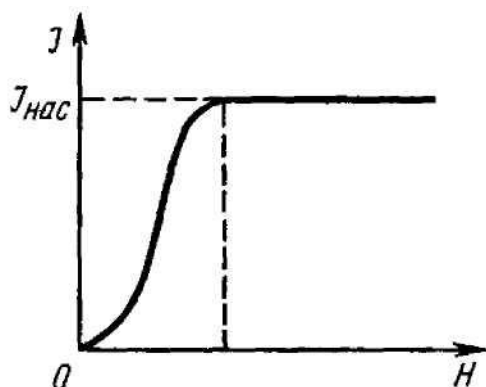


Рис. 7.1

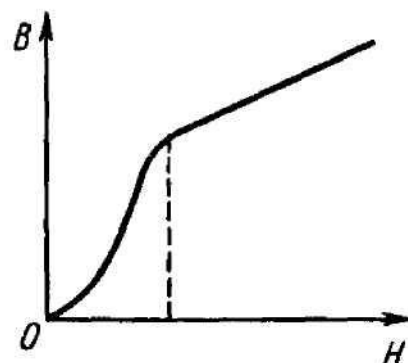


Рис. 7.2

На рис. 7.2 приведена основная кривая намагничивания на диаграмме $B - H$.

Ввиду нелинейной зависимости $B(H)$ для ферромагнетиков нельзя ввести магнитную проницаемость μ_r как определенную постоянную величину, характеризующую магнитные свойства каждого данного ферромагнетика. Однако по-прежнему считают, что $\mu_r = B/\mu_0 H$, при этом μ_r является функцией H (рис. 7.3). Магнитная проницаемость μ_{max} для ферромагнетиков может достигать очень больших значений. Так, например, для технического железа – 5000, для сплава пермаллой (78,5% Ni, остальное – Fe и примеси) – 100 000.

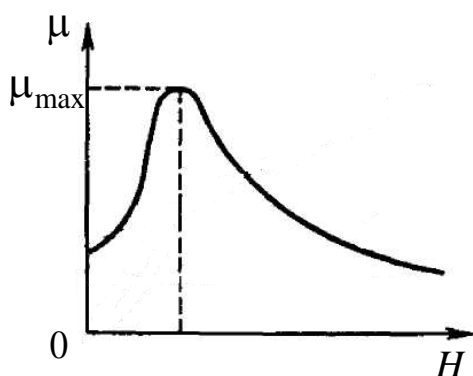


Рис. 7.3

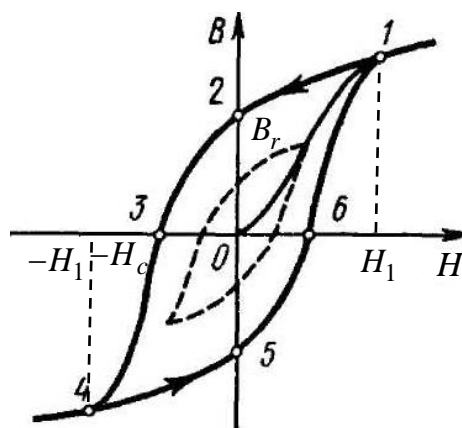


Рис. 7.4

Заметим, что понятие магнитной проницаемости применяют только к основной кривой намагничивания, так как зависимость $B(H)$ является неоднозначной (см. далее).

Кроме нелинейной зависимости $B(H)$ или $J(H)$ для ферромагнетиков характерно также явление *магнитного гистерезиса*: связь между B и H

или J и H оказывается неоднозначной, а определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика. Если первоначально ненамагниченный ферромагнетик намагничивать, увеличивая H от нуля до значения, при котором наступает насыщение (точка 1 на рис. 7.4), а затем уменьшать H от H_1 до $-H_1$, то кривая намагничивания $B(H)$ пойдет не по первоначальному пути 1-0, а выше – по пути 1234. Если дальше изменять H в обратном направлении от $-H_1$ до $+H_1$, то кривая намагничивания пройдет ниже – по пути 4561. Получившуюся замкнутую кривую называют *петлей гистерезиса*. В том случае, когда в точках 1 и 4 достигается насыщение, получается *максимальная петля гистерезиса*. Когда же в крайних точках насыщения нет, получаются аналогичные петли гистерезиса, но меньшего размера, как бы вписанные в максимальную петлю гистерезиса.

Из рис. 7.4 видно, что при $H = 0$ намагничивание не исчезает (точка 2) и характеризуется величиной B_r , называемой **остаточной индукцией**. Ей соответствует **остаточная намагниченность** J_r . С наличием такого остаточного намагничивания связано существование постоянных магнитов. Величина B обращается в нуль (точка 3) лишь под действием поля $-H_c$, имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Величина H_c называется **коэрцитивной силой**. Значения B_r и H_c для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. Для трансформаторного железа петля гистерезиса узкая (H_c мало), для ферромагнетиков, используемых при изготовлении постоянных магнитов, – широкая (H_c велико, например, для сплава альнико $H_c = 52000$ А/м, $B_r = 0,9$ Тл, альнико – 10% Al, 19% Ni, 18% Co, 3% Cu, 50% Fe).

На этих особенностях кривых намагничивания основан удобный практический прием для размагничивания ферромагнетика. Намагниченный образец помещают в катушку, по которой пропускают переменный ток и амплитуду его постепенно уменьшают до нуля. При этом ферромагнетик подвергается многократным циклическим перемагничиваниям, в которых петли гистерезиса постепенно уменьшаются, стягиваясь к точке О, где намагниченность равна нулю.

Опыт и теория показывают, что при перемагничивании ферромагнетик нагревается. При этом в единице объема ферромагнетика выделяется теплота \tilde{Q} , численно равная «площади» S_{Π} петли гистерезиса:

$$\tilde{Q} = \int H dB = S_{\Pi}. \quad (7.2)$$

При повышении температуры способность ферромагнетиков намагничиваться уменьшается, в частности, уменьшается намагниченность насыщения. При некоторой температуре, называемой **температурой** или **точкой Кюри**, ферромагнитные свойства исчезают. При температурах более высоких, чем температура Кюри, ферромагнетик превращается в парамагнетик.

Физическую природу ферромагнетизма удалось понять только с помощью квантовой механики. При определенных условиях в кристаллах могут возникать так называемые *обменные силы*, которые заставляют магнитные моменты электронов устанавливаться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного, т. е. самопроизвольного, намагничивания – эти области называют *доменами*. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Направления этих моментов для разных доменов различны, поэтому при отсутствии внешнего поля намагниченность образца равна нулю и образец в целом представляется макроскопически ненамагниченным.

При включении внешнего магнитного поля домены, ориентированные по полю, растут за счет доменов, ориентированных против поля. Такой рост в слабых полях имеет обратимый характер. В более сильных полях данный процесс является необратимым, что и служит причиной гистерезиса и существования остаточного намагничивания.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

В изотропном ферромагнетике, как уже отмечалось, индукция магнитного поля B связана с напряженностью магнитного поля H соотношением:

$$B = \mu_0 (J + H), \quad (7.3)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; J – модуль вектора намагничивания ферромагнетика. Следовательно, определив H и B в ферромагнетиках и используя формулу (7.3), можно найти зависимость намагниченности J ферромагнетика от напряженности магнитного поля H .

В настоящей работе для этой цели используется метод наблюдения петель гистерезиса ферромагнетика, помещенного в переменное магнитное поле. На рис. 7.5 показаны максимальная (сплошная линия) и одна частная (пунктирная линия) петли гистерезиса ферромагнитного образца. Вершины частных петель лежат на основной кривой намагничивания.

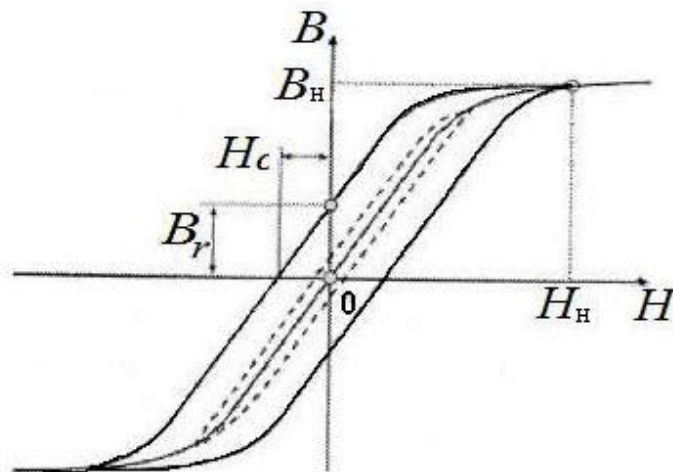


Рис. 7.5

Схема для исследования поведения ферромагнетиков в переменном магнитном поле приведена на рис. 7.6.

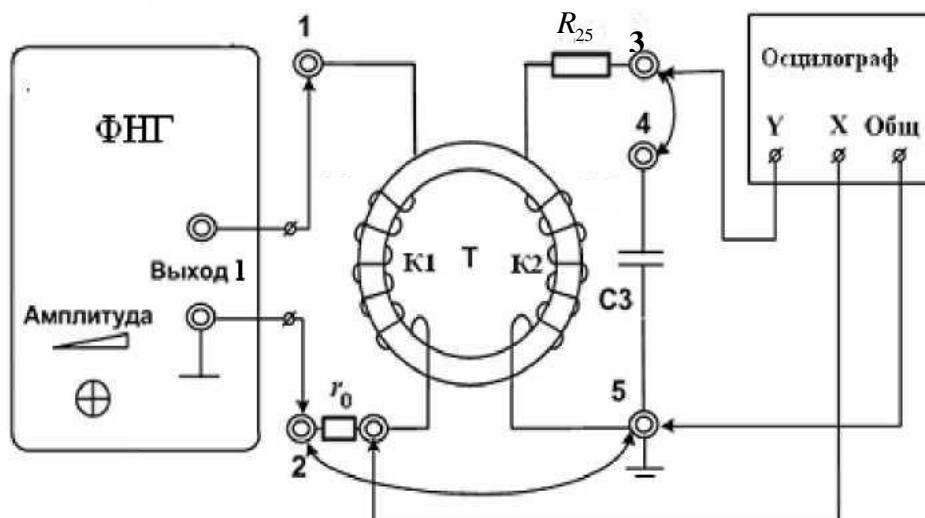


Рис. 7.6

На тороид T из ферромагнитного материала намотана катушка K_1 , создающая в ферромагнетике переменное магнитное поле, и катушка K_2 , служащая для измерения величины индукции магнитного поля в ферромагнетике. Последовательно с катушкой K_1 включено сопротивление $r_0 = 10$ Ом, а последовательно с измерительной катушкой K_2 включена измерительная цепочка, состоящая из сопротивления $R_{25} = 10$ кОм и емкости $C_3 = 68$ нФ. На катушку K_1 подается синусоидальное напряжение с частотой 1 кГц и регулируемой амплитудой от функционального генератора (ФНГ). Сигнал с сопротивления r_0 поступает на вход «X» осциллографа, а сигнал с конденсатора C_3 – на вход «Y» осциллографа.

Методика наблюдения петель гистерезиса и измерения намагничивания ферромагнетика заключается в следующем. Напряженность магнитного поля в длинном соленоиде или тороидальной катушке K_1 приближенно дается формулой

$$H = nI,$$

где n – число витков на единицу длины катушки; I – ток в катушке. При прохождении тока I на сопротивлении r_0 появляется напряжение $U_0 = Ir_0$. Отсюда получаем $H = k_x U_0$, где коэффициент $k_x = n/r_0$.

Переменное магнитное поле вызывает появление ЭДС индукции в измерительной катушке K_2 :

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt},$$

где N и S суть соответственно число витков катушки и площадь сечения ферромагнетика. Записывая закон Ома для измерительной цепи в виде

$$\varepsilon = I_k R_{25} \gg U_c,$$

где I_k – ток в катушке K_2 , U_c – напряжение на конденсаторе, получаем для тока в измерительной цепи следующее выражение:

$$I_k = \frac{\varepsilon}{R_{25}} = \frac{NS}{R_{25}} \frac{dB}{dt}.$$

Тогда напряжение на конденсаторе имеет величину

$$U_c = \frac{q}{C_3} = \frac{1}{C_3} \int I_k dt = \frac{NS}{R_{25}C_3} \int \frac{dB}{dt} dt = \frac{NS}{R_{25}C_3} B = \frac{NS}{R_{25}C_3} B.$$

Для индукции магнитного поля находим:

$$B = k_y U_c,$$

где коэффициент

$$k_y = \frac{R_{25}C_3}{NS}.$$

Таким образом, напряженность магнитного поля H внутри ферромагнетика оказывается пропорциональной напряжению U_0 на сопротивлении r_0 , а индукция магнитного поля B в ферромагнетике – пропорциональной напряжению U_c на конденсаторе. Подавая напряжение U_0 на вход «X» осциллографа, а напряжение U_c – на вход «Y» осциллографа, получаем на экране петлю гистерезиса. Меняя с помощью генератора амплитуду тока через катушку K_1 , а следовательно, и напряженность магнитного поля, можно получить различные частные петли гистерезиса.

Для определения абсолютных значений напряженности H и индукции B магнитного поля внутри ферромагнетика надо рассчитать коэффициенты k_x и k_y и провести калибровку горизонтальной и вертикальной осей осциллографа.

Чувствительность вертикального входа «Y» устанавливается ручкой «вход Y» на передней панели осциллографа, а чувствительность горизонтального входа указана на осциллографе. Тогда значения H и B находятся по формулам:

$$H = k_x m_x x, \quad B = k_y m_y y, \quad (7.4)$$

где x и y – смещение точки на экране осциллографа от центрального положения в миллиметрах.

Измерив площадь максимальной петли гистерезиса, можно определить удельную мощность потерь при перемагничивании ферромагнетика в переменном магнитном поле по формуле

$$P = f \int H dB, \quad (7.5)$$

где величины берутся в единицах системы СИ, а f – установленная частота функционального генератора.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Соберите схему рис. 7.6.
2. Включите осциллограф, поставьте ручку «Усиление» в положение «20мВ/дел.», а переключатель «Синхронизация» в положение «Вход X».
3. Включите «Функциональный генератор». Установите частоту генератора 1 кГц. Подбирая выходное напряжение генератора, получите на экране осциллографа максимальную петлю гистерезиса.
4. Переведите на кальку наблюдаемую на экране предельную петлю гистерезиса, начертите на кальке оси координат и отметьте координаты точек насыщения H_H , B_H и точек H_C , B_r .
5. Плавно уменьшая выходное напряжение генератора до нуля с шагом 1/10, снимите и запишите в таблицу координаты (X, Y) верхней вершины десяти наблюдаемых петель гистерезиса.

Таблица 7.1

№ измерения	X , мм	Y , мм	H , А/м	B , Тл	J , А/м	μ_r
1						
2						
•••						

Обработка результатов измерений

1. Рассчитайте коэффициенты k_x и k_y для определения абсолютных значений напряженностей H и индукции B магнитного поля в ферромагнетике. Число витков N первой и второй катушек одинаково и равно 100. Площадь сечения ферромагнитного сердечника $S=4$ мм². Длина средней линии сердечника $l_c=28,2$ мм.
2. Для каждой точки на основной кривой намагничивания ферромагнетика рассчитайте значения H и B , используя формулы (4), занесите результаты расчетов в таблицу.
3. Для каждого измерения вычислите по формуле (7.3) значение J и $\mu_r \equiv B/\mu_0 H$. Постройте на миллиметровой бумаге графики зависимостей $J(H)$ и $\mu(H)$.
4. Рассчитайте и запишите значения величин H_H , B_H , H_C , B_r .
5. Наложите кальку с петлей гистерезиса ферромагнетика на миллиметровую бумагу, вычислите площадь предельной петли гистерезиса и по формуле (7.5) определите удельную мощность потерь на перемагничивание ферромагнетика.
6. Напишите вывод по результатам работы.

МАГНИТНЫЙ ГИСТЕРЕЗИС

Гистерезисом (от лат. hysteresis – отставание, запаздывание) называется явление, заключающееся в том, что некоторая физическая величина, характеризующая состояние тела, *неоднозначно* зависит от другой величины, связанной с внешними по отношению к телу условиями. Гистерезис имеет место тогда, когда состояние системы в некоторый момент времени определяется внешними условиями не только в тот же, но и в предшествующие моменты. Неоднозначная зависимость величин наблюдается, в принципе, в любых процессах, так как для изменения состояния всегда требуется некоторое время (*время релаксации*) и реакция тела отстает от вызывающих ее причин. Такое отставание тем меньше, чем медленнее изменяются внешние условия. Однако для некоторых процессов отставание при замедлении указанных изменений не уменьшается. В этих случаях неоднозначную зависимость величин называют *гистерезисной*, а само явление – гистерезисом.

Магнитный гистерезис характерен для *магнитоупорядоченных веществ*, например для ферромагнетиков. Обычно (как уже отмечалось ранее) ферромагнетик разбит на *домены* – области однородной самопроизвольной (спонтанной) намагниченности, в которых намагниченность \vec{J} равна $\vec{J}_{\text{нас}}$ (*намагниченности насыщения*), причем направления векторов \vec{J} различны. Под действием внешнего магнитного поля число и размеры доменов, намагниченных вдоль поля, увеличиваются за счет других доменов. Кроме того, векторы \vec{J} отдельных доменов могут поворачиваться по полю.

В состоянии полного размагничивания ферромагнетика векторы \vec{J} доменов направлены так, что суммарная намагниченность в образце равна нулю. При появлении магнитного поля \vec{H} начинается *перемещение границ* доменов: объем доменов, векторы $\vec{J}_{\text{нас}}$ которых составляют наименьший угол с направлением \vec{H} , увеличивается за счет соседних доменов с энергетически менее выгодной ориентацией магнитных моментов. При встрече границы с неоднородностями структуры ферромагнетика обычно происходит задержка ее смещения. Процесс *вращения* состоит в повороте векторов $\vec{J}_{\text{нас}}$ в направлении поля \vec{H} . Скорость данного процесса может уменьшаться (или увеличиваться) благодаря *магнитной анизотропии* ферромагнетика (первоначально векторы $\vec{J}_{\text{нас}}$ доменов направлены вдоль *осей легкого намагничивания*, в общем случае не совпадающих с направлением \vec{H}).

Если полностью размагниченный ферромагнетик намагничивать в *медленно* и *монотонно* возрастающем поле, то получается зависимость $J(H)$, называемая *кривой первоначального намагничивания* (рис. 7.7). Эта кривая подразделяется на пять участков. Участок I – область обратимого намагничивания. Здесь $J \sim H$. В области I протекают в основном процессы упругого смещения границ доменов. На участке II (в *области Рэлея*) J зависит от H квадратично. Для области II

характерны как обратимые, так и необратимые процессы смещения. Наиболее быстро J растет на участке III. Здесь имеет место необратимое смещение междоменных границ, причем намагничивание происходит скачками (см. рис. 7.7). Область IV – участок приближения к насыщению, на котором основную роль играют процессы вращения. Участок V – область парапроцесса [парапроцесс – истинное намагничивание – возрастание абсолютной величины спонтанной намагниченности $\vec{J}_{\text{нас}}$ под действием магнитного поля \vec{H} – наступает после процессов «технического намагничивания» (описанных ранее) и наблюдается в полях, превышающих значение поля технического магнитного насыщения $\vec{H}_{\text{нас}}$. Парапроцесс обусловлен переориентацией в поле \vec{H} элементарных носителей магнетизма, оставшихся не повернутыми в направлении результирующей намагниченности вследствие дезорганизующего действия теплового движения. При $H > H_{\text{нас}}$ $J_{\text{нас}}$ стремится приблизиться к величине абсолютного насыщения, т.е. к намагниченности, которую имел бы ферромагнетик при абсолютном нуле температуры. В ферромагнетиках парапроцесс максимален вблизи точки Кюри, поэтому в большинстве случаев он дает очень малый прирост намагниченности].

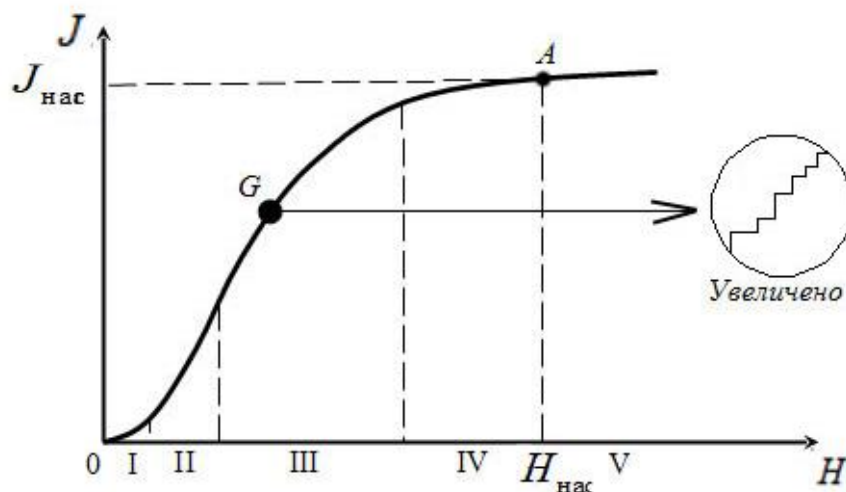


Рис. 7.7

Если после магнитного насыщения в точке A ($H = H_{\text{нас}}$, $J = J_{\text{нас}}$) начать медленно уменьшать H , то станет уменьшаться и J , но по кривой АВ, лежащей выше кривой первоначального намагничивания (рис. 7.8). Указанное уменьшение будет происходить преимущественно за счет возникновения и роста доменов с магнитным моментом, направленным против поля \vec{H} . Движение доменных стенок при этом вновь из-за наличия дефектов, на которых стенки задерживаются, происходит скачками; требуется заметно изменять магнитное поле, чтобы их (стенки) сдвинуть. Поэтому при $H = 0$ сохраняется остаточная намагниченность J_r (точка B). Полное размагничивание достигается в поле против -положительного направления $-H_c$ (H_c – коэрцитивное поле или коэрцитивная сила)

– точка C . При дальнейшем увеличении поля обратного направления образец вновь намагничивается до насыщения вдоль поля (точка D). Перемагничивание образца происходит по кривой $DEFA$. Таким образом, при циклическом изменении поля кривая $J(H)$ образует замкнутую петлю магнитного гистерезиса $ABCDEF A$ (ср. с кривой 1234561 рис. 7.4 для $B(H) = \mu_0(H + J(H))$).

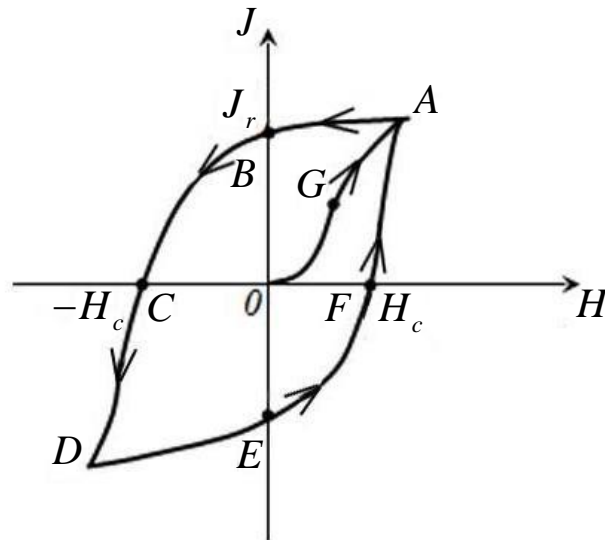


Рис. 7.8

Вид и размеры петли магнитного гистерезиса, значение H_c для различных ферромагнетиков могут меняться в широких пределах. На форму петли сильно влияет обработка материала, при которой изменяется число дефектов.

КРИВЫЕ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Кривыми намагничивания называются графики (формулы, таблицы), показывающие зависимость намагниченности J или магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H . Если известна кривая намагниченности $J(H)$, то по ней нетрудно построить кривую индукции $B(H)$. Примерами кривых намагничивания являются кривая первоначального (первого) намагничивания OGA (рис. 7.7, 7.8), а также кривые циклического перемагничивания (статические петли гистерезиса) – зависимости $J(H)$ и $B(H)$, получаемые после многократного прохождения определенного интервала значений H в прямом и обратном направлениях. В частности, замкнутая кривая $ABCDEF A$ на рис. 7.8 – предельная (максимальная) петля гистерезиса.

Если поместить ферромагнетик в небольшое переменное магнитное поле, не способное довести его до насыщения, то кривая $J(H)$ будет иметь сложный вид и не будет, вообще говоря, замкнутой. Такая кривая – одна из бесчисленного

множества *частных петель* или *частных циклов* гистерезиса (рис. П.3). При длительном перемагничивании в поле постоянной частоты и амплитуды эти кривые постепенно приобретают замкнутую форму (рис. П.4). Их также называют частными циклами. Предельный цикл получается из частного при достаточно большой амплитуде напряженности магнитного поля.

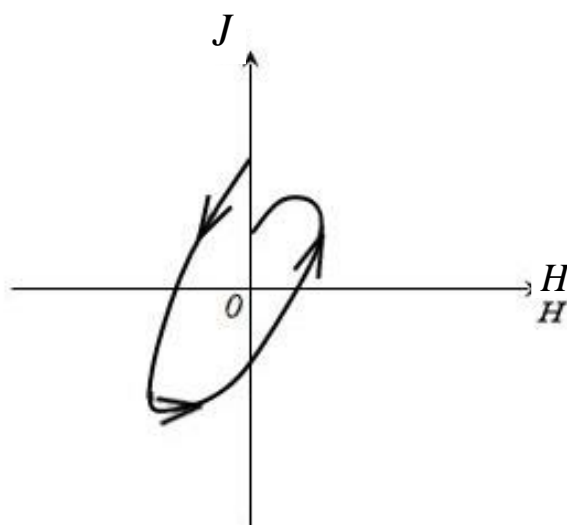


Рис. 7.9

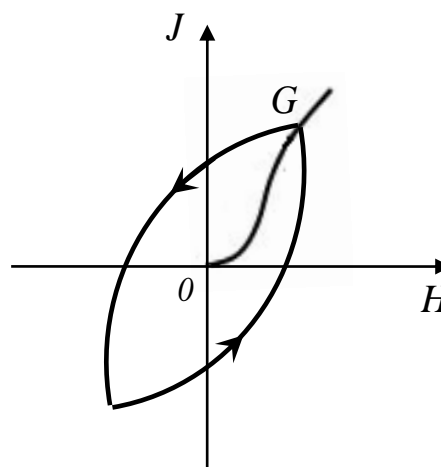


Рис. 7.10

Форма кривых, изображающих как частные циклы, так и предельный, зависит от частоты изменения поля. С увеличением частоты кривые гистерезиса расширяются. «Динамическая» петля гистерезиса всегда шире «статической». Данное явление связано с вихревыми токами и магнитной вязкостью.

Вихревые токи (токи Фуко) – замкнутые электрические токи в массивном проводнике, возникающие при изменении пронизывающего его магнитного потока. Токи Фуко *индукционные*, так что их магнитное поле направлено таким образом, чтобы противодействовать индуцирующему изменению магнитного поля. В результате распределение поля в образце оказывается неравномерным; при высоких частотах наступает *магнитный скин-эффект*: магнитное поле вытесняется на поверхность образца (так как в центре сечения проводника напряженность магнитного поля токов Фуко, направленная навстречу основному полю, обычно имеет наибольшее значение).

Магнитная вязкость вызывается вихревыми микротоками, возникающими в проводниках при изменениях поля, связанных с перемагничиванием доменов. Время установления магнитного состояния в этом случае пропорционально дифференциальной магнитной восприимчивости и (для чистых ферромагнитных металлов) обратно пропорционально абсолютной температуре. Другой тип магнитной вязкости обусловлен примесями. Перемещающиеся доменные границы задерживаются в местах концентрации примесных атомов, и процесс намагничивания прекращается. Со временем, после диффузии атомов примеси в другие места, границы получают возможность двигаться дальше. В высококоэрцитивных сплавах может наблюдаться *сверхвязкость*, для которой время магнитной релаксации составляет несколько минут и более.

Отметим, что перемагничивание является *квазистатическим*, если (заметное) уменьшение $|dH/dt|$ не приводит к существенному изменению кривой $J(H)$. Фактически, *квазистатическими* называют эксперименты, в которых время прохождения одного цикла $1/\nu \geq 1$ мин. В *тонких пленках* действием вихревых токов часто можно пренебречь. Поэтому возможно использовать переменные поля с частотой $\nu \sim 10^2 - 10^3$ Гц.

На рис. 7.11 схематически изображены «динамические» петли гистерезиса: 1 – максимальная петля гистерезиса; 2 – одна из частых петель; 3 – *основная (коммутационная) кривая* – геометрическое место вершин симметричных петель неполного перемагничивания. В переменных (H, B) рис. 7.11 соответствует рис. 7.4.

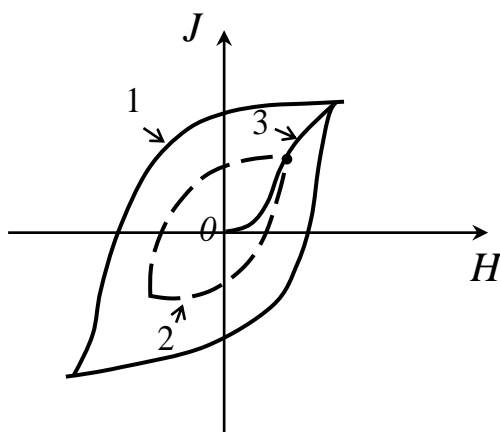


Рис. 7.11

В основном тексте также упомянут способ размагничивания ферромагнетика в переменном поле убывающей амплитуды. Иллюстрирующая этот процесс кривая приведена на рис. 7.12.

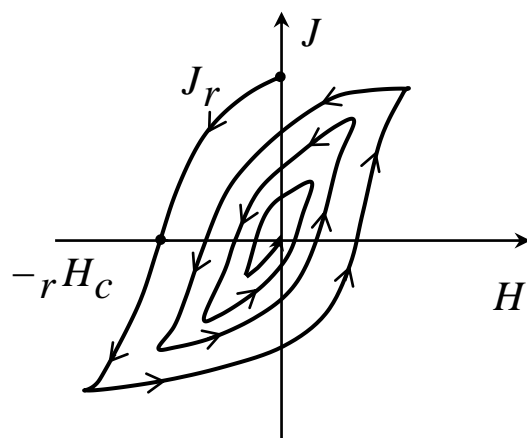


Рис. 7.12

Отметим, что для полного размагничивания данным способом необходимо, чтобы значение начальной амплитуды поля в 1,5–2 раза превышало значение коэрцитивной силы по намагниченности rH_c . Чем толще образец и чем выше его электрическая проводимость, тем ниже должна быть частота поля. Как правило, для размагничивания достаточно 30 – 60 циклов перемагничивания.

Обратим внимание на то, что на рис. 7.12 указана *релаксационная коэрцитивная сила* rH_c (эта же величина фигурирует на рис. 7.8 (в качестве H_c)); она определяется соотношением $J(-rH_c) = 0$. Вместе с тем, на рис. 7.4 основного текста $H_c \equiv B H_c$ (коэрцитивная сила по индукции; последняя удовлетворяет уравнению $-B H_c + J(-B H_c) = 0$).

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И МАГНИТНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ФЕРРОМАГНЕТИКА

Для ферромагнетиков обычные формулы

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \mu = \mu_0 \mu_r; \quad \mu_r = 1 + \chi,$$

лишены смысла. Тем не менее, условно вводят *полную* относительную магнитную проницаемость среды

$$\mu_{r_{\text{полн}}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H} = \frac{H + J}{H} \equiv 1 + \chi_{\text{полн}}$$

($\chi_{\text{полн}}$ – полная магнитная восприимчивость), а также *дифференциальную* относительную магнитную проницаемость

$$\mu_{r_{\text{дифф}}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} = \frac{d}{dH}(H + J) = 1 + \frac{dJ}{dH} \equiv 1 + \chi_{\text{дифф}},$$

где $\chi_{\text{дифф}}$ – дифференциальная магнитная восприимчивость среды.

Вид кривой $\chi_{\text{дифф}}(H)$ (*кривая Столетова*) обусловлен сложным механизмом намагничивания ферромагнетиков (см. изложенное ранее о кривой первоначального намагничивания). Вблизи $H = 0$ $\chi_{\text{дифф}}$ имеет некоторое значение χ_a (начальная магнитная восприимчивость). С увеличением H $\chi_{\text{дифф}}$ растет, достигая максимума $\chi_{\text{дифф}} = \chi_{\text{max}}$ на крутом участке кривой намагничивания (в области необратимого скачкообразного смещения доменных границ). При очень больших значениях H $\chi_{\text{дифф}}$ становится столь же незначительной, как и в обычных парамагнетиках. Кривая Столетова схематически изображена на рис. 7.13 (сравните с рис. 7.3 основного текста; $\mu = 1 + \chi$).

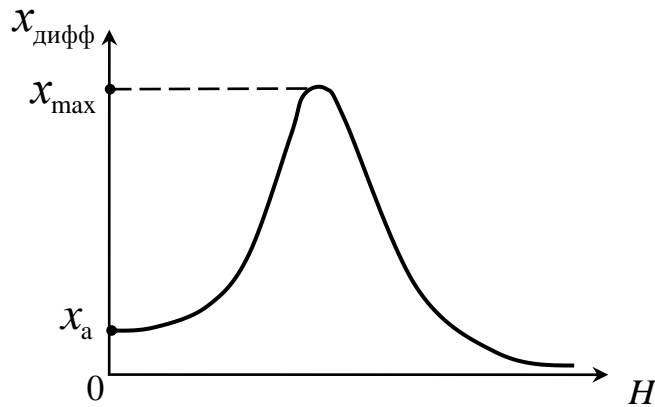


Рис. 7.13

УСРЕДНЕНИЕ

Ранее мы практически все время оперировали модулями магнитных векторов, т.е. вместо \vec{B} , \vec{J} и \vec{H} писали соответственно B , J и H . Дело в том, что (неявно) ферромагнетик считался изотропным. *Изотропность* среды означает (для данного случая), что пока она не находится в магнитном поле, все направления в ней совершенно равноправны. Когда же тело помещается в магнитное поле, в каждом элементарном объеме появляется единственное выделенное направление – направление вектора напряженности поля \vec{H} . При таком условии, если среда в магнитном поле вообще намагничивается, то в каждом малом объеме вектор намагничивания \vec{J} параллелен вектору \vec{H} в том же объеме: $\vec{J} \parallel \vec{H}$. Таким образом, модуль J вектора \vec{J} зависит только от модуля H вектора \vec{H} , но не от его направления: $J = J(H)$. Вследствие известной линейной связи между \vec{B} , \vec{H} и \vec{J} оказывается, что и $\vec{B} \parallel \vec{H}$, $B = B(H)$.

Хорошо известно, однако, что ферромагнетики, как правило, являются *кристаллами*. В них имеются выделенные направления – *кристаллографические оси*. Свойства кристаллической среды зависят от углов избранного направления по отношению к данным осям (имеет место *кристаллографическая анизотропия* вещества).

Переход к изотропному описанию оказывается возможным благодаря *поликристаллической* структуре основных ферромагнетиков. Поликристаллические материалы представляют собой конгломераты маленьких кристалликов (*зерен* или *кристаллитов*). Зерна имеют различную, обычно неправильную форму; между ними находятся пустоты (поры) также различной формы, занимающие часто значительную долю (до 20%, а иногда и более) всего объема. В плотных, хорошо приготовленных образцах эта доля (относительная пористость) уменьшается до нескольких процентов.

Обычно кристаллографические оси зерен произвольным образом ориентированы друг относительно друга; отсутствует какая-либо преимущественная ориентация и геометрических осей кристаллитов. Макроскопические параметры такой среды (*усредненные* по объему, значительно превышающему размеры

зерен) изотропны. Если же при синтезе поликристаллического образца принимаются специальные меры, то равномерность углового распределения кристаллографических или геометрических осей кристаллитов нарушается. Такой *текстурированный* поликристалл приближается по своим свойствам к *монокристаллу*.

Размеры зерен $d \geq 10^{-4}$ см (но могут достигать значений и порядка миллиметра). Зададимся некоторым пространственным масштабом a , существенно большим d , однако при этом еще малым в макроскопическом смысле. Пусть имеется некоторая функция $f(x, y, z)$, которую мы собираемся усреднить по физически бесконечно малому объему, имеющему величину $\sim a^3$. Удобно считать, что точка (x, y, z) находится в центре кубика с ребром a . Тогда под *средним* значением функции f в данной точке следует понимать

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-a/2}^{a/2} d\eta \int_{-a/2}^{a/2} d\zeta f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta). \quad (7.6)$$

Чрезвычайно существенно, что усредненное (*сглаженное*) значение \bar{f} остается функцией от x, y и z .

Важнейшим свойством усреднения (7.6) является *коммутативность* данной операции с операциями вычисления частных производных по координатам. Обозначим

$$x' = x + \xi, \quad y' = y + \eta, \quad z' = z + \zeta.$$

Тогда, к примеру,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-a/2}^{a/2} d\eta \int_{-a/2}^{a/2} d\zeta \frac{\partial f}{\partial x'}(x', y', z').$$

Очевидно, что

$$\partial f / \partial x = (\partial f / \partial x') \cdot (\partial x' / \partial x) = \partial f / \partial x'.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-a/2}^{a/2} d\eta \int_{-a/2}^{a/2} d\zeta \frac{\partial f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)}{\partial x}.$$

Если допустить, например, что $f(x, y, z)$ и $\partial f / \partial x$ непрерывны, то можно воспользоваться известным из анализа *правилом Лейбница*, которое в данном случае дает:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-a/2}^{a/2} d\eta \int_{-a/2}^{a/2} d\zeta f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta).$$

Окончательно имеем:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(x, y, z). \quad (7.7)$$

Равенство (7.7) и означает, что операции сглаживания $(\bar{\quad})$ и вычисления частной производной $\partial/\partial x$ над функцией f можно выполнять в любом порядке. Иначе говоря, данные операции *перестановочны (коммутируют)*.

В поликристаллическом ферромагнетике усреднение по зернам обычно сопровождается усреднением по упоминавшимся ранее магнитным доменам (от франц. *domaine* – владение, область; реальные размеры доменов $\sim (10^{-5} - 10^{-1})$ см. Именно в смысле последнего усреднения можно говорить о полностью размагниченном ферромагнетике, у которого намагниченность $J \equiv 0$. Отметим, что в монокристалле, имеющем во всем объеме единую кристаллическую решетку, остается усреднение по доменам, не приводящее к возникновению изотропии свойств.

Важно понимать, что в физике *сплошных сред* усреднение типа (7.6) является одним из важнейших элементов теории. В сплошной среде пренебрегают молекулярным (атомным) строением вещества и одновременно считают непрерывным распределение всех его характеристик. Рассматривая проблемы электродинамики, можно исходить из представления об электромагнитном поле в вакууме, в котором находятся частицы вещества. Сложность задачи в такой постановке связана как с колоссальным числом электронов и атомных ядер в любом макрообъеме, так и с невероятно запутанным характером их движения. Истинные поля в вакууме, модифицированные заряженными частицами вещества, – станем называть эти поля *микроскопическими* и помечать нижним индексом «м» – характеризуются чрезвычайной нерегулярностью. Если взять, например, отдельный ион, то порождаемое им электрическое поле меняет свое направление на расстоянии порядка размеров иона, т.е. 10^{-8} см. Но такие микроскопические нерегулярности полей во многих случаях несущественны. Нам часто достаточно знать усредненные в смысле (7.6) (*макроскопические*) поля, причем объем усреднения a^3 должен быть велик по сравнению с объемом атома, но мал по сравнению с объемом области пространства, в которой уже заметно меняется сама сглаженная величина (следует вводить и временное сглаживание по некоторому подходящему промежутку времени $\tau \gg \tau_a$, где τ_a – характерное атомное время; $\tau_a \sim 10^{-16}$ с – такое время соответствует прохождению атомного расстояния $\sim 10^{-8}$ см с характерной для электронов атома скоростью $\sim 10^8$ см/с).

Основой классической электродинамики являются уравнения, сформулированные Дж. Максвеллом как результат обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений. Современная форма уравнений Максвелла дана Г. Герцем и О. Хевисайдом. Применительно к микроскопическим полям (в системе СИ) уравнения Максвелла (называемые в данном случае *уравнениями Лорентца–Максвелла*) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}_M &= \vec{j}_M + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_M}{\partial t}; \\
\operatorname{rot} \vec{E}_M &= -\frac{\partial \vec{B}_M}{\partial t}; \\
\operatorname{div} \vec{B}_M &= 0; \\
\operatorname{div} \vec{E}_M &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_M.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Усредним уравнения (7.8) по подходящему физически бесконечно малому объему. При этом следует учесть, что в формуле (7.6) в качестве f может выступать любая из компонент полей \vec{E}_M и \vec{B}_M , а также любая компонента микроскопической плотности тока \vec{j}_M и микроскопическая объемная плотность электрического заряда ρ_M . Для нас важно, что операторы div и rot являются линейными комбинациями частных производных $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$, а формула (7.7) справедлива, конечно, и при замене $\partial/\partial x$ на $\partial/\partial y$ или на $\partial/\partial z$.

Возьмем, к примеру, последнее из уравнений (7.8). Применяя к обеим его частям операцию сглаживания $(\bar{\quad})$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{div} \vec{E}_M} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\rho}_M; \\
\operatorname{div} \bar{\vec{E}}_M &= \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\rho}_M.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом усредняем и остальные уравнения (7.8). Введя обозначения для макроскопических полей, –

$$\vec{E} = \bar{\vec{E}}_M, \quad \vec{B} = \bar{\vec{B}}_M \tag{7.9}$$

получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} &= \vec{j}_M + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\
\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\rho}_M.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Рассмотрим величины $\bar{\rho}_M$ и \vec{j}_M . Среднюю плотность заряда часто можно представить в виде суммы

$$\bar{\rho}_M = \rho + \rho_{\text{свзн}}, \tag{7.11}$$

где ρ – объемная плотность свободных; $\rho_{\text{свзн}}$ – объемная плотность связанных зарядов. Под *свободными зарядами* подразумеваются все электрические заряды, которые под влиянием электрического поля могут перемещаться на макроскопические расстояния, а также заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектрика и нарушающие его нейтральность (*сторонние заряды*). Заряды же, входящие в состав нейтральных молекул, а также заряды, закрепленные в твердых телах вблизи определенных положений равновесия, называют *связанными*. Во многих случаях

$$\rho_{\text{свзн}} = -\text{div}\vec{P}, \quad (7.12)$$

где \vec{P} – *вектор поляризации* среды. Заметим, что вектор поляризации является «хорошо определенной» величиной, если только физически бесконечно малый объем, с которым связан \vec{P} , электронейтрален.

Аналогичным образом, как правило,

$$\vec{j}_M = \vec{j} + \vec{j}_{\text{свзн}}, \quad (7.13)$$

где \vec{j} – плотность тока, обусловленного свободными зарядами, – *плотность тока проводимости*, – а $\vec{j}_{\text{свзн}}$ – плотность тока связанных зарядов. В случае носителей тока одного типа

$$\vec{j} = en\vec{v}, \quad (7.14)$$

где e – заряд подвижной частицы; n – концентрация таких частиц, а \vec{v} – средняя скорость их направленного движения (при наличии носителей тока нескольких сортов требуется еще суммирование по ним). Плотность тока связанных зарядов $\vec{j}_{\text{свзн}}$ часто записывают в виде суммы

$$\vec{j}_{\text{свзн}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}\vec{J}, \quad (7.15)$$

где $\partial \vec{P} / \partial t$ – *плотность поляризационного тока*, а $\text{rot}\vec{J}$ – *плотность молекулярных токов*, гипотеза о существовании которых была высказана А. Ампером. В (7.15) \vec{J} – вектор намагничивания среды (он имеет смысл при наличии произвольной системы токов, замыкающихся в соответствующем физически бесконечно малом объеме).

Следует отметить, что разделение $\vec{\rho}_M$ и \vec{j}_M на части в соответствии с формулами (7.11), (7.13) и (7.15) не является самоочевидным. Например, в высокочастотных полях нет существенной разницы между движениями свободных и связанных частиц – все они совершают некоторые вынужденные колебания. В таком случае можно каждое колебание разложить на колебание, происходящее в фазе (или противофазе) с электрическим полем, и колебание, сдвинутое относительно поля по фазе на $\pi/2$. Ток, обусловленный первыми колебаниями, можно считать током проводимости \vec{j} . Ток же, связанный с колебаниями, сдвинутыми по фазе на $\pi/2$, окажется током поляризации $j_{\text{пол}} \equiv \partial \vec{P} / \partial t$ (тем самым дается и определение вектора \vec{P}). Еще: в металле вклад

в намагниченность вносят не только электроны, движущиеся внутри атомов, но и электроны проводимости, так что название «плотность молекулярных токов» не вполне соответствует истинной физической картине явления.

Теперь (с учетом сделанных замечаний) можно подставить (7.15) и (7.13) в первое из уравнений (7.10), а (7.12) и (7.11) – в последнее уравнение (7.10):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mu_0^{-1}\vec{B}) &= \vec{j} + \operatorname{rot}\vec{J} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}); \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0\vec{E}) &= \rho - \operatorname{div}\vec{P}.\end{aligned}$$

Вновь учитывая линейность операторов rot и div , получаем, наконец, вместо системы уравнений (7.10) макроскопические **уравнения Максвелла**:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho.\end{aligned}\tag{7.16}$$

Здесь

$$\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{J}; \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} - \tag{7.17}$$

напряженность магнитного поля и *электрическая индукция* соответственно. Отметим еще, что мы не включили в (7.13) объемную плотность *конвекционного тока*, который возникает при перемещении заряженных макроскопических тел.

Рассмотрим объяснение формулы (7.2)

Умножим скалярно (\cdot) первое из уравнений (7.16) на \vec{E} , второе уравнение – на \vec{H} и затем из второго равенства вычтем первое:

$$(\operatorname{rot}\vec{E}) \cdot \vec{H} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot}\vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

Справедливо соотношение (крестик \times обозначает векторное умножение)

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = (\operatorname{rot}\vec{E}) \cdot \vec{H} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot}\vec{H} \tag{7.18}$$

(рекомендуем проверить (7.18) в декартовых ортогональных координатах). С учетом (7.18) получаем:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}).$$

Рассмотрим величину $\vec{E} \cdot \vec{j}$, полагая что \vec{j} имеет вид (7.14)

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (en\vec{v}) = n(e\vec{E}) \cdot \vec{v} \equiv n\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\delta N}{\delta V} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{\delta A_{\text{II}}}{\delta V dt}.$$

Здесь $n = \delta N / \delta V$, где δV – величина используемого физически бесконечно малого объема, а δN – число носителей тока внутри такого объема; $\vec{v} = d\vec{r}/dt$; $(e\vec{E}) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ – работа электромагнитного поля над произвольной подвижной частицей за малый промежуток времени dt (магнитная часть силы не совершает работы из-за перпендикулярности к скорости \vec{v}); δA_{Π} – работа поля в объеме δV за время dt . Таким образом,

$$\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt \right) \delta V = -\delta A_{\Pi} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \delta V dt.$$

Поскольку движущиеся среды мы не рассматриваем, то $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt = d\vec{D}$, т.е. равно изменению вектора \vec{D} за время dt внутри объема δV . Аналогично $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt = d\vec{B}$. Введем еще обозначение для *вектора Пойнтинга*:

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (7.19)$$

В результате будем иметь:

$$(\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}) \delta V = -\delta A_{\Pi} - \operatorname{div} \vec{\Pi} \delta V dt. \quad (7.20)$$

Если проинтегрировать равенство (7.20) по объему V , занятому средой, то получится $(\int_V \delta A_{\Pi} \equiv A_{\Pi, dt})$:

$$\int_V \delta V (\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}) = -A_{\Pi, dt} - dt \int_V \delta V \operatorname{div} \vec{\Pi}. \quad (7.21)$$

Объемный интеграл в правой части (7.21) (по теореме Гаусса–Остроградского) преобразуется в поток вектора $\vec{\Pi}$ через ограничивающую объем поверхность (в направлении внешней нормали). Поскольку $A_{\Pi, dt}$ – работа поля за время dt , возникает следующая естественная трактовка соотношения (7.21): изменение части энергии тела, связанной с электрическим и магнитным полями, дается интегралом по объему, стоящим в левой части (7.21); имеются два механизма, вызывающих данное изменение, – совершение полем работы над заряженными частицами и обмен энергией через поверхность тела (последний описывается вектором $\vec{\Pi}$, который является *вектором плотности потока энергии* электромагнитного поля).

Примем δV за *единицу измерения объема*. Тогда величина $\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}$ должна быть добавлена к термодинамическому соотношению, определяющему бесконечно малое приращение внутренней энергии единицы объема среды (иные источники внешней работы для простоты считаем отсутствующими):

$$dU = \delta Q + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (7.22)$$

Здесь δQ – *поглощенное* единицей объема *тепло* (за время dt).

Пусть в системе происходит некоторый циклический процесс, в результате которого она возвращается в исходное состояние. Если (как в интересующем нас случае) электрические свойства среды не имеют никаких особенностей, можно, например, формально считать, что $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Тогда

$$\vec{E} \cdot d\vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{E} = \epsilon d\left(\frac{E^2}{2}\right) = d\left(\frac{\epsilon E^2}{2}\right) = d\left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}\right).$$

Теперь равенство (7.22) принимает вид:

$$d\left(U - \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}\right) = \delta Q + \vec{H} \cdot d\vec{B}.$$

Просуммируем последнее соотношение по всему циклическому процессу. Сумма элементарных приращений (дифференциалов) в левой части даст полное приращение разности $U - \vec{E} \cdot \vec{D}/2$ за цикл, которое обращается в нуль, так как конечное состояние совпадает с начальным, а величины U , \vec{E} и \vec{D} – характеристики состояния. Сумма всех δQ представляет собой, очевидно, полное количество теплоты Q , поглощенное за цикл. Наконец, сумму всех слагаемых $\vec{H} \cdot d\vec{B}$ обозначим $\int \vec{H} \cdot d\vec{B}$ (никакого конкретного математического смысла операция \int пока не имеет). Итак,

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{B} + Q = 0 \quad (7.23)$$

(за цикл).

Рассмотрим процесс намагничивания изотропного ферромагнетика. Пусть направление намагничивания характеризуется единичным вектором $\vec{\tau}$. Тогда $\vec{H} = H_\tau \vec{\tau}$, $\vec{B} = B_\tau \vec{\tau}$, $\vec{H} \cdot d\vec{B} = H_\tau dB_\tau$ (H_τ и B_τ – проекции на направление $\vec{\tau}$ векторов \vec{H} и \vec{B} соответственно). В данном случае не имеет смысла сохранять индекс τ , так что плоскостью состояний ферромагнетика оказывается плоскость $ОНВ$ (рис. 7.2, 7.4, 7.5). Циклический процесс изображается замкнутой кривой, лежащей в плоскости $ОНВ$ (направление обхода кривой выбрано *против часовой стрелки*, как у петли гистерезиса рис. 7.4).

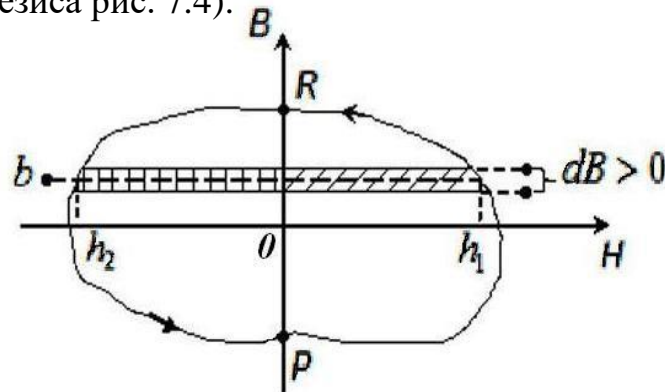


Рис. 7.14

Допустим, что обход начинается с точки P (это предположение не влияет на конечный результат) При перемещении по дуге PR кривой формируется

сумма $\sum_{(PR)} h_1 dB$, каждый член которой численно равен площади полоски, покрытой кривой штриховкой. Далее, двигаясь против часовой стрелки по дуге RP , составляется сумму $\sum_{(PR)} h_2(-dB)$ со слагаемыми, численно равными площадям

полосок с прямой штриховкой. Очевидно, что суммирование по всему циклу даст площадь фигуры, ограниченной кривой цикла. Нетрудно распространить этот результат на случай любой замкнутой кривой с направлением обхода против часовой стрелки.

Заметим, наконец, что величина $\sum_{(PR)} h_1 dB + \sum_{(RP)} h_2(-dB)$ есть интегральная

сумма *криволинейного интеграла второго рода* $\int H \cdot dB$, который берется по кривой цикла (обход против часовой стрелки). Возьмем цикл перемагничивания, изображаемый петлей гистерезиса 1234561 на рис. 7.4. Применяя к нему (7.23), получим:

$$\int HdB + Q = 0.$$

Но криволинейный интеграл $\int HdB = S_{II}$ (площади петли), как только что было показано. Значит, этот интеграл положителен, а $Q < 0$. Вспомним теперь, что здесь Q – поглощаемое количество теплоты. Таким образом, за цикл единица объема ферромагнетика *отдает* положительное тепло S_{II} , так что соотношение (7.2) действительно справедливо. Очевидно, что условием осуществления цикла перемагничивания в термодинамическом смысле является отвод данного тепла.

Формулу

$$\int HdB = S_{II}$$

при желании можно переписать иначе. Ясно, что

$$HdB = d(HB) - BdH, \quad \int d(HB) = 0.$$

Таким образом,

$$S_{II} = -\int BdH$$

(обход кривой против часовой стрелки). В свою очередь,

$$\int BdH = \mu_0 \int (H + J)dH = \mu_0 \left[\int d(H^2/2) + \int JdH \right] = \mu_0 \int JdH.$$

В анизотропных ферромагнетиках в общем случае векторы \vec{H} и \vec{B} имеют различные направления. Однако \vec{B} всегда можно единственным образом разложить на составляющие, параллельную (\parallel) и перпендикулярную (\perp) \vec{H} : если опять $\vec{H} = H\vec{\tau}$, то

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} \equiv B_{\tau}\vec{\tau} + \vec{B}_{\perp}, \quad \vec{\tau} \cdot \vec{B}_{\perp} = 0.$$

Далее,

$$\vec{H} \cdot d\vec{B} = H \vec{\tau} \cdot (\vec{\tau} dB_{\tau} + d\vec{B}_{\perp}) = H dB_{\tau}.$$

Таким образом, равенство (7.23) приобретает вид:

$$\int H dB_{\tau} + Q = 0.$$

Здесь предполагается, что графическим изображением процесса перемещения служит кривая $B_{\tau}(H)$.

РАЗМАГНИЧИВАЮЩЕЕ ПОЛЕ

Дифференциальные уравнения Максвелла (7.16) неприменимы на поверхностях разрыва электрических и магнитных векторов. Вместо уравнений (7.16) в точках таких поверхностей должны выполняться так называемые электродинамические *граничные условия*. С выводом этих условий можно познакомиться, например, в книге [1], а мы лишь сформулируем их. Введем символический *дифференциальный оператор Гамильтона (оператор «набла»)*:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.24)$$

(представление ∇ в форме (7.24) справедливо только в декартовых прямоугольных координатах). С помощью оператора набла уравнения (7.16) переписываются в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0; \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Пусть теперь S – поверхность разрыва (рис. 7.15), а P – произвольная ее точка.

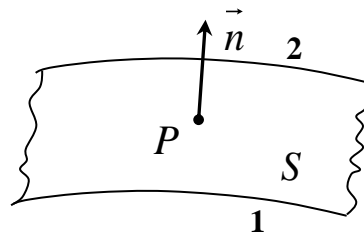


Рис. 7.15

Восставим в точке P единичную нормаль \vec{n} к поверхности S (направление нормали – одно из двух возможных – не имеет значения). Индексами 1 и 2 станем обозначать величины, относящиеся соответственно к внутренней и внешней (по

отношению к нормали \vec{n}) стороне поверхности. Например, \vec{E}_1 – предельное значение напряженности электрического поля в точке P при стремлении к P снизу (на рисунке), а \vec{E}_2 – предел \vec{E} при стремлении к P сверху. Теперь искомые граничные условия легко записать, заменяя, в сущности, в уравнениях (7.25) ∇ на \vec{n} :

$$\begin{aligned}\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{i}; \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0; \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0; \\ \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \sigma.\end{aligned}\tag{7.26}$$

В равенствах (7.26) σ – *поверхностная* (на S) *плотность* свободного заряда, \vec{i} (не путать с базисным вектором \vec{i} , входящим в (7.24)) – *плотность* макроскопического *поверхностного тока* – количества электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности S и перпендикулярного направлению тока. В правые части первого и второго уравнений (7.25) входят производные $\partial \vec{D} / \partial t$ (*ток смещения*) и $\partial \vec{B} / \partial t$; они, однако, не дают вклада в граничные условия, если только остаются конечными.

В дальнейшем мы не станем рассматривать поверхностные токи, так что правая часть первого из равенств (7.26) будет считаться равной нулю. Возьмем, например, вектор \vec{E}_1 (в точке P). Этот вектор единственным образом разлагается на *нормальную* к поверхности S и *касательную* (*тангенциальную*) к S составляющие:

$$\vec{E}_1 \equiv E_{1n} \vec{n} + \vec{E}_{1\tau}, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_{1\tau} = 0.$$

Легко видеть, что третье из условий (7.26) принимает вид

$$B_{2n} = B_{1n},\tag{7.27}$$

а четвертое условие –

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.\tag{7.28}$$

Второе условие пишем в форме

$$\vec{n} \times \vec{E}_{2\tau} = \vec{n} \times \vec{E}_{1\tau}.$$

Нетрудно понять, что, например, вектор $\vec{n} \times \vec{E}_{1\tau}$ получается из $\vec{E}_{1\tau}$ поворотом вокруг единичного вектора \vec{n} на угол $\pi/2$ (направление оси поворота совпадает с направлением \vec{n}). Таким образом, «одинаково повернутые» векторы $\vec{E}_{1\tau}$ и $\vec{E}_{2\tau}$ совпадают. Следовательно, они и с самого начала были одинаковы, т.е.

$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{1\tau}.\tag{7.29}$$

Аналогично и

$$\vec{H}_{2\tau} = \vec{H}_{1\tau} \quad (7.30)$$

(см. первое из равенств (7.26) при $\vec{i} = 0$).

Возьмем уравнения электростатики (нет зависимости полей от времени) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \bar{\rho} / \epsilon_0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

(второе и четвертое уравнения (7.10); индекс «м» у ρ опущен). Первое из уравнений (7.30) дает ($\operatorname{rotgrad} \equiv 0$):

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \equiv -\nabla \varphi. \quad (7.32)$$

Здесь φ – потенциал электростатического поля. Подставляя (7.32) во второе из равенств (П.23), приходим к уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi = -\bar{\rho} / \epsilon_0, \quad (7.33)$$

где оператор Лапласа

$$\Delta \equiv \operatorname{divgrad} \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.34)$$

(последнее выражение пригодно только для случая декартовых прямоугольных координат).

Уравнение (7.33) следует решать (при заданном $\bar{\rho}$), принимая во внимание дополнительные условия на поверхностях разрыва вектора \vec{E} :

$$E_{2n} - E_{1n} = \bar{\sigma} / \epsilon_0, \quad (7.35)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = \bar{\sigma} / \epsilon_0 \quad (7.36)$$

(ср. с (7.28); $\bar{\sigma}$ – макроскопическая поверхностная плотность электрического заряда; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению нормали \vec{n} ; непрерывность тангенциальных составляющих (7.29) обеспечивается предполагаемой непрерывностью потенциала φ ; необходимы также некоторые условия, задающие поведение φ «на бесконечности»). Искомое решение, однако, можно написать практически без труда, если руководствоваться следующими соображениями.

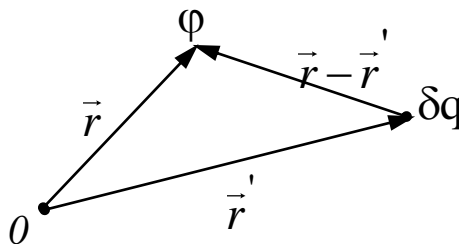


Рис. 7.16

На рис. 7.16 электрический заряд δq находится в точке, имеющей радиус-вектор \vec{r}' относительно начала координат O . Потенциал поля, создаваемого данным зарядом в точке с радиусом-вектором \vec{r} , есть, как известно,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В случае объемного распределения заряда в каждой точке пространства находится заряд $\delta q = \rho(\vec{r}')\delta V'$, где $\delta V'$ – величина физически бесконечно малого объема, связанного с точкой \vec{r}' . Вследствие *линейности* уравнений (7.31)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V',$$

где интегрирование формально распространяется на все пространство (написанное выражение называется *ньютоновым потенциалом*). При наличии поверхностей с ненулевым поверхностным зарядом к найденному потенциалу следует добавить слагаемое

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\bar{\sigma}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta S'$$

(здесь $\delta q = \sigma(\vec{r}')\delta S'$, а интегрирование ведет по всем поверхностям, несущим поверхностный заряд). Итак,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\bar{\sigma}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta S'. \quad (7.37)$$

Отметим, что вследствие (7.35)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\epsilon_0^{-1} \bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{(E_{2n} - E_{1n})|_{\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta S'. \quad (7.38)$$

Возьмем теперь первое и третье уравнения (7.16), пренебрегая током смещения $\partial\vec{D}/\partial t$ (тем самым мы используем *квазистационарное* приближение – см. гл. 5):

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \vec{j}; \\ \text{div}\vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Будем считать, что ток \vec{j} – некоторый «внешний» ток, поддерживаемый в каких-либо обмотках внешними источниками (при этом не исключается индукционная составляющая); токами Фуко пренебрегаем. Вследствие первого из соотношений (7.17) имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \vec{j}; \\ \text{div}(\vec{H} + \vec{J}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Граничными условиями (на поверхности магнетика) для уравнений (7.40) являются соотношения (7.30) и (7.27).

Положим

$$\vec{H} = \vec{H} + \vec{H}_0, \quad (7.41)$$

где

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div}\vec{H} = 0; \quad (7.42)$$

$$\text{rot}\vec{H}_0 = 0, \quad \text{div}(\vec{H}_0 + \vec{J}) = 0. \quad (7.43)$$

Граничные условия для полей \vec{H} и \vec{H}_0 возьмем в виде:

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}, \quad H_{2n} = H_{1n}; \quad (7.44)$$

$$H_{0_{2\tau}} = H_{0_{1\tau}}, \quad H_{0_{2n}} = H_{0_{1n}} + J_n \quad (7.45)$$

(теперь индекс 1 служит для обозначения полей внутри магнетика, а индекс 2 – вне магнетика).

Поле \vec{H} есть «внешнее» поле, создаваемое токами \vec{j} , а поле \vec{H}_0 называется *размагничивающим полем* (смысл такого названия выяснится позднее). Обратимся сначала к случаю *слабого магнетика*, для которого

$$\vec{J} = \chi\vec{H}, \quad |\chi| \ll 1.$$

Внутри образца имеем:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{H}_0 + \chi\vec{H}) &= \text{div}[(1 + \chi)\vec{H}_0 + \chi\vec{H}] \approx \text{div}(\vec{H}_0 + \chi\vec{H}), \\ \text{div}\vec{H}_0 &\approx -\chi\text{div}\vec{H}. \end{aligned}$$

Вне образца $\text{div}\vec{H}_0 = 0$. На границе

$$H_{0_{1n}} + \chi H_{1n} = (1 + \chi)H_{0_{1n}} + \chi H_{1n} \approx H_{0_{1n}} + \chi H_{1n},$$

так что

$$H_{0_{2n}} - H_{0_{1n}} \approx \chi H_{1n}.$$

Далее мы увидим, что величины $-\chi\text{div}\vec{H}$ и χH_{1n} являются источниками поля \vec{H}_0 . Поэтому $H_0 \sim \chi H$, а $\vec{H} \approx \vec{H}$.

Не так обстоит дело в *сильных магнетиках*. Здесь (см. (7.43) и (7.45))

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H}_0 &= 0; \\ \text{div}\vec{H}_0 &= -\text{div}\vec{J} \\ H_{0_{2n}} - H_{0_{1n}} &= J_n. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Сравнив (7.46) с уравнениями (7.31) и граничным условием (7.35), приходим к выводу, что, *во-первых*, существует потенциал ψ поля \vec{H}_0 –

$$\vec{H}_0 = -\nabla\psi - \quad (7.47)$$

и, *во-вторых*,

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{J_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta S' \quad (7.48)$$

(ср. с выражением (7.38)). Здесь, очевидно, $-\text{div}\vec{J}$ и J_n оказываются источниками поля (если эти величины тождественно равны нулю, то и $\psi \equiv 0$). В слабых же магнетиках, как теперь легко понять, в роли источников выступают $-\chi\text{div}\vec{H}$ и χH_{1n} , что и утверждалось ранее.

Интеграл по замкнутой поверхности образца $\int \delta S' J_n(\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$ по теореме Гаусса–Остроградского преобразуется в объемный интеграл $\int \delta V' \text{div} \left[\vec{J}(\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'| \right]$. Кроме того, нетрудно проверить соотношение

$$\text{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}') + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(значок \vec{r}' у символов div и grad означает, что соответствующие производные берутся по переменным \vec{r}'). В результате

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V'. \quad (7.49)$$

Рассмотрим *однородно намагниченный ферромагнетик*, $\vec{J} \equiv \text{const}$. Возьмем какую-нибудь декартову прямоугольную систему координат с осями $Ox = Ox_1$, $Oy = Ox_2$, $Oz = Ox_3$. Комбинируя формулы (7.47) и (7.49), получим ($i = x, y, z \equiv 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} H_{oi} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \int J_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V' = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 J_j \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta V' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 J_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{\delta V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned}$$

В преобразованиях мы учли ($|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - x'_k)^2}$), что

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

вновь, как и при выводе (7.7), воспользовались правилом Лейбница; кроме того, производные $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ считаем непрерывными – поэтому они не зависят от порядка дифференцирования.

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} N_{ij}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{\delta V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \\ &(i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (7.50)$$

где интегрирование идет по объему ферромагнетика (точки \vec{r}' лежат внутри образца), а \vec{r} – произвольная точка пространства. Тогда

$$H_{o_i}(\vec{r}) = -\sum_{j=1}^3 N_{ij}(\vec{r}) J_j. \quad (7.51)$$

Поле (7.51) не является однородным. Но, если придать ферромагнетику форму произвольного эллипсоида, то при $\vec{J} \equiv \text{const}$ поле внутри него (но не вне) будет однородным. С математической точки зрения, девять величин (7.50) образуют *тензор (тензор размагничивающих коэффициентов)*. Компоненты N_{ij} этого тензора зависят от выбора направления осей системы координат. В системе координат, в которой уравнение эллипсоида имеет канонический вид, у тензора N_{ij} есть только диагональные компоненты ($N_{ij} = 0$ для $i \neq j$; $N_{11} = N_1$, $N_{22} = N_2$, $N_{33} = N_3$ могут быть отличными от нуля):

$$N_1 = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)R_s}, \quad N_2 = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)R_s},$$

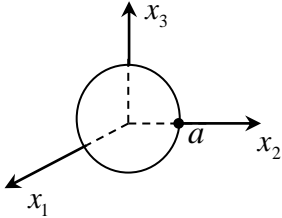
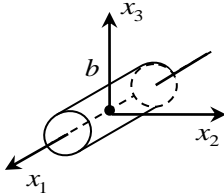
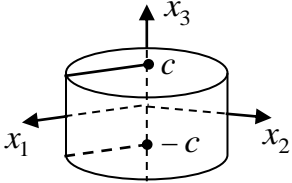
$$N_3 = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)R_s}, \quad R_s = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}, \quad (7.52)$$

a, b, c – полуоси эллипсоида. Сумма размагничивающих коэффициентов (7.52)

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1, \quad (7.53)$$

кроме того, все они положительны. В табл. 7.1 приведены значения размагничивающих коэффициентов для некоторых вырожденных случаев эллипсоида $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$.

Таблица 7.1

Образец		N_1	N_2	N_3
Сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$		$1/3$	$1/3$	$1/3$
Цилиндр $x_2^2 + x_3^2 = b^2$ ($a = \infty, c = b$)		0	$1/2$	$1/2$
Пластина $x_3^2 = c^2$ ($a = b = \infty$)		0	0	1

Допустим, что изотропный ферромагнетик, имеющий эллипсоидальную форму, намагничен во внешнем однородном поле \vec{H} , направленном вдоль одной из геометрических (канонических) осей эллипсоида. Из соображений симметрии следует, что $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}$, поэтому (если речь идет об оси x_α) формула (7.51) дает:

$$H_{o_\alpha} = -N_\alpha J_\alpha = -N_\alpha J$$

(все остальные компоненты \vec{H}_o равны нулю). Таким образом (см. (7.41)), внутри образца

$$\vec{H} = \vec{H} + \vec{H}_o = \vec{H} - N_\alpha \vec{J} = (\mathbf{H} - N_\alpha \mathbf{J})\vec{H}/H$$

(буквы без стрелок обозначают здесь модули соответствующих векторов). Вследствие условия $N_\alpha > 0$ истинное поле (H) в ферромагнетике может оказаться заметно меньше внешнего, что и оправдывает термин «размагничивающее поле», используемый для \vec{H}_o .

Заметим, что размагничивающее поле существенно влияет на ход кривых намагничивания (величина J , определяемая полем H , приобретает меньшее значение, чем то, которое можно было бы ожидать при заданном H).

Отдельно остановимся на размагничивающем поле внутри тора. Тор – тело, ограниченное поверхностью, получаемой от вращения окружности (окружность α на рис. 7.17) вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее (на рис. 7.17 ось проходит через точку O перпендикулярно плоскости чертежа). Предполагается, что намагничивание тороидального ферромагнетика осуществляется с помощью проволочной обмотки с числом витков N , подсоединяемой к источнику внешней ЭДС через клеммы A и B .

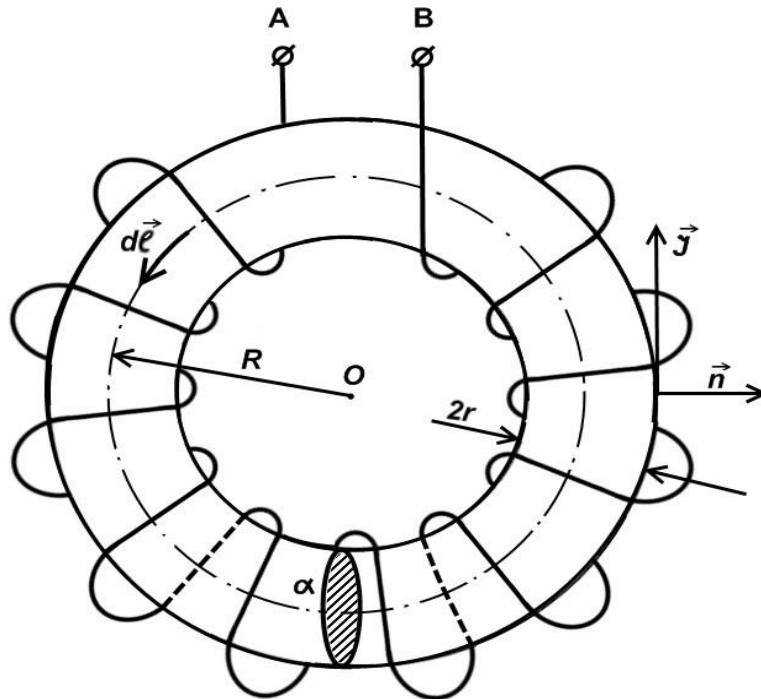


Рис. 7.17

Известно, что следствием первого уравнения (7.42) является *теорема о циркуляции*, которую мы применим к осевой линии тора (---), считая, что поле \vec{H} всюду касательно к этой линии и имеет один и тот же модуль H во всех ее точках:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi R = NI,$$

где I – мгновенное значение (квазистационарного) тока в обмотке. Отсюда

$$H = NI/2\pi R. \quad (7.54)$$

Если радиус окружности α $r \ll R$, приближенно можно считать, что формула (7.54) верна во всех точках тора, причем направлено \vec{H} перпендикулярно плоскостям окружностей, получаемых при вращении α . Наконец, исходя из соображений симметрии, следует ожидать, что всюду внутри тора

$$\vec{J} \approx C\vec{H}, \quad (7.55)$$

где C – некоторая постоянная.

Введем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ с осью Oz , направленной перпендикулярно плоскости рис. 7.17. Тогда $J_z \equiv 0$, а компоненты J_x и J_y в произвольной точке тора можно найти из рис. 7.18 ($R - r < \rho < R + r$):

$$J_x = -J \sin \theta, \quad J_y = J \cos \theta.$$

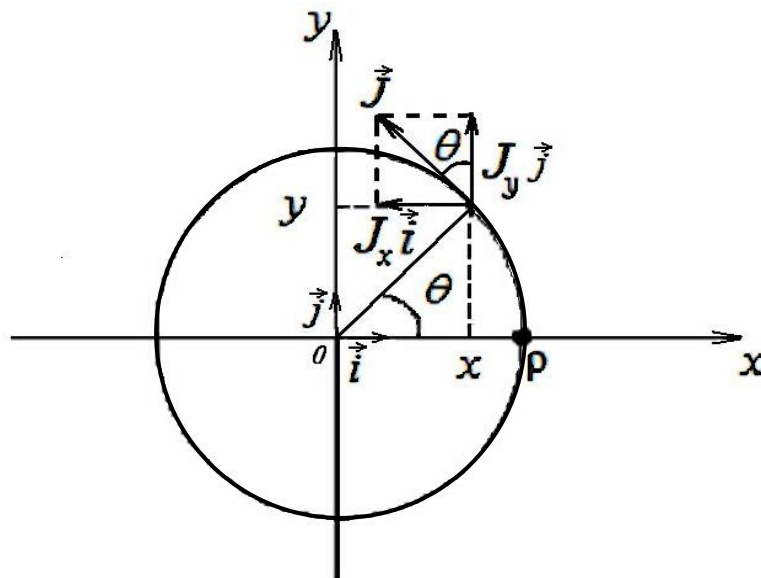


Рис. 7.18

Но $\sin \theta = y/\rho$, $\cos \theta = x/\rho$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом,

$$J_x = -Jy/\sqrt{x^2 + y^2}, \quad J_y = Jx/\sqrt{x^2 + y^2}, \quad J_z = 0.$$

Вычислим $\text{div} \vec{J}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{J} &\equiv \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = J \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \\ &= J \left[x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1/2} - y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1/2} \right] = \\ &= J \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y - y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x \right] = 0.\end{aligned}$$

Далее, будучи перпендикулярными к окружностям типа α , векторы \vec{J} на поверхности тора не имеют составляющих в направлении нормали \vec{n} к поверхности: $J_n = 0$. В результате формула (7.48) дает:

$$\psi \equiv 0$$

(это потенциал, обращающийся в нуль «на бесконечности»). Отсюда (см. (4.47))

$$\vec{H}_0^{\text{тора}} = 0. \quad (7.56)$$

Итак, при работе с тонкими тороидальными образцами размагничивающее поле можно не учитывать: $\vec{H} \approx \vec{H}$. Заметим, что наши рассуждения легко модифицировать на случай $J = J(\rho)$, однако неоднородно (по модулю) намагнитенные образцы мы применять не будем.

ПОНЯТИЕ О ТЕОРИИ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА

Как уже отмечалось ранее, причиной ферромагнетизма являются обменные силы. **Обменное взаимодействие** – специфическое взаимное влияние тождественных частиц, эффективно проявляющееся как результат некоторого особого силового действия частиц друг на друга.

Ключевым моментом в понимании природы обменных сил оказывается существование у электрона собственного механического момента – **спина**. Электроны – важнейший пример фермионов, т.е. частиц с *полуцелым* спином

(спин электрона равен $\frac{1}{2}\hbar$, где \hbar – постоянная Планка). В интересующем нас

случае основным реальным (не эффективным) взаимодействием между электронами является их кулоновское отталкивание, не зависящее от спинов. Состояние любой системы в (нерелятивистской) квантовой механике описывается *волновой функцией* – функцией от координат и спинов, составляющих систему частиц. В рассматриваемой ситуации волновая функция представляется в виде произведения двух функций; одна из них зависит только от координат частиц, а другая – только от спинов. Полная волновая функция системы должна быть *антисимметричной* по отношению к перестановке переменных любой пары частиц (*принцип Паули*, который находит объяснение лишь в релятивистской квантовой теории).

В результате координатная часть волновой функции, описывающая движение частиц в пространстве, обязана обладать определенной симметрией относительно перестановки координат частиц, зависящей от симметрии спиновой части волновой функции. Наличие такой симметрии означает, что имеется согласованность, корреляция движения одинаковых частиц, которая сказывается на энергии системы. Поскольку обычно влияние частиц друг на друга является результатом действия между ними каких-либо сил, о взаимном влиянии одинаковых частиц и говорят как о проявлении специфического – обменного – взаимодействия; оно на самом деле есть часть кулоновского взаимодействия электронов.

Имеются два хорошо известных случая. Пусть электроны принадлежат *одному и тому же атому*, но не образуют замкнутой оболочки. Здесь спины электронов стремятся расположиться так, чтобы полный спин имел максимальную величину, совместимую с числом независимых состояний в оболочке, подлежащей заполнению. Это есть *первое правило Хунда*, объясняющее, почему электроны в незаполненной *d*-оболочке атома переходного металла (к примеру, *3d*-переходной группой – *группой железа* – называется совокупность следующих элементов: Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni) обычно находятся в состоянии с отличным от нуля магнитным моментом (магнитный момент связан с механическим через гиромангнитное отношение – см. гл.4).

Примером другого рода служит модель молекулы водорода (H₂), предложенная *Гайтлером и Лондоном*, в которой *связанному состоянию* отвечают спаренные (противоположно направленные) спины. В первом случае с увеличением спина растет «степень симметрии» спиновой части волновой функции; соответственно, увеличивается «степень антисимметрии» координатной части. Чем «более антисимметрична» координатная волновая функция, тем меньше вероятность обнаружить электроны вблизи друг друга – тем меньше вклад от положительной энергии их отталкивания в полную энергию. В случае же молекулы H₂ требуется образование в пространстве между протонами «облака» повышенной электронной плотности, к которому протоны могут притягиваться, преодолевая взаимное электростатическое отталкивание. Таким образом, электроны должны иметь возможность находиться рядом; значит, их координатная волновая функция обязана быть симметричной, а спиновая – антисимметричной (спины противоположны). Соответствующие электронные состояния в квантовой химии называются *связывающими орбиталями*.

Обменное взаимодействие является наибольшим, но не единственным взаимодействием между атомами ферромагнетика. Наряду с ним имеет место взаимодействие между магнитными моментами атомов и взаимодействие между магнитными моментами и полем кристаллической решетки. Данные взаимодействия *релятивистские*, поэтому соответствующие им энергии значительно меньше обменной энергии W_{ex} , составляя по порядку величины $(v/c)^2 W_{ex}$, где v – характерная скорость электронов атома, c – скорость света в пустоте. Однако, несмотря на это, они играют существенную роль. Эта роль двоякая.

Во-первых, благодаря релятивистским взаимодействиям, в кристалле возникают избранные направления (оси легкого намагничивания), которым отвечает минимальное значение энергии ферромагнетика (энергия W_{ex} сама по себе не зависит от направления вектора намагниченности \vec{J}). На этом основании говорят, что упомянутые взаимодействия приводят к появлению энергии анизотропии.

Во-вторых, вследствие релятивистских взаимодействий может устанавливаться статистическое равновесие в системе спинов ферромагнетика.

Обычно в качестве существенной для нас части внутренней энергии ферромагнетика берут следующий интеграл по объему образца:

$$W = \int_V dV \left\{ w_{ex} + w_a + w_m - \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{H} \right\}, \quad (7.57)$$

где

$$w_{ex} = f(J^2) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \alpha_{ik} \frac{\partial \vec{J}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial x_k} - \quad (7.58)$$

объемная плотность энергии обменного взаимодействия;

$$w_a = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \beta_{ik} J_i J_k - \quad (7.59)$$

объемная плотность энергии анизотропии;

$$w_m = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{H}_0. \quad (7.60)$$

Здесь f – некоторая функция от J^2 , компоненты симметричного тензора α_{ik} по порядку величины равны

$$\alpha_{ik} \sim \frac{J_0}{\mu_B^2} a^5$$

(μ_B – магнетон Бора, a – постоянная кристаллической решетки, J_0 – величина обменного интеграла между соседними атомами – см. далее; укажем также, что $J_0 \sim k_B T_C$, где T_C – температура Кюри); в сумму (7.59) должны входить только такие комбинации компонент вектора \vec{J} , которые являются инвариантами относительно элементов симметрии кристалла.

Как правило, (7.57) рассматривается в качестве свободной энергии ферромагнетика, так что, например, параметры α_{ik} зависят от температуры T . Заметим, что выражение (7.57) есть функционал от вектора намагничивания $\vec{J}(r)$. Когда мы говорим о минимизации энергии, то подразумеваем вытекающее из второго принципа термодинамики условие минимальности свободной энергии при заданных температуре и объеме. Применяя к функционалу (7.57) методы вариационного исчисления, можно было бы, в принципе, получить уравнение для определения термодинамически равновесного распределения $\vec{J}(r)$ [в том числе

найти и возможную доменную структуру (так как домены имеют *макроскопические* размеры)].

Здесь, однако, мы лишь отметим, что образование доменов связано с установлением некоторого баланса обменной ($\int w_{ex}$) и магнитостатической ($\int w_m$) энергий. Границы между доменами (междоменные стенки) не являются бесконечно тонкими. Закон изменения направления намагниченности внутри стенки определяется компромиссом энергий анизотропии и обменной энергии. В *блховской стенке* (по имени американского физика Ф. Блоха) вектор \vec{J} при развороте всегда остается параллельным плоскости доменной границы; в *неелевской стенке* (по имени франц. физика Л. Нееля) разворот вектора \vec{J} происходит в плоскости, перпендикулярной плоскости границы.

Для тех, кто уже знаком с основами квантовой механики, приведем явный вид *обменного гамильтониана Гейзенберга*:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{R} \neq \vec{R}'} \hat{S}(\vec{R}) \cdot \hat{S}(\vec{R}') J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}') + 2\mu_B \mu_0 \mathbf{H} \sum_{\vec{R}} \hat{S}_z(\vec{R}). \quad (7.61)$$

Здесь «шляпки» $\hat{}$ помечают квантовомеханические *операторы*; $\hat{S}(\vec{R})$ – оператор спина магнитного иона, расположенного в узле \vec{R} кристаллической решетки (спин измеряется в единицах \hbar); $J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}')$ – некоторая функция от $\vec{R} - \vec{R}'$ (суммирование производится по всем парам атомов кристалла). Эта функция, называемая *обменным интегралом атомов \vec{R} и \vec{R}'* , очень быстро, экспоненциально, убывает с увеличением расстояния $|\vec{R} - \vec{R}'|$ между ними. Поэтому практически обменный интеграл отличен от нуля только для ближайших соседей.

Первое слагаемое (7.61) и есть гамильтониан Гейзенберга. Во втором слагаемом \mathbf{H} – величина (внешнего) магнитного поля, направление которого выбрано за направление оси Oz декартовой системы координат $Oxyz$. Тогда (в системе СИ) $\mu_0 \mathbf{H}$ – отвечающая данному полю индукция. Далее,

$$2\mu_B \hat{S}_z = 2 \cdot \frac{|e|\hbar}{2m} \hat{S}_z = \frac{|e|\hbar}{m} (\hbar \hat{S}_z) \equiv -\Gamma_{\text{спин}} (\hbar \hat{S}_z) \equiv -\hat{p}_{\text{спин}_z}.$$

Здесь используются, в сущности, те же обозначения, что и в формулах (4.24), (4.25) и (4.26) гл. 4. Разница лишь в том, что вместо классических моментов берутся соответствующие операторы, а орбитальное гироманнитное отношение заменено на спиновое:

$$\Gamma_{\text{спин}} \cong 2\Gamma_{\text{обр}} = \frac{e}{m} < 0. \quad (7.62)$$

С учетом изложенного имеем:

$$\hat{H}_{\text{Зееман}} \equiv 2\mu_B\mu_0\mathbf{H}\sum_{\vec{R}}\hat{S}_z(\vec{R}) = -(\mu_0\mathbf{H})\sum_{\vec{R}}\hat{p}_{\text{спин}_z} - \quad (7.63)$$

квантовый аналог формулы (4.31) гл. 4 (П. Зееман – нидерландский физик).

Для ферромагнетиков обменный интеграл положителен,

$$J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}') > 0, \quad (7.64)$$

благодаря чему в основном состоянии спины всех атомов, а следовательно, и магнитные моменты имеют одинаковую ориентацию. Есть основания считать, что обменный гамильтониан правильно описывает ту часть энергетического спектра ферромагнетика, которая находится вблизи основного состояния. Следует, однако, помнить, что для вывода гамильтониана Гейзенберга необходимо использовать много тонких физических предположений и сделать довольно сложные приближения. Обменный гамильтониан приводит к выражению (7.58); плотности же (7.59) и (7.60) получаются при дополнительном учете релятивистских магнитного дипольного и спин-орбитального взаимодействий.

Магнитное упорядочение в ферромагнетиках исчезает при температурах $T > T_c$ (температуры Кюри). Наблюдаемое поведение намагниченности ниже T_c (непосредственно вблизи T_c) хорошо описывается степенным законом

$$J(T) \sim (T_c - T)^\beta, \quad T \rightarrow T_c - 0, \quad (7.65)$$

где типичное значение β лежит между 0,33 и 0,37. В отсутствие магнитных взаимодействий при уменьшении температуры магнитная восприимчивость $\chi_{\text{парама}} \sim 1/T$ (закон Кюри). Однако в ферромагнетике восприимчивость неограниченно возрастает при $T \rightarrow T_c + 0$:

$$\chi(T) \sim \frac{1}{(T - T_c)^\gamma}, \quad (7.66)$$

где обычно $1,3 < \gamma < 1,4$. Имеется также характерная особенность теплоемкости (в нулевом поле), отвечающая критической точке магнитного перехода:

$$c(T) \sim \frac{1}{(T - T_c)^\alpha}. \quad (7.67)$$

Эта особенность не столь сильно выражена, как у восприимчивости, поскольку $0 < \alpha \leq 0,1$.

Описание перехода магнетика из парамагнитной фазы (при $T > T_c$) в ферромагнитную (при $T < T_c$) даже с использованием модельного гамильтониана Гейзенберга наталкивается на серьезные трудности. Радикального упрощения можно достичь, оставляя в произведении $\hat{S}(\vec{R}) \cdot \hat{S}(\vec{R}')$ лишь члены $\hat{S}_z(\vec{R}) \cdot \hat{S}_z(\vec{R}')$, переходя к приближению ближайших соседей и, главное, рассматривая двумерную решетку. Так возникает двумерная модель Изинга, в которой все необходимые вычисления могут быть доведены до конца (решение

Онсагера. Л. Онсагер – американский физик и химик). Математическая сложность упомянутого решения весьма велика, хотя модель Изинга является всего лишь достаточно грубой попыткой отразить структуру реального ферромагнитного вещества (точнее, ферромагнитного домена).

Исторически первой теорией спонтанной намагниченности (1907г.) была **теория молекулярного поля Вейсса** (П. Вейсс – французский физик). Выразим (см. выше) оператор спина \hat{S} через оператор магнитного момента (индекс «спин») опускаем:

$$\hat{S} = (-1/2\mu_B) \hat{p},$$

тогда вместо (7.61) и (7.62) получим

$$\hat{H} = -\frac{1}{(2\mu_B)^2} \frac{1}{2} \sum_{\vec{R} \neq \vec{R}'} \hat{p}(\vec{R}) \cdot \hat{p}(\vec{R}') J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}') - \mu_0 \vec{H} \cdot \sum_{\vec{R}} \hat{p}(\vec{R}). \quad (7.68)$$

Выделим в (7.68) члены, содержащие $\hat{p}(\vec{R})$:

$$-\hat{p}(\vec{R}) \cdot \left\{ \mu_0 \vec{H} + \frac{1}{(2\mu_B)^2} \sum_{\vec{R}'} J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}') \hat{p}(\vec{R}') \right\}.$$

Можно, очевидно, ввести *оператор эффективного внешнего поля*:

$$\hat{H}_{eff} = \vec{H} + \frac{1}{(2\mu_B)^2 \mu_0} \sum_{\vec{R}'} J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}') \hat{p}(\vec{R}').$$

В приближении молекулярного поля оператор \hat{H}_{eff} заменяют средним значением, отвечающим термодинамическому равновесию:

$$\hat{p}(\vec{R}') \rightarrow \vec{J}/n,$$

где n – концентрация магнитных атомов. Тогда

$$\hat{H}_{eff} \rightarrow \vec{H}_{eff} = \vec{H} + \frac{1}{(2\mu_B)^2 \mu_0} \frac{\vec{J}}{n} \sum_{\vec{R}'} J_{ex}(\vec{R} - \vec{R}') \approx \vec{H} + \frac{qJ_0}{(2\mu_B)^2 \mu_0 n} \vec{J}.$$

Здесь q – число ближайших соседей атома \vec{R} (*координационное число*), а J_0 (как и раньше) – величина обменного интеграла между соседними атомами. Итак,

$$\vec{H}_{eff} = \vec{H} + (\Lambda/\mu_0) \vec{J}, \quad \Lambda = \frac{qJ_0}{(2\mu_B)^2 n}. \quad (7.69)$$

Пусть каждый атом ведет себя подобно магнетику с магнитным моментом p (подобный момент может быть связан, например, с незаполненной d -оболочкой иона переходного металла). Предположим, что все атомы независимы и, будучи локализованными, подчиняются статистике Больцмана. Тогда остаются справедливыми основные результаты гл. 4, касающиеся парамагнетизма, с заменой \vec{H} на \vec{H}_{eff} . В частности, в формуле (4.32) гл. 4 нужно заменить

$$B \rightarrow \mu_0 \mathbf{H} \rightarrow \mu_0 \mathbf{H}_{eff}$$

[собственно, использование функции Ланжевена L возможно лишь при больших спиновых квантовых числах (в принятой нами модели)]. В результате имеем:

$$J = npL\left(\frac{p\mu_0 \mathbf{H}_{eff}}{k_B T}\right),$$

$$J = npL\left(\frac{p\mu_0 \mathbf{H} + p\Lambda J}{k_B T}\right). \quad (7.70)$$

Введем обозначения:

$$j = \frac{p\Lambda}{k_B T} J = \frac{pqJ_0}{(2\mu_B)^2 nk_B T} J; \quad h = \frac{p\mu_0}{k_B T} \mathbf{H}. \quad (7.71)$$

Тогда после несложных преобразований уравнение (7.70) переписывается в виде:

$$j = CL(h + j), \quad C = \left(\frac{p}{2\mu_B}\right)^2 \frac{qJ_0}{k_B T}. \quad (7.72)$$

Графическое решение уравнения (7.72) для $h > 0$ иллюстрируется рис. 7.19:

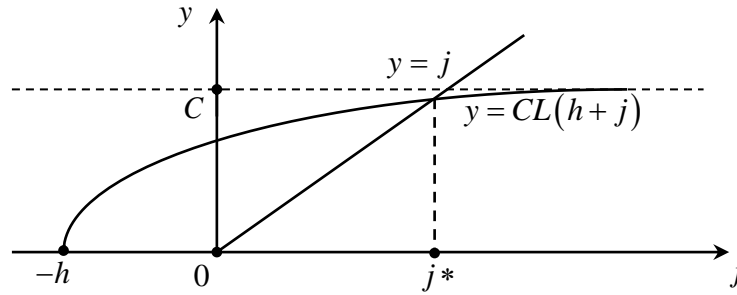


Рис. 7.19

Здесь j^* – всегда существующий единственный корень трансцендентного уравнения (7.72), который и дает (безразмерную) намагниченность в заданном (безразмерном) внешнем поле h .

Не так обстоит дело при $h = 0$. Имеющиеся варианты показаны на рис. 7.20 и 7.21:

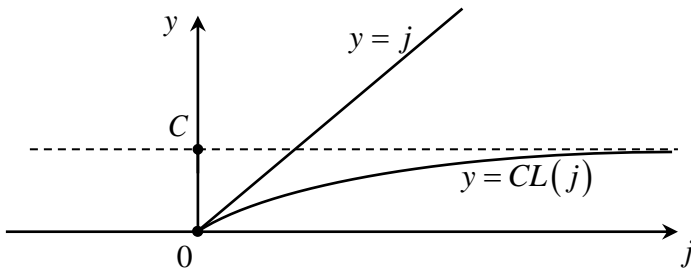


Рис. 7.20

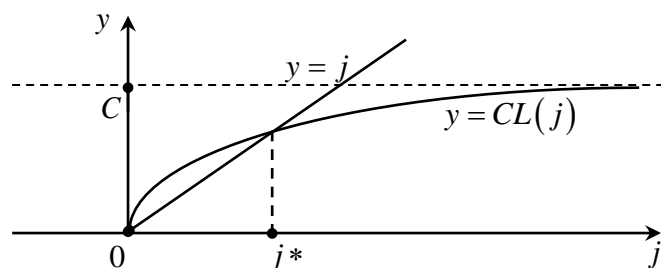


Рис. 7.21

«Малым» C отвечает рис. 7.20 («большим» температурам). Здесь спонтанная намагниченность ($h = 0!$) не возникает. Напротив, при «больших» C («малых» температурах), как это видно из рис. 7.21, налицо намагниченность j^* в нулевом

поле. Очевидно, что пограничной между указанными случаями является ситуация, когда прямая $y = j$ касается кривой $y = CL(j)$ в точке $j = 0$.

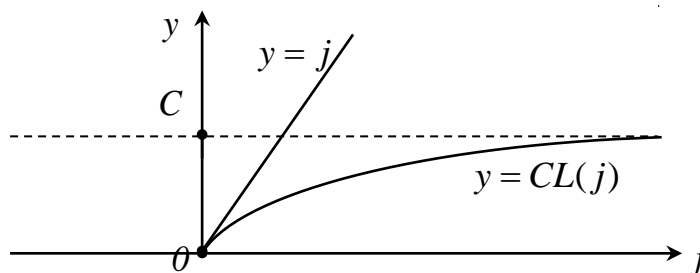


Рис. 7.22

Здесь произвольно малое изменение C тут же приводит нас либо к варианту рис. 7.20, либо к варианту рис. 7.21.

Условие касания кривой $y = CL(j)$ и биссектрисы первого координатного угла в точке $j = 0$ есть равенство

$$CL'(0) = 1.$$

С помощью формул (4.33) и (4.34) гл. 4 находим тейлорово разложение $L(j)$:

$$L(j) = \operatorname{cth}j - \frac{1}{j} = \frac{1}{3}j - \frac{1}{45}j^3 + \dots,$$

так что $L'(0) = \frac{1}{3}$. Отсюда получаем значение $C = 3$, которое следует использовать для определения температуры Кюри T_c (см. (7.72)):

$$\left(\frac{p}{2\mu_B}\right)^2 q \frac{J_0}{k_B T_c} = 3;$$

$$T_c = \left(\frac{p}{2\mu_B}\right)^2 \frac{qJ_0}{3k_B}. \quad (7.73)$$

Пусть, наконец, $T > T_c$ и $h \rightarrow +0$. Тогда из сравнения рис. (7.19) и (7.20) можно понять, что $j^* \rightarrow +0$. Заменяя j^* на j , запишем уравнение (7.72), полагая $L(h+j) \approx \frac{1}{3}(h+j)$:

$$j \approx C \cdot \frac{1}{3}(h+j).$$

Отсюда

$$j = \frac{(C/3)h}{1 - C/3} \quad C/3 < 1.$$

Далее, формулы (7.72) и (7.73) дают:

$$C/3 = \left(\frac{p}{2\mu_B} \right)^2 \frac{qJ_0}{3k_B T} = T_c/T.$$

Таким образом,

$$j = \frac{T_c}{T - T_c} h \quad T > T_c.$$

Подставляя в последнее равенство j и h из (7.71), получим

$$J = \mu_0 \frac{T_c}{T - T_c} \frac{(2\mu_B)^2}{qJ_0} nH.$$

Заменяя здесь T_c выражением (7.73), найдем, что

$$J = \frac{1}{T - T_c} \frac{\mu_0 n p^2}{3k_B} H. \quad (7.74)$$

Введем для $T > T_c$ магнитную восприимчивость $\chi = J/H$. Тогда из (7.74) следует **закон Кюри–Вейсса**:

$$\chi = \mu_0 \frac{np^2}{3k_B (T - T_c)}. \quad (7.75)$$

Отметим, что если формально распространить этот закон на случай $T \gg T_c$, то получится

$$\chi = \mu_0 \frac{np^2}{3k_B T}$$

результат (4.37) гл. 4 для парамагнитной восприимчивости.

Подсчитаем еще «константу молекулярного поля»:

$$\Lambda = \frac{qJ_0}{(2\mu_B)^2 n} = \frac{3}{p^2} \left(\frac{p}{2\mu_B} \right)^2 \frac{qJ_0}{3} \frac{1}{n} = \frac{3}{np^2} k_B T_c;$$

$$\frac{\Lambda}{\mu_0} = \frac{3}{\mu_0 np^2} k_B T_c = \left(\mu_0 \frac{np^2}{3k_B T_c} \right)^{-1} \equiv \left. \frac{1}{\chi_{\text{парама}}} \right|_{T=T_c}.$$

Здесь $\chi_{\text{парама}}$ – магнитная восприимчивость магнетика с «выключенным» обменным взаимодействием. Заметим, что среди переходных d -металлов ферромагнитны лишь Fe, Co, Ni, составляющие основу почти всех магнитных материалов. Температуры Кюри для них соответственно равны: $T_{c\text{Fe}} \approx 1044$ К, $T_{c\text{Co}} \approx 1388$ К, $T_{c\text{Ni}} \approx 627$ К. Таким образом, величины $\chi_{\text{парама}}|_{T=T_c}$ указанных веществ должны быть малы по сравнению с единицей, так что

$$\Lambda/\mu_0 \gg 1. \quad (7.76)$$

Закон (7.75) довольно плохо согласуется с наблюдаемым поведением восприимчивости (7.66). Это означает, что теория Вейсса не дает правильного количественного описания явлений в точке ферромагнитного перехода, хотя гипотеза о сильном молекулярном поле ($\frac{\Lambda}{\mu_0} J$) и представляется интересной.

О ВОСПРОИЗВЕДЕНИИ КРИВЫХ НАМАГНИЧИВАНИЯ НА ОСЦИЛЛОГРАФЕ

На рис. 7.6 приведена схема для исследования намагничивания ферромагнитного образца. Катушка K_1 создает внутри тороида T (внешнее) поле

$$H = \frac{NI}{2\pi R} \equiv nI$$

(см. (7.54)). Вкладом в H от измерительной катушки K_2 можно пренебречь из-за малости тока в последней ($R_{25} \gg r_0$). Кроме того, как было показано, размагничивающее поле внутри тора отсутствует, так что действительно

$$H = nI. \quad (7.77)$$

Анализ процессов, происходящих в намагничивающей цепи, следует проводить, используя уравнение (6.4) гл. 6, взятое в форме

$$r_0 I = \varepsilon_0(t) - d\Phi/dt,$$

где $\varepsilon_0(t)$ – синусоидальная ЭДС частоты $\nu = 1$ кГц, вырабатываемая функциональным генератором (ФНГ). Если бы ферромагнетика не было, то для Φ мы бы имели выражение

$$\Phi \approx \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} NS \equiv LI,$$

где

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{2\pi R}.$$

Одновременно оказалось бы, что

$$d\Phi/dt \sim L\omega I = 2\pi\nu LI.$$

Возьмем численные значения параметров катушки K_1 ($N = 100$; $S = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$; $2\pi R = 28,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$; $\nu = 10^3 \text{ Гц}$) и подсчитаем величину $2\pi\nu L$:

$$2\pi\nu L \approx 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ (в системе единиц СИ)}.$$

При наличии ферромагнетика ($\mu_r = 1 + \chi \approx \chi$) очень грубо можно положить, что

$$d\Phi/dt \sim 1,12 \cdot 10^{-2} \chi_{\text{средн}} I,$$

где $\chi_{\text{средн}}$ – некоторое характерное значение восприимчивости образца за цикл перемагничивания. На самом деле нам нужно, чтобы (по модулю)

$$\frac{d\Phi}{dt} \ll r_0 I. \quad (7.78)$$

В этом случае сигнал $U_0 \equiv I r_0 \approx \mathcal{E}_0$, так что на вход «X» осциллографа будет подаваться (слабо искаженная) внешняя синусоидальная ЭДС, причем

$$U_0 \cong I r_0 = \frac{H}{n} r_0 \equiv H/k_X.$$

У нас $r_0 = 10$ Ом; таким образом, (7.78) приобретает вид:

$$1,12 \cdot 10^{-2} \chi_{\text{средн}} I \ll 10 I,$$

$$\chi_{\text{средн}} \ll (1,12)^{-1} \cdot 10^3 \sim 10^3.$$

Последнему неравенству, в принципе, можно удовлетворить, взяв, например, техническое железо (0,2% примеси, $\chi_a = 150$, $\chi_{\text{max}} = 5000$ – см. рис. 7.13) или мягкую сталь (0,2% C+Fe, $\chi_a = 120$, $\chi_{\text{max}} = 2000$).

Перейдем к рассмотрению измерительной цепи, состоящей из катушки K_2 , резистора R_{25} и конденсатора C_3 . Уравнение (6.4) гл. 6 пишем в виде

$$R_{25} \dot{q} + \frac{q}{C_3} = d\Phi/dt$$

[вследствие (6.5) гл. 6 $I_k = \dot{q}$; внешнюю ЭДС берем в форме ЭДС индукции $d\Phi/dt$ – эта величина такая же, как в намагничивающей катушке из-за одинаковости числа витков; знак « \rightarrow » в правой части опускаем – его всегда можно устранить «правильной» перестановкой клемм 4 и 5, ЭДС самоиндукции пренебрегаем по сравнению с ЭДС индукции ($I_k \ll I$)].

Производную \dot{q} грубо оцениваем как ωq . Необходимо, чтобы

$$R_{25} \omega q \gg q/C_3, \quad (7.79)$$

$$\tau \equiv R_{25} C_3 \gg 1/\omega.$$

Вычислим $\tau = 10^4 \cdot 68 \cdot 10^{-9} = 0,68 \cdot 10^{-3}$ (с); $1/\omega = 0,16 \cdot 10^{-3}$. $\tau/(1/\omega) \approx 4,3$, так что неравенство (7.79) выполняется в используемой схеме не очень хорошо.

Общее решение уравнения для q имеет вид:

$$q = q_0 e^{-t/\tau} + q_{\text{частн}}(t).$$

Здесь q_0 – произвольная постоянная, а $q_{\text{частн}}(t)$ – любое частное решение нашего дифференциального уравнения. При условии (7.79)

$$R_{25} \dot{q} \approx d\Phi/dt,$$

поэтому

$$q_{\text{частн}}(t) \approx \frac{1}{R_{25}} \Phi(t),$$

и

$$q \approx q_0 e^{-t/\tau} + \Phi(t)/R_{25}.$$

Для $t \gg 10^{-3}$ с остается

$$q \approx \Phi(t)/R_{25};$$

напряжение, подаваемое на вход «У» осциллографа,

$$U_c = q/C_3 = \Phi(t)/R_{25}C_3.$$

Поскольку $\Phi = NSB(t)$,

$$U_c = \frac{NS}{R_{25}C_3} B \equiv \frac{1}{k_y} B,$$

что и требуется.

Из-за проблем с условием (7.79) частное решение $q_{\text{частн}}(t)$ может отличаться от Φ/R_{25} , однако, как показывает опыт, связанные с данным обстоятельством искажения картины на экране осциллографа не слишком заметны.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На какие группы делятся все вещества по их магнитным свойствам? Какие вещества относятся к ферромагнетикам?
2. Что такое вектор намагничивания? Что показывает магнитная проницаемость ферромагнетика?
3. Как зависят намагниченность и магнитная индукция внутри ферромагнетика от напряженности магнитного поля?
4. От чего зависит удельная мощность потерь на перемагничивание ферромагнетика?
5. В чем состоит суть метода исследования ферромагнетика в переменном магнитном поле?
6. В каком случае напряжение на конденсаторе в измерительной схеме будет пропорционально индукции в образце?
7. Как используется явление гистерезиса в технике?

ГЛАВА 8

ИЗУЧЕНИЕ ВАКУУМНОГО ДИОДА И ПРОВЕРКА ФОРМУЛЫ БОГУСЛАВСКОГО – ЛЕНГМЮРА

Лабораторная работа 2–8

Цель работы: экспериментальное изучение зависимости анодного тока вакуумного диода от анодного напряжения и проверка теоретической формулы Богуславского–Ленгмюра для этой зависимости.

Приборы и принадлежности:

1. Повышающий трансформатор с выпрямителем.
2. Генератор 50 Гц.
3. Мультиметр 1, работающий в режиме вольтметра.
4. Мультиметр 2, работающий в режиме амперметра.
5. Измерительное сопротивление $R_{и}$.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Вакуумный диод представляет собой стеклянный баллон, из которого выкачан воздух. Внутри баллона помещены два металлических электрода: анод и катод. Форма электродов бывает различной. В данной работе используется диод с электродами в форме коаксиальных цилиндров (цилиндрический диод). Цилиндр с меньшим радиусом, катод, подогревается либо расположенной внутри него проволочной нитью, через которую пропускается электрический ток (ток накала), либо же ток пропускается через сам катод (катод прямого нагрева). Снаружи катод покрыт тонким слоем вещества, имеющего малую работу выхода электронов. В качестве такого вещества часто используют окислы щелочно-земельных металлов (оксидный катод).

В результате термоэлектронной эмиссии электроны вылетают из раскаленного катода и, не долетая до анода, образуют вокруг катода электронное облако (пространственный заряд). Если между анодом и катодом приложить анодное напряжение U_A , то под действием электрического поля электроны начнут двигаться к аноду и через диод потечет анодный ток (строго говоря, небольшой ток будет идти и в отсутствие разности потенциалов между анодом и катодом, однако мы не будем принимать его во внимание).

При небольших анодных напряжениях U_A сила анодного тока I_A растет с ростом напряжения. Это объясняется тем, что не все электроны, вылетевшие из

катода, попадают на анод. Часть из них возвращается обратно, отразившись от электронного облака. С увеличением напряжения U_A электронное облако вокруг катода постепенно рассасывается, всё большая часть электронов достигает анода, ток I_A возрастает. При некотором напряжении $U_A = U_{\text{нас}}$ наступает насыщение анодного тока: все электроны, вылетающие из катода, достигают анода, так что рост тока прекращается.

Таким образом, зависимость анодного тока от анодного напряжения (вольт-амперная характеристика диода) имеет вид, представленный на рис. 8.1. Максимальный (при постоянной температуре катода) анодный ток называется **током насыщения**. Он зависит от температуры катода, а именно, растет с ростом температуры, поскольку увеличивается число электронов, вылетающих из катода в результате термоэлектронной эмиссии.

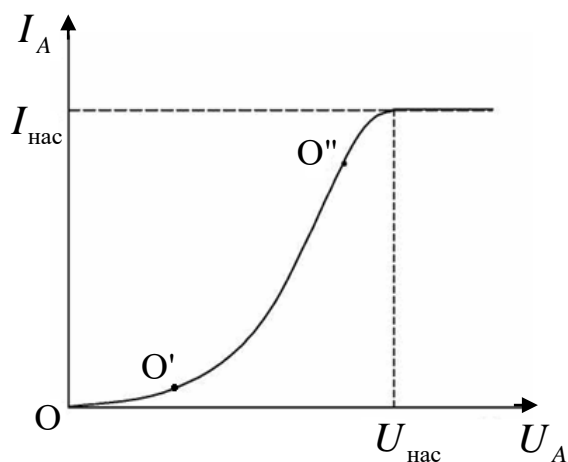


Рис. 8.1

Почти во всей области напряжений, где анодный ток ограничивается пространственным зарядом (область $O'O''$ на рис. 8.1), зависимость анодного тока от анодного напряжения дается теоретической **формулой Богуславского–Ленгмюра (закон трех вторых)**:

$$I_A = \alpha U_A^{3/2}, \quad (8.1)$$

где коэффициент пропорциональности α зависит от формы и расположения электродов в диоде.

Рассмотрим вывод закона трех вторых в наиболее простом случае, когда электродами являются параллельные плоские пластины, расстояние между которыми много меньше их размеров (плоский диод – см. рис. 8.2). В этом случае напряженность электрического поля \vec{E} внутри диода направлена вдоль оси X , перпендикулярной пластинам, и зависит только от x . Для нахождения $E_x(x)$ воспользуемся электростатической теоремой Гаусса. Рассмотрим плоский слой толщиной dx , параллельный пластинам. Поток вектора \vec{E} через поверхность этого слоя равен

$$d\Phi_E = (E_x + dE_x)S - E_x S = SdE_x, \quad (8.2)$$

где S – площадь каждой пластины. По теореме Гаусса этот поток равен dq/ϵ_0 , где $dq = \rho Sdx$ – заряд внутри слоя, ρ – объемная плотность пространственного заряда, ϵ_0 – электрическая постоянная. Таким образом,

$$SdE_x = \frac{1}{\epsilon_0} \rho Sdx, \quad \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (8.3)$$

Проекция напряженности поля \vec{E} на ось X связана с измеряемым относительно катода потенциалом $\varphi(x)$ соотношением

$$E_x(x) = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.4)$$

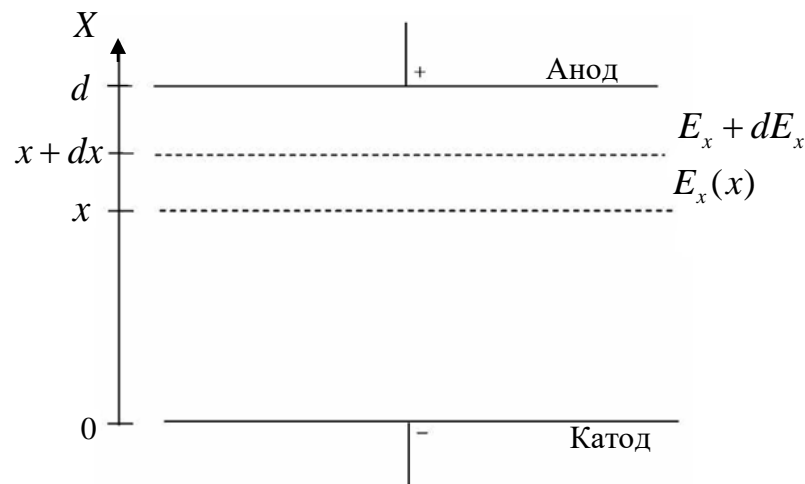


Рис. 8.2

Подставляя (8.4) в (8.3), получим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

Плотность заряда ρ связана с силой тока I_A , протекающего через диод, равенством

$$I_A = (-\rho)vS, \quad -\rho = \frac{I_A}{vS}, \quad (8.6)$$

где v – скорость электронов, находящихся в точке x ; знак "минус" в (8.6) учитывает тот факт, что $\rho < 0$.

Если в межэлектродном пространстве создан достаточно высокий вакуум, то столкновения электронов можно не учитывать и определить их скорость из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi, \quad v = \sqrt{\frac{2e}{m}}\varphi, \quad (8.7)$$

где $(-e)$ и m – соответственно заряд и масса электрона. При этом потенциал катода ($x=0$) мы принимаем равным нулю и пренебрегаем тепловыми скоростями, с которыми электроны покидают катод. Подставляя (8.6) и (8.7) в (8.5), получаем дифференциальное уравнение для потенциала $\varphi(x)$:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{b}{\sqrt{\varphi}}. \quad (8.8)$$

Здесь

$$b = (I_A/S\varepsilon_0)\sqrt{m/2e}. \quad (8.9)$$

Величина b постоянна, так как ток I_A не зависит, очевидно, от x .

Сопоставляя уравнения (8.5) и (8.8), видим, что объемная плотность заряда ρ на поверхности катода обращается в бесконечность. Таким образом, точка $x=0$ является особой точкой уравнения (8.8), так что при $x=0$ оно теряет смысл. Данный недостаток есть следствие идеализации, в которой полностью пренебрегается тепловым разбросом скоростей электронов, уходящих с поверхности катода. На самом деле на поверхности $x=0$ должна обращаться в нуль компонента E_x напряженности электрического поля. Если бы это было не так, то все эмиттируемые электроны увлекались бы полем к аноду и электронный ток достигал бы насыщения при любых напряжениях на лампе, что противоречит эксперименту. Следовательно, уравнения (8.8) надо дополнить граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow +0} \varphi = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} d\varphi/dx = 0. \quad (8.10)$$

Умножим теперь уравнение (8.8) на $2\frac{d\varphi}{dx}$:

$$2\frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2b \frac{d\varphi/dx}{\sqrt{\varphi}}. \quad (8.11)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = 2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Таким образом, вместо (8.11) получаем

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2b \frac{d\varphi/dx}{\sqrt{\varphi}}. \quad (8.12)$$

Проинтегрируем соотношение (8.12) по x от некоторого $\varepsilon > 0$ до произвольного $\varepsilon < x_0 \leq d$ (d – расстояние между электродами – см. рис. 8.2):

$$\int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = 2b \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{d\varphi/dx}{\sqrt{\varphi}} dx;$$

$$\int_{\varepsilon}^{x_0} d \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 4b \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}};$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \Big|_{\varepsilon}^{x_0} = 4b \sqrt{\varphi} \Big|_{x=\varepsilon}^{x=x_0};$$

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=x_0} \right]^2 - \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=\varepsilon} \right]^2 = 4b \left[\sqrt{\varphi(x_0)} - \sqrt{\varphi(\varepsilon)} \right].$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ с учетом граничных условий (8.10) и опуская индекс у x_0 , найдем, что

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 4b \sqrt{\varphi(x)}. \quad (8.13)$$

Извлекая квадратный корень из (8.13) (в правой части следует сохранить только знак «плюс», так как потенциал φ должен возрастать от катода к аноду), будем иметь

$$d\varphi/dx = 2\sqrt{b}\varphi^{1/4}.$$

Теперь можно разделить переменные:

$$\varphi^{-1/4} d\varphi = 2\sqrt{b} dx; \quad \int \varphi^{-1/4} d\varphi = 2\sqrt{b} \int dx + C.$$

Получившиеся интегралы берутся непосредственно. В результате оказывается, что

$$\frac{4}{3} \varphi^{3/4} = 2\sqrt{b}x + C.$$

Постоянная интегрирования C равна нулю вследствие первого из граничных условий (8.10). Итак,

$$\varphi^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{b}x. \quad (8.14)$$

Подставим в (8.14) значение b из (8.9):

$$\varphi^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{I_A}{S\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{m}{2e}} x.$$

Отсюда

$$I_A = \frac{4\varepsilon_0}{9x^2} S \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi^{3/2}.$$

При $x = d$ должно быть $\varphi = U_A$, так что

$$I_A = \alpha U_A^{3/2}, \quad \alpha = \frac{4\epsilon_0}{9d^2} S \sqrt{\frac{2e}{m}}. \quad (8.15)$$

Первое из равенств (8.15) есть закон трех вторых (8.1).

Закон трех вторых остается верным для электродов произвольной конфигурации. От формы электродов зависит только выражение для численного коэффициента α . Для случая цилиндрического диода станем писать

$$I_\alpha = \alpha_c U_A^{3/2}. \quad (8.16)$$

При малых напряжениях формулы (8.15), (8.16) дают заниженные значения тока I_A (в частности, кривая на рис. 8.1 должна начинаться несколько *левее* точки О), так как они не учитывают теплового разброса скоростей электронов. При больших U_A формулы были бы точны, если бы эмиссионная способность катода была сколь угодно велика. Поскольку это не так, при увеличении U_A в конце концов наступает насыщение, так что закон трех вторых утрачивает силу.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Снятие вольтамперных характеристик вакуумного диода проводится с помощью схемы, представленной на рис. 8.3.

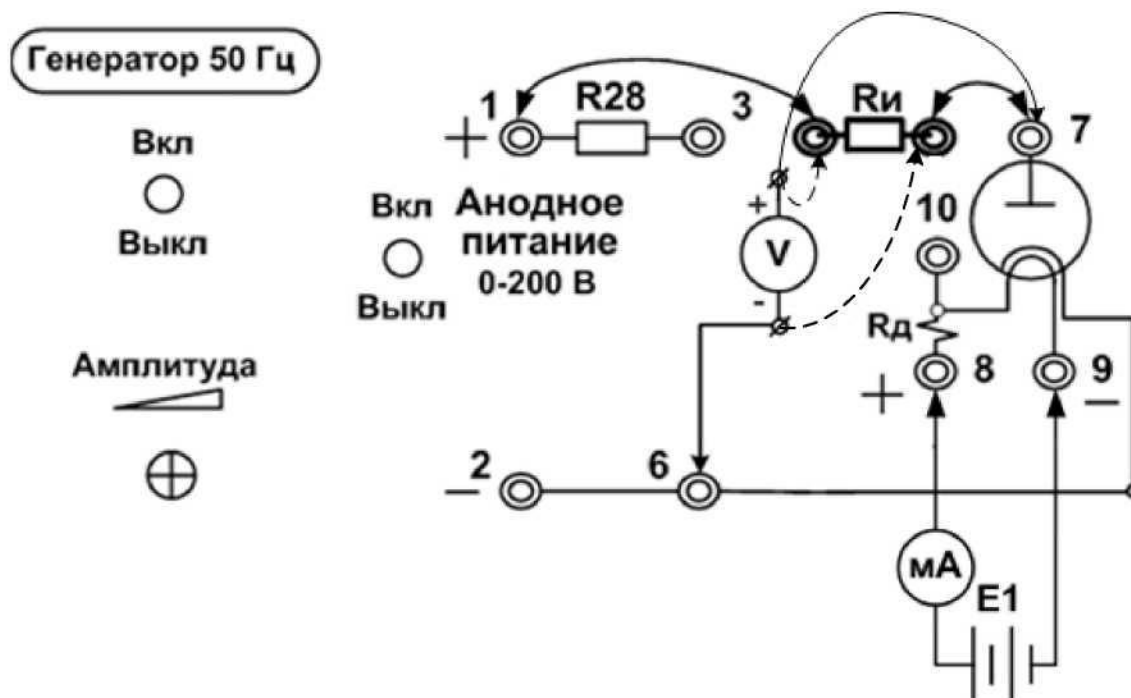


Рис. 8.3

В схеме рис. 8.3 высокое анодное напряжение (до 200 В) формируется внутренним повышающим трансформатором с выпрямителем. Первичным источником переменного сигнала является «Генератор 50 Гц», соединенный

внутри стенда с трансформатором. Поэтому «Выход 3» генератора нельзя подключать к исследуемой схеме. Регулировка уровня высокого анодного напряжения выполняется регулятором «Амплитуда» «Генератора 50 Гц». Анодное напряжение на вакуумном диоде измеряется первым мультиметром, включенным в режиме вольтметра, между клеммами 7 и 6 по шкале 0–200 В. При этом следует пользоваться стандартными щупами мультиметра и соблюдать осторожность при измерении высокого анодного напряжения. Анодный ток фиксируется на измерительном сопротивлении $R_{II}=100$ Ом тем же вольтметром

по шкале 200 мВ и рассчитывается по формуле: $I_A = \frac{U_{R_{II}}}{100}$. **Не забывайте**

переключать шкалы вольтметра при измерениях. Ток накала регулируется источником напряжения E_1 и измеряется вторым мультиметром в режиме миллиамперметра. Ток накала не должен превышать 200 мА.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Собрать схему рис. 8.3, соблюдая полярность включения источника напряжения E_1 . Установить минимальное значение E_1 , повернув ручку регулятора против часовой стрелки.
2. Повернуть ручку «Амплитуда» генератора 50 Гц против часовой стрелки в крайнее положение.
3. Включить «Генератор 50Гц», включить тумблер «Анодное питание».
4. Медленно увеличивая E_1 , установить небольшой ток накала (150 мА). Прогреть лампу в течение пять минут. Снять зависимость анодного тока от анодного напряжения, увеличивая анодное напряжение регулировкой «Амплитуда» генератора 50 Гц от нуля до 200 В. Результаты записать в табл. 8.1.

Таблица 8.1

$I_H, \text{мА}$	$U_A, \text{В}$	0					200
150	$I_A, \text{мА}$						
170	$I_A, \text{мА}$						
190	$I_A, \text{мА}$						

5. Увеличивая ток накала и прогревая лампу в течение пяти мин, снять вольтамперные характеристики еще для двух значений тока накала. Результаты записать в таблицу.
6. После окончания измерений выключить тумблер «Анодное питание», выключить генератор 50 Гц, уменьшить до минимального напряжение источника E_1 .

Обработка результатов измерений

1. На миллиметровой бумаге построить вольтамперные характеристики $I_A = f(U_A)$, указав для них соответствующие токи накала.
2. Для одного из значений тока накала возвести напряжения U_A (в вольтах) в степень три вторых и построить график зависимости анодного тока (в амперах) от $U_A^{3/2}$. Убедиться, что в некоторой области напряжений график имеет прямолинейный участок. Определить коэффициент α_C в формуле Богуславского–Ленгмюра (8.16) как тангенс угла наклона этого прямолинейного участка.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Подчиняется ли вакуумный диод закону Ома?
2. Что такое закон трех вторых и при каких (больших или малых) анодных напряжениях он справедлив?
3. Вывести закон трех вторых для плоского диода.
4. От чего зависит коэффициент пропорциональности α в законе трех вторых?
5. Почему при малых анодных напряжениях анодный ток растет с ростом U_A ?
6. Почему при больших анодных напряжениях наступает насыщение анодного тока? Что такое ток насыщения?
7. Как изменяется ток насыщения с ростом температуры катода?
8. Что такое оксидный катод? Для чего нагревается катод?
9. Каким образом изменяется температура катода в данной работе?

ГЛАВА 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНА ИЗ ВОЛЬФРАМА

Лабораторная работа 2–9

Цель работы: построение и изучение вольтамперной характеристики вакуумного диода; исследование зависимости плотности тока насыщения термоэмиссии от температуры катода и определение работы выхода электрона из вольфрама методом прямых Ричардсона.

Приборы и принадлежности:

1. Вакуумный диод прямого накала.
2. Источник тока E1.
3. Мультиметр 1, работающий в режиме миллиамперметра.
4. Вольтметр.
5. Генератор 50 Гц.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Свойства металлов в значительной степени определяются состоянием электронов проводимости, т.е. электронов, способных перемещаться в металле. При обычных температурах имеющиеся в металле свободные электроны удерживаются внутри металла. Это означает, что на границе металл – вакуум существует потенциальный барьер, мешающий электронам покинуть металл. Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется *работой выхода*.

Распределение энергии электрона для металла изображено на энергетической диаграмме (рис. 9.1). Штрихами показаны незанятые энергетические уровни при 0 К, сплошными горизонтальными линиями – энергетические уровни электронов. При абсолютном нуле значения кинетической энергии электронов проводимости заключены в пределах от нуля до совпадающей с *уровнем Ферми* E_F энергии E_{\max} .

Для удаления за пределы металла разным электронам нужно сообщить неодинаковую энергию. Так, электрону, находящемуся на самом нижнем уровне зоны проводимости, необходимо сообщить энергию E_C . Обычно принимают, что работа выхода электрона из металла определяется выражением

$$A_{\text{ВЫХ}} = E_C - E_F . \quad (9.1)$$

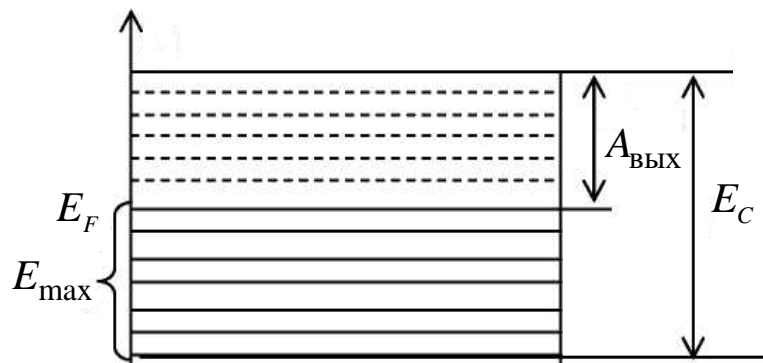


Рис. 9.1

При комнатных температурах практически все свободные электроны заперты в пределах проводника и имеется лишь небольшое количество электронов, энергия которых достаточна для преодоления потенциального барьера и выхода из металла. Однако, если электронам сообщить дополнительную энергию, то часть электронов металла получает возможность покинуть металл и наблюдается испускание электронов, т.е. электронная **эмиссия**.

В зависимости от того, каким способом сообщена электронам энергия, различают разные типы электронной эмиссии. Если электроны получают энергию за счет тепловой энергии тела при повышении его температуры, то говорят о **термоэлектронной эмиссии**. Если энергия подводится светом, имеет место явление **фотоэмиссии**. Если энергия сообщается электронам при бомбардировке извне какими-то другими частицами, наблюдается **вторичная эмиссия**.

Для наблюдения термоэлектронной эмиссии используют вакуумную лампу, содержащую два электрода: накаливаемый током катод и холодный электрод, собирающий термоэлектроны – анод. Такие лампы называются **вакуумными диодами**.

На рис. 9.2 изображена схема включения такого диода. Ток в цепи появляется только в том случае, если положительный полюс батареи соединен с анодом 1, а отрицательный – с катодом 2. Это подтверждает, что катод испускает отрицательные частицы (электроны). Сила термоэлектронного тока в диоде, измеряемая с помощью миллиамперметра 3, зависит от величины потенциала анода относительно катода.

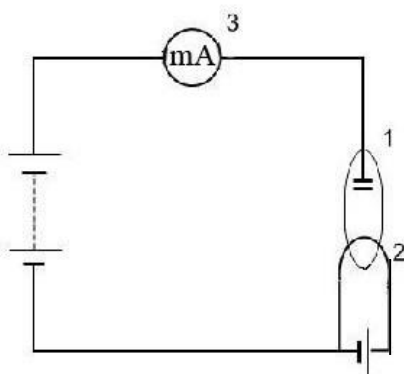


Рис. 9.2

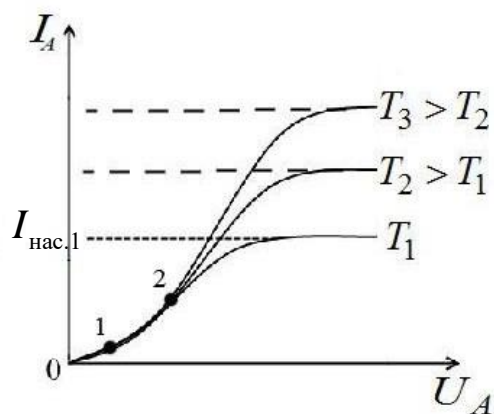


Рис. 9.3

Кривая, изображающая зависимость силы тока в диоде I_A от анодного напряжения U_A , называется *вольтамперной характеристикой*. На рис. 9.3 показаны вольтамперные характеристики диода при разных температурах катода. Когда потенциал анода равен нулю, сила тока мала. Она определяется лишь самыми быстрыми термоэлектронами, способными достигнуть анода. При увеличении положительного потенциала анода величина тока возрастает и затем достигает насыщения, т.е. почти перестает зависеть от анодного напряжения. При увеличении температуры катода возрастает и значение тока, при котором достигается насыщение. Одновременно увеличивается и то анодное напряжение, при котором устанавливается ток насыщения. Таким образом, вольтамперная характеристика диода оказывается *нелинейной*, т.е. диод является примером проводника, не подчиняющегося закону Ома. Это объясняется тем, что при термоэлектронной эмиссии у поверхности катода возникает довольно большая плотность электронов. Они создают общий отрицательный заряд, и электроны, вылетающие с малой скоростью, не могут его преодолеть. С увеличением анодного напряжения концентрация электронов в облаке пространственного заряда уменьшается. Поэтому и тормозящее действие пространственного заряда делается меньше, а анодный ток растет быстрее, чем в прямой зависимости от анодного напряжения.

Теоретическая зависимость анодного тока от анодного напряжения на участке 1–2 была получена Ленгмюром и Богуславским и называется "*законом трех вторых*":

$$I_A = \alpha U_A^{3/2}. \quad (9.2)$$

По мере роста анодного напряжения все больше электронов, вылетевших из катода, попадает на анод. При определенном значении U_A все вылетевшие из катода за единицу времени электроны достигают анода. Дальнейший рост анодного напряжения не может увеличить силу анодного тока, поскольку достигается насыщение. Максимальный термоэлектронный ток, возможный при данной температуре катода, называется *током насыщения*.

При повышении температуры увеличивается скорость хаотического движения электронов в металле. При этом число электронов, способных покинуть металл, резко возрастает. Плотность тока насыщения вычисляется по **формуле Ричардсона–Дешмана**:

$$j_{\text{нас}} = BT^2 e^{-\frac{A_{\text{вых}}}{k_B T}}, \quad (9.3)$$

где B – эмиссионная постоянная, равная $6 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2 \cdot \text{К}^2$;

k_B – постоянная Больцмана, $k_B = 1,38 \cdot 10^{23} \text{ Дж/К}$.

Плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность катода, которая зависит от природы катода и его температуры.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Определяя на опыте зависимость тока насыщения от температуры, можно найти работу выхода для данного металла. В данном случае для измерения работы выхода используем метод прямых Ричардсона.

Поясним идею метода. Для этого прологарифмируем уравнение (9.3):

$$\ln j_{\text{нас}}/T^2 = \ln B - A_{\text{вых}}/k_B T. \quad (9.4)$$

График зависимости $\ln j_{\text{нас}}/T^2$ от $1/T$ является прямой линией с угловым коэффициентом $-a$, где $a = A_{\text{вых}}/k_B$. Определив угловой коэффициент наклона прямой к оси абсцисс из графика, рассчитывают работу выхода:

$$A_{\text{вых}} = k_B a. \quad (9.5)$$

Наиболее точное значение a можно получить, используя **метод наименьших квадратов**. Суть метода заключается в следующем. Пусть имеются экспериментальные значения $y_1 = \ln j_{1\text{нас}}/T_1^2$, $y_2 = \ln j_{2\text{нас}}/T_2^2$..., полученные для аргументов $x_1 = 1/T_1$, $x_2 = 1/T_2$... (всего n значений). Аппроксимируем данную экспериментальную зависимость функцией $\ln B - y = ax$ (рис. 9.4).

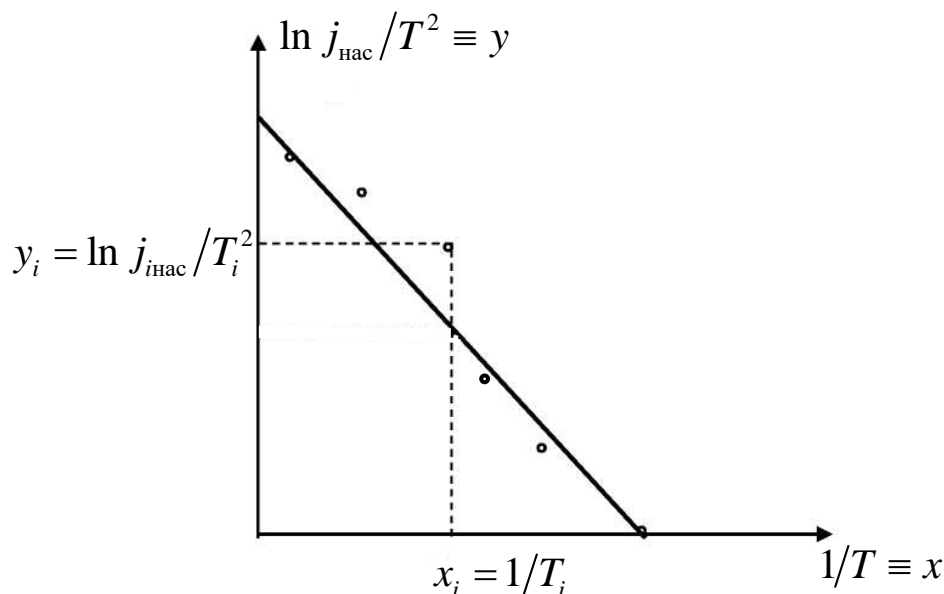


Рис. 9.4

Составим функцию

$$\xi(a) = \sum_{i=1}^n \left[(\ln B - y_i) - ax_i \right]^2. \quad (9.6)$$

Определим значение a , при котором производная функции (9.6) обращается в нуль:

$$\xi'(a) = \sum_{i=1}^n (-2) \cdot [(\ln B - y_i) - ax_i] x_i,$$

$$\sum_{i=1}^n (\ln B - y_i) x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Тогда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln B - y_i) x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (9.7)$$

Для построения графика необходимо знать плотность анодного тока насыщения $j_{\text{нас}}$ и температуру катода. Расчет температуры производится следующим образом. Подводимая к катоду мощность расходуется в вакуумной лампе в основном на тепловое излучение. Для диода была экспериментально определена зависимость температуры катода от расходуемой на его нагрев джоулевой мощности. На графике, который прилагается к работе, приведены результаты этих измерений. По этому графику, зная мощность, подводимую к катоду, можно определить его температуру.

Электрическая схема для проведения работы представлена на рис. 9.5.

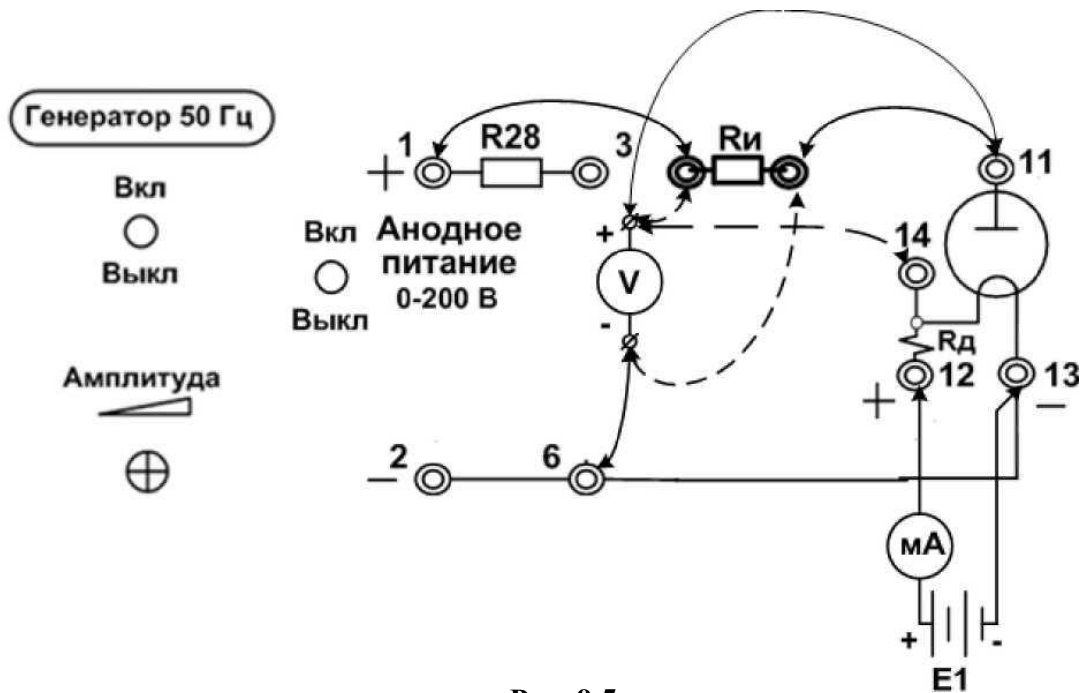


Рис. 9.5

В схеме использован вакуумный диод прямого накала. Напряжение накала подается на клеммы 12, 13 от регулируемого источника E1. Ток измеряется мультиметром 1, работающим в режиме миллиамперметра со шкалой 500 мА, включенным последовательно с источником E1. **Ток накала не должен превышать 200 мА.** Напряжение накала можно измерить между клеммами 14 и 6 вторым мультиметром, работающим в режиме вольтметра постоянного напряжения (шкала 2 В). **Напряжение накала не должно превышать 1,2 В.** Этим же вольтметром по шкале 200 В между клеммами 11 и 6 измеряют анодное

напряжение U_A , а по шкале 200 мВ или 2 В на измерительном сопротивлении $R_{II}=100$ Ом измеряют напряжение $U_{R_{II}}$. Анодный ток вычисляют по формуле

$$I_A = \frac{U_{R_{II}}}{R_{II}}.$$

Анодное питание формируется повышением напряжения генератора

50 Гц в повышающем трансформаторе и его выпрямлением. Регулировка анодного напряжения выполняется ручкой «Амплитуда» генератора 50 Гц.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Собрать схему рис. 9.5, соблюдая полярность включения источника напряжения E_1 . Установить минимальное значение E_1 , повернув ручку регулятора против часовой стрелки.
2. Повернуть ручку «Амплитуда» генератора 50 Гц против часовой стрелки в крайнее положение.
3. Включить «Генератор 50 Гц», включить тумблер «Анодное питание».
4. Установить напряжение накала 0,6 В. Дать диоду прогреться в течение пяти минут. Измерить ток накала. Увеличивая анодное напряжение ручкой «Амплитуда» генератора 50 Гц, через каждые 40В измерять величину падения напряжения на сопротивлении R_{II} и рассчитывать величину анодного тока. Данные занести в табл. 9.1. Увеличивать анодное напряжение до тех пор, пока не будет достигнуто насыщение, т.е. анодный ток практически перестанет расти.
5. Прodelать пункт 4 еще для пяти значений напряжения накала: 0,7В, 0,8В, 0,9В, 1В, 1,1В. При каждом изменении напряжения накала прогревать диод пять минут.

Таблица 9.1

	$U_H =$ В			$I_H =$ мА		
$U_A, В$						
$U_{R_{II}}$						
$I_A, мА$						

(таких таблиц шесть)

Обработка результатов измерений

1. Для каждого значения напряжения накала построить вольтамперную характеристику диода и определить ток насыщения $I_{нас}$.
2. Для всех значений U_H рассчитать мощность, выделяемую на катоде:

$$P_H = U_H \cdot I_H.$$
3. По графику зависимости температуры катода данной лампы от мощности, выделяемой на катоде (рис. 9.6), найти для полученных значений P_H температуру катода.

4. Рассчитать плотность анодного тока насыщения $j_{\text{нас}} = \frac{I_{\text{нас}}}{S}$ и $\frac{j_{\text{нас}}}{T^2}$. Для

данной лампы площадь катода $S = 6,72 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$.

5. Все полученные данные занести в табл. 9.2:

Таблица 9.2

Номер измерения	$I_{\text{нас}}, \text{ А}$	$I_H, \text{ А}$	$U_H, \text{ В}$	$P_H, \text{ Вт}$	$T, \text{ К}$	$x = 1/T, \text{ 1/К}$	$j_{\text{нас}}, \text{ А/м}^2$	$\frac{j_{\text{нас}}}{T^2}$	$y = \ln \frac{j_{\text{нас}}}{T^2}$
1									
...									
6									

6. Построить график зависимости $\ln j_{\text{нас}}/T^2$ от $1/T$ (y от x).

7. Определить величину a , используя выражение (9.7) (при этом $n = 6$).

8. Определить работу выхода электрона из вольфрама по формуле (9.5).

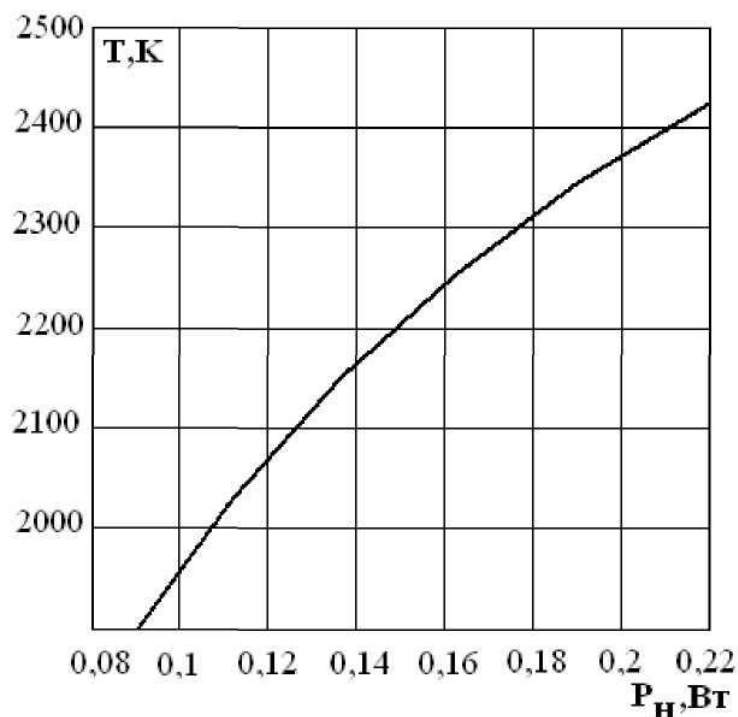


Рис. 9.6

ВЫВОД ФОРМУЛЫ РИЧАРДСОНА–ДЕШМАНА

Так как для наблюдения термоэлектронной эмиссии используется вакуумный диод, можно рассмотреть идеализированный случай, когда катод находится в тепловом равновесии с разреженным электронным газом, который заполняет ограниченный объем снаружи металла.

Электроны, совершая тепловое движение, могут пересекать поверхность

катода и удаляться от нее на небольшие расстояния (порядка атомных). Над поверхностью металла возникает электронная атмосфера, под которой остаются положительно заряженные ионы. В результате образуется *двойной электрический слой*. Он практически не создает электрического поля во внешнем пространстве, зато на его преодоление требуется некоторая работа (W).

Заметим, что рис. 9.1 отвечает теории, предназначенной для расчета объемных характеристик и использующей модель безграничного металла. Сейчас, однако, уместно считать (как это обычно делается в электростатике) электрический потенциал Φ и потенциальную энергию электрона U равными нулю на больших расстояниях от конечного металлического образца. На рис. 9.7 жирная линия – график потенциальной энергии электрона U (потенциал $\Phi = -U/e$, e – модуль заряда электрона). Величина $(-E_c)$ грубо учитывает притягивающее действие ионной решетки – это *глубина потенциальной ямы*, в которой находятся свободные электроны ($-E_c$ есть энергия, отвечающая *дну зоны проводимости*).

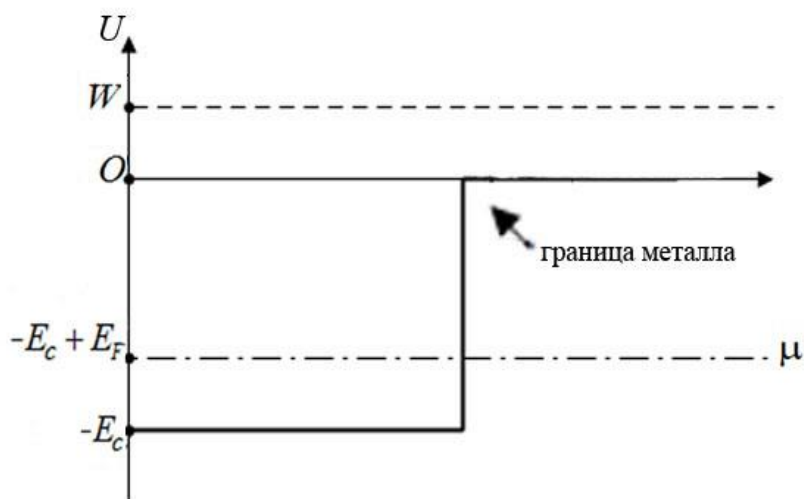


Рис. 9.7

При выбранном начале отсчета потенциальной энергии значение $E_F - E_c$ является *химическим потенциалом* μ электронов внутри металла. Одно из условий термодинамического равновесия состоит в одинаковости химического потенциала каждого компонента в различных частях системы. Обычно из металла выходит ничтожная часть электронов, так что их испарение не оказывает влияния на μ . Отметим еще, что $E_F - E_c$ есть химический потенциал для $T = 0$. Однако и при конечных температурах μ практически не отличается от $E_F - E_c$.

Известно (см., например, [3]), что (среднее) число электронов, приходящихся на одно квантовое состояние, равно

$$f = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} + 1}, \quad (9.8)$$

где ε – энергия электрона в рассматриваемом состоянии (f – среднее по статистически равновесному ансамблю число заполнения в идеальном квантовом газе фермионов – *распределение Ферми–Дирака*).

Вне металла состояние электрона описывается координатами $\vec{r} = \{x, y, z\}$ и импульсом $\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$. Оказывается, что в шестимерном пространстве с осями x, y, z, p_x, p_y, p_z на одно квантовое состояние приходится «объем» h^3 , где h – постоянная Планка. Таким образом, величина $dxdydzdp_x dp_y dp_z / h^3$ есть число одночастичных квантовых состояний в «объеме» $dxdydzdp_x dp_y dp_z$. Очевидно, интеграл $\int f dxdydzdp_x dp_y dp_z / h^3$ дает число частиц в области обычного пространства, по которой проводится интегрирование. Тогда $\int f dp_x dp_y dp_z / h^3$ представляет собой концентрацию электронов, а

$$dn = f dp_x dp_y dp_z / h^3 \quad (9.9)$$

есть количество частиц на единицу объема, обладающих компонентами импульса между p_x и $p_x + dp_x$, p_y и $p_y + dp_y$, p_z и $p_z + dp_z$.

Направим координатную ось x по внешней нормали к поверхности металла. Найдем плотность тока электронов, уходящих с катода (вне двойного слоя):

$$j_x = -e \int_{p_x > 0} v_x \cdot 2dn = -e \int_{p_x > 0} \frac{p_x}{m} \cdot 2f \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3}.$$

Здесь m – масса электрона, а множитель 2 появился из-за наличия двух спиновых состояний для каждого \vec{p} .

В выражение (9.8) для f в качестве ε следует подставить $W + p^2/2m$, а μ положить равным $E_F - E_C$; тогда

$$f = \frac{1}{e^{(E_C - E_F + W + p^2/2m)/k_B T} + 1} \approx e^{-\left(E_C - E_F + W + p^2/2m\right)/k_B T},$$

поскольку обычно величина $(E_C - E_F + W)/k_B$ имеет порядок 10^4 К (сделанное упрощение пригодно для нескольких тысяч К и ниже). Итак,

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{2e}{mh^3} e^{-(E_C - E_F + W)/k_B T} \int_{p_x > 0} p_x e^{-p^2/2mk_B T} dp_x dp_y dp_z = \\ &= -\frac{2e}{mh^3} e^{-(E_C - E_F + W)/k_B T} \int_0^\infty p_x e^{-p_x^2/2mk_B T} dp_x \int_{-\infty}^\infty e^{-p_y^2/2mk_B T} dp_y \int_{-\infty}^\infty e^{-p_z^2/2mk_B T} dp_z. \end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} e^{-p_z^2/2mk_B T} dp_z &= \left| p_z^2/2mk_B T = u \right| \\ &= 2 \sqrt{\frac{mk_B T}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} du = \sqrt{2mk_B T} \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi mk_B T} \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{e}{mh^3} e^{-(E_c - E_F + W)/k_B T} (2\pi mk_B T) \int_0^{\infty} e^{-p_x^2/2mk_B T} 2p_x dp_x; \\ \int_0^{\infty} e^{-p_x^2/2mk_B T} 2p_x dp_x &= 2mk_B T \int_0^{\infty} e^{-p_x^2/2mk_B T} d\left(\frac{p_x^2}{2mk_B T}\right) = 2mk_B T. \end{aligned}$$

В результате

$$j_x = -\frac{e}{mh^3} e^{-(E_c - E_F + W)/k_B T} (2\pi mk_B T)(2mk_B T).$$

После элементарных упрощений окончательно находим:

$$j_x = -BT^2 e^{-A_{\text{ВЫХ}}/k_B T}, \quad (9.10)$$

где

$$A_{\text{ВЫХ}} = E_c - E_F + W, \quad (9.11)$$

а

$$B = \frac{emk_B^2}{2\pi^2 \hbar^3} \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 \cdot \text{К}^2 \quad (9.12)$$

($\hbar = h/2\pi$). Формула (9.10) совпадает, в сущности, с формулой Ричардсона–Дешмана (9.3). Отметим, что выражение (9.11) для $A_{\text{ВЫХ}}$ переходит в (9.1) лишь при $W = 0$. Смысл (9.11) ясен из рис. 9.7.

Следует отметить также, что сначала Ричардсон предложил другую формулу для j , основываясь на классической статистике (1901 г.). Написанную ранее формулу он получил с помощью термодинамических соображений. Еще один вывод, в котором была установлена универсальность коэффициента при $e^{-A_{\text{ВЫХ}}/k_B T}$, дал Дешман в 1923 г. В то время Дешман не мог учитывать спина, поэтому значение универсального коэффициента у него оказалось вдвое меньше. Интересно, что результат Дешмана с большой точностью был подтвержден экспериментально. Учет спина электрона только ухудшал согласие теории и опыта. Объяснение состоит в том, что не все электроны в металле, обладающие достаточной кинетической энергией, преодолевают потенциальный барьер на границе – часть из них *отражается* обратно (чисто квантовый эффект) Приведенный нами вывод не зависит от деталей *зонной структуры* металла; здесь

уменьшение j связано с тем, что вклад в j дают также электроны, испытавшие отражение от поверхности катода. Этот вклад следует вычесть из j . Поэтому значение V , приведенное в основном тексте, представляется более реалистичным, чем (9.12).

При выводе мы никак не учитывали влияние на электрический потенциал Φ самого разреженного электронного газа вне образца (эффекты пространственного заряда). Ток, рассчитанный в пренебрежении такими эффектами, есть *ток насыщения*. Данный вопрос теоретически был исследован Ленгмюром в 1913 г. (см. гл. 8). Отметим здесь, что второе из условий (8.10) гл. 8 носит формальный характер, так как закон трех вторых работает лишь между точками O' и O'' (рис. 8.1 гл. 8) – между точками 1 и 2 на рис. 9.3 настоящей главы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется работой выхода электрона?
2. Что такое энергия Ферми?
3. Какова природа сил, удерживающих электрон в металле?
4. Нарисуйте и объясните вольтамперные характеристики диода.
5. Объяснить физическую природу закона трех вторых.
6. Что такое ток насыщения и как он зависит от температуры?
7. Какое явление исследуется в данной работе и какие величины определяются?

ГЛАВА 10

ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Лабораторная работа 2–10

Цель работы: изучение эффекта Холла в полупроводниках. Измерение зависимости холловской разности потенциалов от индукции магнитного поля и величины тока, протекающего через полупроводник. Определение постоянной Холла, концентрации и подвижности носителей заряда в полупроводнике.

Приборы и принадлежности:

1. Электромагнит ЭМ.
2. Источники постоянного напряжения E_1 и E_2 .
3. Переносный цифровой мультиметр, работающий в режиме милливольтметра или миллиамперметра по соответствующим шкалам.
4. Образец полупроводника.
5. Измерительное сопротивление $R_{И}=10$ Ом.
6. Эталонное сопротивление $R_{ЭТ}=1$ кОм.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Явление Холла заключается в возникновении разности потенциалов при протекании постоянного электрического тока через пластинку, изготовленную из проводника и помещенную в постоянное магнитное поле, перпендикулярное плоскости пластинки и направлению тока (рис. 1.10).

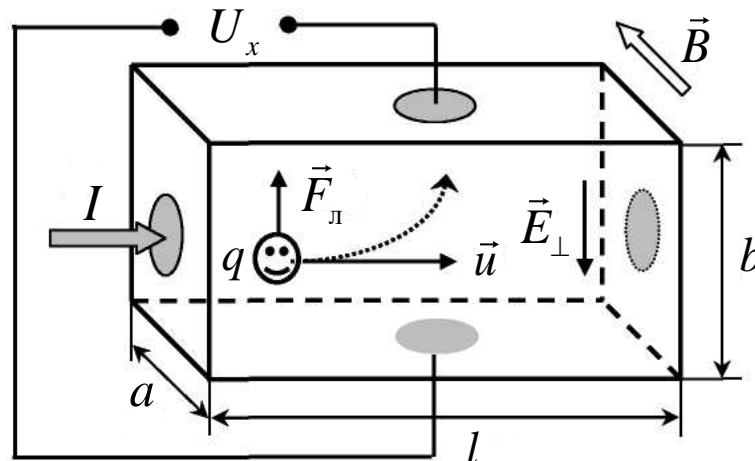


Рис. 10.1

Разность потенциалов между параллельными полю и току противоположными гранями пластинки дается выражением

$$U_x = R \frac{IB}{a} = jRBb, \quad (10.1)$$

где R – *постоянная Холла*; $I = j ab$ – ток через проводник; j – плотность тока; B – индукция магнитного поля; a и b – поперечные размеры пластинки.

Элементарная электронная теория дает следующее объяснение явлению Холла. В отсутствие внешнего магнитного поля в проводнике под действием постоянного электрического поля \vec{E} имеет место направленное движение зарядов со скоростью \vec{u} . При включении магнитного поля \vec{B} в первый момент времени на каждый носитель заряда q начинает действовать сила Лоренца $\vec{F}_л = q\vec{u} \times \vec{B}$, отклоняющая его к боковой грани пластинки. В результате пространственного разделения носителей заряда в проводнике возникает перпендикулярное направлению тока электрическое поле \vec{E}_\perp , препятствующее этому процессу.

После установления равновесия $qE_\perp = quB$, так что

$$E_\perp = uB.$$

Принимая во внимание связь плотности тока \vec{j} со скоростью направленного движения \vec{u} и концентрацией n носителей заряда

$$\vec{j} = qn\vec{u}, \quad (10.2)$$

получаем выражение для разности потенциалов Холла

$$U_x = E_\perp b = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{a}. \quad (10.3)$$

Сравнение последнего выражения с (10.1) дает

$$R = \frac{1}{nq}. \quad (10.4)$$

Важной характеристикой проводника является подвижность носителей заряда μ . Подвижность определяет среднюю скорость направленного движения носителей заряда под действием электрического поля E : $u = \mu E$. Подвижность можно связать с проводимостью σ и концентрацией n носителей заряда в проводнике. Разделив обе части взятого по модулю равенства (10.2) на E и учтя, что отношение j к E дает σ , получаем следующее соотношение:

$$\sigma = qn\mu. \quad (10.5)$$

Таким образом, определив экспериментально постоянную Холла R и проводимость σ , можно по формулам (10.4) и (10.5) найти концентрацию n и подвижность μ носителей заряда в проводнике.

Явление Холла в полупроводниках и металлах имеет одну и ту же природу, однако есть ряд особенностей в их экспериментальном наблюдении. В полупроводниках вследствие меньшей концентрации носителей заряда постоянная Холла, а следовательно, и холловская разность потенциалов оказы-

ваются существенно (как правило, на несколько порядков) больше, чем в металлах, что облегчает экспериментальное исследование явления. Электрический заряд в полупроводниках может переноситься положительно заряженными частицами «дырками», движущимися вдоль направления тока, и электронами, движущимися навстречу направлению тока. Под действием магнитного поля и электроны, и «дырки» отклоняются к одной и той же грани пластинки. Поэтому, определив экспериментально знак холловской разности потенциалов, можно определить тип основных носителей заряда в полупроводнике.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Схема установки для исследования эффекта Холла показана на рис. 10.2.

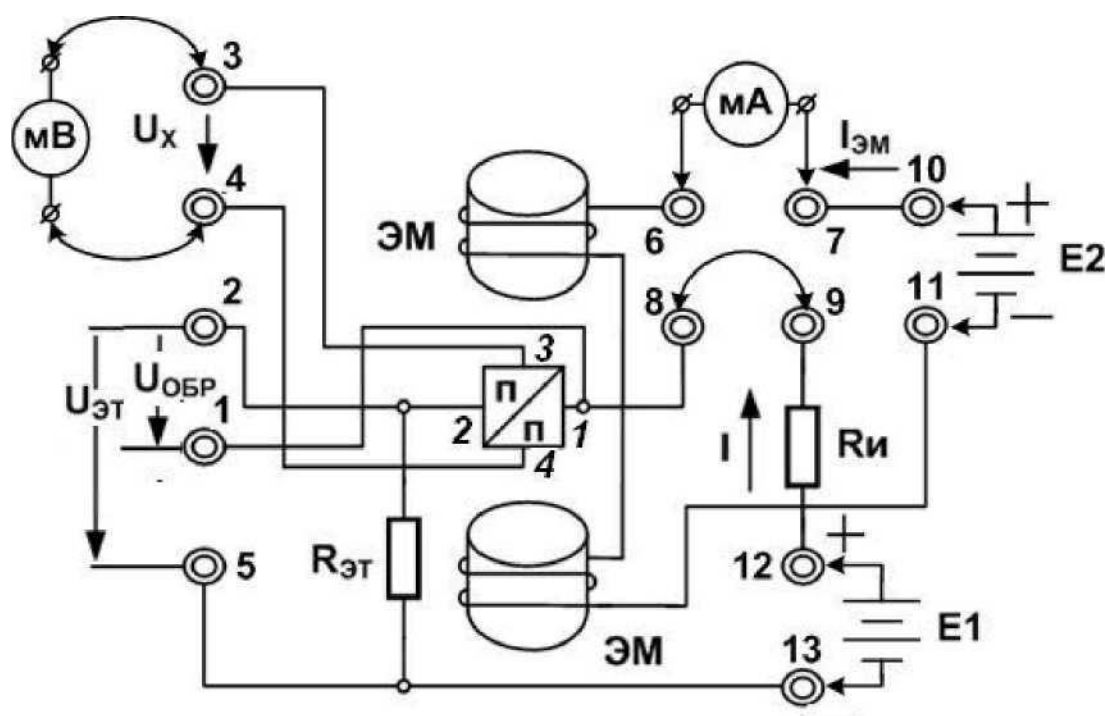


Рис. 10.2

Образец полупроводника, имеющий форму прямоугольной пластинки с четырьмя выводами, помещен в постоянное магнитное поле между полюсами электромагнита ЭМ. Выводы 1 и 2 используются для пропускания тока через полупроводник. Величина тока регулируется источником напряжения E1. Ток измеряется миллиамперметром «МА», который включается между клеммами 8 и 9. Величина тока может быть определена также по напряжению на измерительном сопротивлении $R_{и} = 10 \text{ Ом}$ при замкнутых клеммах 8 и 9. В этом случае милливольтметр «мВ» подключают к клеммам 9 и 12. Выводы 3 и 4 полупроводника служат для измерения разности потенциалов Холла U_x с помощью милливольтметра «мВ», который подключается к клеммам 3 и 4.

Постоянное магнитное поле создается электромагнитом ЭМ, подключен -

ным к регулируемому источнику постоянного напряжения E2. Величина индукции магнитного поля определяется с помощью градуировочного графика по току через электромагнит. График приведен на рис. 10.3. Эталонное сопротивление $R_{\text{эт}}=1$ кОм, включенное последовательно с полупроводником, служит для измерения проводимости полупроводника. Используя закон Ома для последовательно включенных образца и эталонного сопротивления $R_{\text{эт}}$ и связь сопротивления образца с его проводимостью, легко показать, что проводимость σ следующим образом выражается через падение напряжения на образце $U_{\text{обр}}$ (между клеммами 1 и 2), падение напряжения на эталонном сопротивлении $U_{\text{эт}}$ (между клеммами 2 и 5) и размеры образца a, b, l :

$$\sigma = \left(\frac{U_{\text{эт}}}{R_{\text{эт}} U_{\text{обр}}} \right) \frac{l}{ab}. \quad (10.6)$$

Из-за неточности установки холловских контактов на противоположных гранях пластинки при протекании тока через полупроводник кроме холловской разности потенциалов U_x возникает дополнительное омическое падение напряжения $U_{\text{ом}}$. Поэтому при изменении направления тока через электромагнит, которое производится изменением полярности подключения источника напряжения E2 к клеммам 10 и 11, измеренные значения падения напряжения складываются из холловской разности потенциалов и омического падения напряжения:

$$U_1 = U_x + U_{\text{ом}}, U_2 = -U_x + U_{\text{ом}}.$$

Следовательно, величину холловской разности потенциалов можно рассчитать по формуле:

$$U_x = \frac{1}{2}(U_1 - U_2). \quad (10.7)$$

Измерение напряжений U_x , $U_{\text{обр}}$, $U_{\text{эт}}$ и токов $I_{\text{эм}}$ и I в работе проводится с помощью переносного цифрового мультиметра, работающего в режиме милливольтметра или миллиамперметра по соответствующим шкалам.

При проведении измерений сила тока через датчик Холла не должна превышать 10 мА.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Установите минимальные значения напряжений источников питания E1 и E2, повернув их регуляторы до упора против часовой стрелки. Подключите по схеме рис. 10.2, соблюдая полярность, источник тока E1 к клеммам 12 и 13, а источник тока E2 – к клеммам 10 и 11.
2. Определите пределы изменения тока через электромагнит $I_{\text{эм}}$ и тока через образец I . Для этого надо подключить миллиамперметр к клеммам 6 и 7 и,

изменяя напряжение E_2 , определить минимальное и максимальное значения тока через электромагнит. Запишите полученные значения. Затем подключите миллиамперметр к клеммам 8 и 9 и, изменяя напряжение E_1 , определите минимальное и максимальное значения тока через образец. Запишите полученные значения.

3. Снимите зависимость холловского напряжения U_x от индукции магнитного поля B при фиксированной величине тока I через образец. Для этого надо:
 - подключить миллиамперметр к клеммам 8 и 9 и установить какую-либо величину тока через образец I , лежащую между измеренными минимальным и максимальным значениями, записать выбранную величину тока;
 - отсоединить миллиамперметр и замкнуть клеммы 8 и 9 проводником;
 - для измерения тока через электромагнит $I_{эм}$ подсоединить миллиамперметр к клеммам 6 и 7;
 - измерить и занести в табл. 10.1 значения U_1 и U_2 при прямом и обратном направлениях тока через электромагнит для 8–10 значений тока $I_{эм}$, лежащих между ранее измеренными минимальным и максимальным значениями;
 - для каждого значения тока через электромагнит $I_{эм}$ по градуировочному графику найти значение индукции магнитного поля B и записать в табл. 10.1.

Таблица 10.1

$I =$ мА					
Номер измерения	$I_{эм}, \text{мА}$	$B, \text{мТл}$	$U_1, \text{мВ}$	$U_2, \text{мВ}$	$U_x, \text{мВ}$
1					
2					
3					
...					

4. Снимите зависимость холловского напряжения U_x от величины тока через образец I при фиксированной величине магнитного поля B . Для этого необходимо:
 - подключить миллиамперметр к клеммам 6 и 7 и установить какую-либо величину тока через электромагнит $I_{эм}$, лежащую между измеренными минимальным и максимальным значениями, затем по градуировочному графику найти величину индукции магнитного поля B , записать выбранное значение поля;
 - отсоединить миллиамперметр и замкнуть клеммы 6 и 7 проводником;
 - для измерения тока I через образец подсоединить миллиамперметр к клеммам 8 и 9;

- измерить и занести в табл. 2 значения U_1 и U_2 при прямом и обратном направлениях тока через электромагнит для 8–10 значений тока через образец I , лежащих между ранее измеренными минимальным и максимальным значениями тока.

Таблица 10.2

$I_{\text{эм}} =$ мА, $B =$ мТл				
Номер измерения	I , мА	U_1 , мВ	U_2 , мВ	U_x , мВ
1				
2				
3				
...				

5. Выключите магнитное поле. Измерьте и занесите в табл. 10.3 напряжения $U_{\text{обр}}$ и $U_{\text{эт}}$ для трех различных значений тока I через образец.

Таблица 10.3

I , мА			
$U_{\text{обр}}$, мВ			
$U_{\text{эт}}$, мВ			
σ , Ом ⁻¹ м ⁻¹			

Обработка результатов измерений

1. Постройте график зависимости $U_x = f(B)$ при постоянном токе I через образец. По угловому коэффициенту полученной прямой, используя формулу (10.1), найдите постоянную Холла R .
2. Постройте график зависимости $U_x = f(I)$ при постоянной индукции магнитного поля B . По угловому коэффициенту полученной прямой, используя формулу (10.1), найдите постоянную Холла R .
3. Рассчитайте среднее значение постоянной Холла и оцените её погрешность. Запишите результат в виде $R = R_{\text{ср}} \pm \Delta R$.
4. Рассчитайте по формуле (10.4) концентрацию носителей заряда n в полупроводнике, используя среднее значение R .
5. Рассчитайте проводимость σ полупроводника, используя результаты измерений из табл. 10.3 и формулу (10.6). Габаритные размеры датчика Холла 2,5x2,5x1,5 мм ($a = b = 2,5$ мм, $l = 1,5$ мм). Рассчитайте и запишите среднее значение проводимости и её ошибку $\sigma = \sigma_{\text{ср}} \pm \Delta\sigma$ по результатам трех

измерений. Используя среднее значение проводимости и найденную ранее концентрацию носителей заряда, по формуле (10.5) вычислите величину подвижности μ носителей заряда в полупроводнике.

6. По знаку холловской разности потенциалов U_x определите знак основных носителей заряда в исследованном полупроводнике.
7. Напишите вывод по результатам работы. В выводе необходимо перечислить основные физические результаты работы и привести численные значения измеренных и рассчитанных величин.

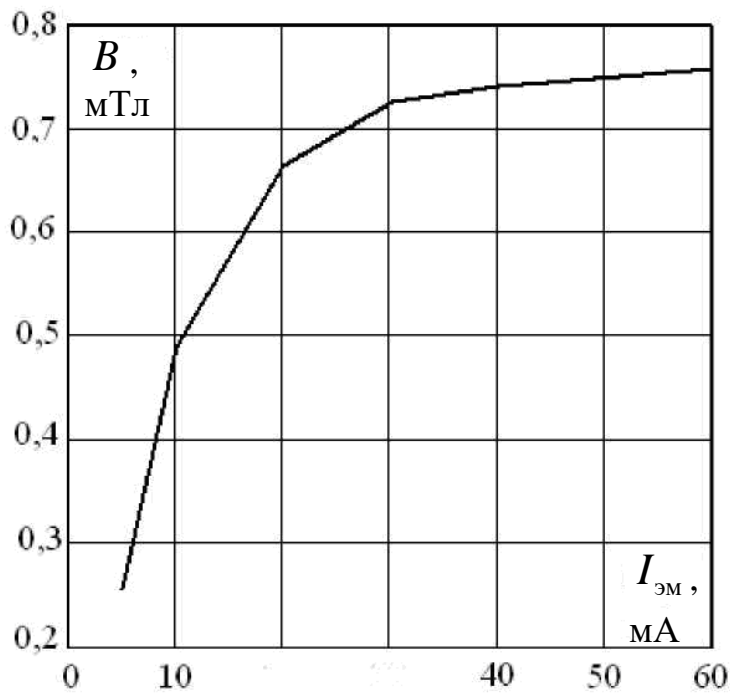


Рис. 10.3

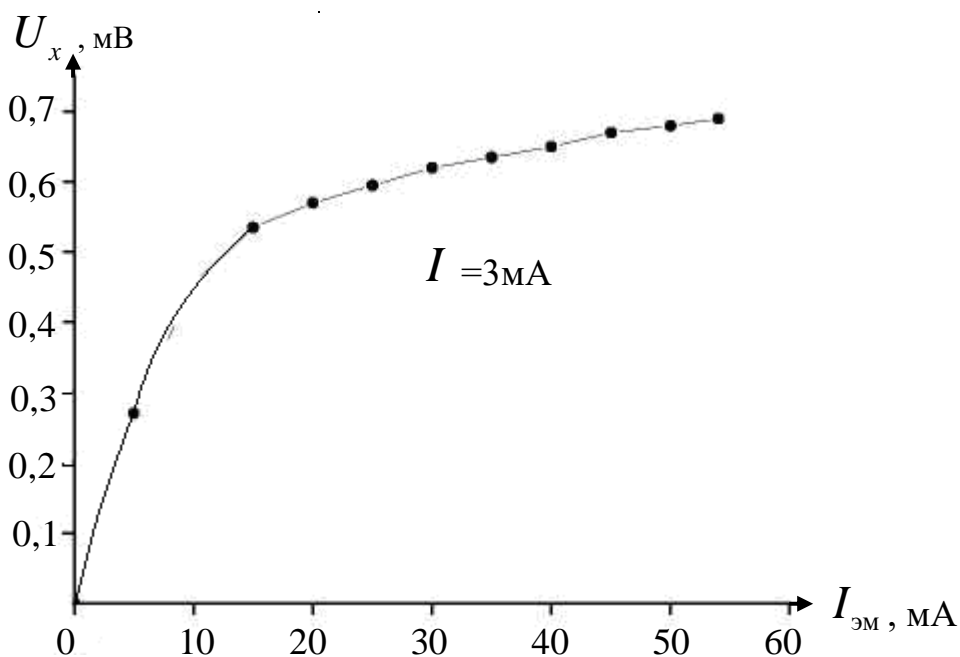


Рис. 10.4

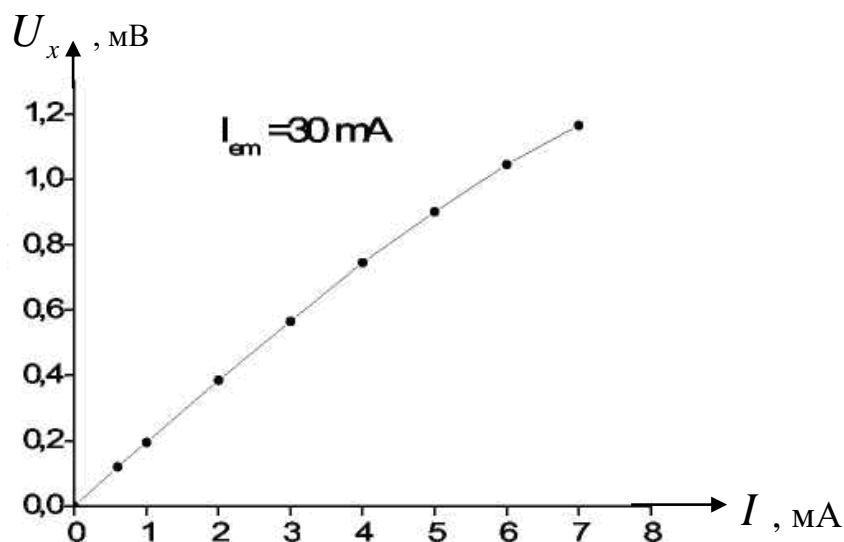


Рис. 10.5

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На какие группы делятся вещества по их электрическим свойствам?
2. Как объясняется явление Холла электронной теорией полупроводников?
3. В чем состоят особенности явления Холла в полупроводниках и в металлах?
4. Каким образом определить знак основных носителей заряда в полупроводнике по эффекту Холла?
5. Как зависит разность потенциалов Холла от формы, размеров и проводимости образца полупроводника?
6. Какие измерения позволяют определить постоянную Холла?
7. Для определения каких физических параметров полупроводников можно использовать явление Холла?
8. Какие применения явления Холла в технике Вы знаете?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тамм, И.Е.** Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М.: Физматлит, 2003.
2. **Матвеев, А.Н.** Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – М.: Высш.школа, 1983.
3. **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики. Т.III. Электричество / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1977.
4. **Иродов, И.В.** Электромагнетизм. Основные законы / И. В. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
5. Электричество и магнетизм. Лабораторный практикум с использованием миниатюрной физической лаборатории МФЛЭМ-1: учеб. пособие / Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики». – М., 2009.