

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Институт АПИ НГТУ, Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева
сокращенное и полное наименование института

Кафедра Прикладная математика
сокращенное и полное наименование кафедры

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

Теория вероятностей, математическая статистика
и теория случайных процессов

Направление подготовки

01.03.04 Прикладная математика

Форма обучения очная

Разработчик: Зюзина Н.Ю.

Утверждены на заседании
кафедры «Прикладная математика»
АПИ НГТУ

«29» апреля 2021 г.
протокол № 4

1. Введение

Данные методические рекомендации для практических занятий разработаны для дисциплины «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов», читаемой студентам направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика».

Практические работы являются одной из основных форм изучения дисциплины. Выполнение заданий на практических занятиях является необходимым условием допуска студента к зачету (3 семестр) и экзамену (4 семестр).

2. Темы разделов и практических занятий

1. Случайные события.

Практическая работа № 1. Классическая вероятность, элементы комбинаторики.

Практическая работа № 2. Теоремы сложения и умножения

Практическая работа № 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Практическая работа № 4. Формула Бернулли. Формула Пуассона

Практическая работа № 5. Теоремы Лапласа.

2. Случайные величины.

Практическая работа № 6. Дискретные и непрерывные СВ.

Практическая работа № 7. Числовые характеристики ДСВ

Практическая работа № 8. Числовые характеристики НСВ

Практическая работа № 9. Функция случайного аргумента.

Практическая работа № 10. Предельные теоремы.

3. Система двух случайных величин.

Практическая работа № 11. Дискретная двумерная СВ.

Практическая работа № 12. Непрерывная двумерная СВ.

Практическая работа № 13. Ковариация СВ.

4. Математическая статистика.

Практическая работа № 14. Описательная статистика

Практическая работа № 15. Точечная оценка

Практическая работа № 16. Интервальная оценка

Практическая работа № 17. Элементы теории корреляции

Практическая работа № 18. Проверка статистических гипотез

Практическая работа № 19. Регрессионный анализ

5. Теория случайных процессов.

Практическая работа №20. Случайные процессы

Практическая работа №21 Законы распределения СП

Практическая работа №22 Математическое ожидания и дисперсия СП.

Практическая работа №23 Корреляция и ковариация СП.

Практическая работа №24 Стационарные СП

Практическая работа №25 Эргодические СП.

Практическая работа №26 Линейные преобразования случайных процессов

Практическая работа №27 Спектральная плотность

Практическая работа №28 Сходимость, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

Практическая работа №29 Гауссовский СП и процессы с ортогональными и независимыми приращениями

Практическая работа №30 Винеровский и Пуассоновский СП.

3. Цели и задачи практических занятий.

- формирование профессиональных компетенций студентов и готовности к командной работе в процессе профессиональной деятельности;
- систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;
- выработать приемы решения практических задач, способствующих овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;
- выработать умения: применять математический аппарат для решения задач, анализировать полученные результаты, выделять главные факторы, обуславливающие то или иное применение методов решения уравнений, оценивать информацию физического содержания;
- научиться работать с информацией: учебником, служебной документацией и схемами, пользоваться справочной и научной литературой;
- сформировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

4. Методические указания к решению задач.

При изучении курса «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов» большое значение имеет практическое применение теоретических знаний, главное из которых – умение решать задачи. Прежде, чем приступить к решению задач, необходимо тщательно изучить теоретический материал по данной теме. Перед выполнением заданий студенту необходимо внимательно ознакомиться с примерами решения задач по данной теме, изучить теоретические основы.

Практическое занятие № 1

Тема: Классическая вероятность, элементы комбинаторики.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Сократить дробь:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$

c) $\frac{2n(n-1)!}{(2n)!}$

d) $\frac{A_{n+1}^3}{A_{n+1}^2}$

e) $\frac{A_{n+1}^3}{A_n^2}$

f) $\frac{2}{n+1} \cdot C_{n+1}^{n-1}$

Задание № 2. Решить уравнения:

a) $6P_x = P_{x+2}$

b) $A_n^3 = \frac{1}{2} A_n^4$

c) $C_x^4 = \frac{15A_x^2}{4}$

d) $\frac{P_{x+2}}{A_x^5 P_{x-5}} = 90$

e) $\frac{A_{x+1}^4 P_{x-4}}{P_{x-1}} = 15$

f) $C_x^{x-3} + C_x^{x-4} = 11C_{x+1}^2$

g) $\frac{n!}{(n-5)!} = \frac{20n!}{(n-3)!}$

Задание № 3. Решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} C_m^b = C_m^{b+2} \\ C_m^2 = 153 \end{cases}$

b) $\begin{cases} C_b^m = C_b^{m+1} \\ A_b^2 = 20 \end{cases}$

Задание №4. Проверить равенство

a) $C_{20}^{12} = \frac{A_8^{20}}{P_8}$

b) $C_{15}^4 - C_{15}^3 = \frac{C_{16}^4}{2}$

Задание №5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображении числа только один раз?

Задание №6. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Задание №7. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Задание №8. Сколькими способами можно составить список из 10 человек?

Задание №9. Из 20 рабочих нужно выделить шестерых для работы на стройке. Сколькими способами можно это сделать?

Задание №10. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирают по жребии 5 человек для приготовления ужина. Сколькими способами в эту пятерку попадут:

а) одни девушки; б) 3 юноша и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) одни юноши?

Задание №11. У врача есть 3 вида одного лекарства, 2 вида – другого и 4 третьего. В течении девяти дней он каждый день предлагает по одному лекарству. Сколькими способами он может выделить больному лекарства?

Задание №12. Сколько существует различных перестановок букв в слове «трактат», в слове «АААУУАУУУУ»?

Задание № 13. Построить множество элементарных исходов Ω и описать указанные события в виде подмножеств Ω .

а) Игральная кость подбрасывается дважды. События:

А – оба раза выпало число очков, кратное трем,

В – оба раза выпало число очков, большее четырех,

С – оба раза выпало одинаковое число очков,

Д – первый раз выпало больше очков, чем во второй,

Е – сумма выпавших очков равна восьми.

б) Для социологического исследования случайно выбирается одна семья с тремя детьми.

События:

А- первый ребенок – мальчик,

В – первый и третий ребенок – мальчик,

С – в семье имеются разнополые дети.

Проверить совместность событий А и В, В и С, А и $\bar{C}$. Описать события $A*B$, $A + B$, $\bar{A} * B$, $\bar{A} * \bar{C}$.

Задание № 14. Изобразить графически множество элементарных исходов события А, В, С. Выявить пары несовместных событий.

а) Производится стрельба по плоской прямоугольной мишени: $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$. По условиям стрельбы непопадание в указанный прямоугольник исключено. События:

А – абсцисса точки попадания не меньше ординаты,

В – произведение координат точки неотрицательно,

С – сумма абсолютных величин координат точки превышает единицу.

б) На отрезке $[2;4]$ наудачу ставится точка. Затем наудачу ставится вторая точка. События:

А – вторая точка ближе к правому концу отрезка, чем к левому,

В – расстояние между двумя точками меньше половины этого отрезка,

С – первая точка ближе ко второй, чем к правому концу отрезка.

Задание № 15. Выразить событие C через события A_i, B_j из условия задачи, используя операции сложения, умножения и отрицания. При этом слагаемые в выражении должны быть попарно несовместны.

а) Для сдачи экзамена студент должен выполнить два обязательных задания. После этого ему дается еще два дополнительных задания, из которых необходимо выполнить хотя бы одно.

A_i – i -ое обязательное задание выполнено,

B_j – j -ое дополнительное задание выполнено,

C – экзамен сдан.

б) У каждого из двух игроков имеются по два белых и два черных шаров. Они дважды обмениваются ими.

A_i – первый игрок при i -ом обмене отдал белый шар,

B_j – второй игрок при j -ом обмене отдал белый шар,

C – количество белых шаров у первого игрока при обмене увеличилось.

Задание № 16. События A, B, C – попадание брошенной наугад точки в соответствующие области. Выразить события, обозначающие попадание точки в заштрихованную область, изображенную на рис. 1 – 4, через A, B, C .

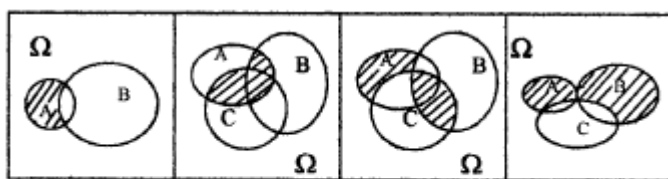


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Задание № 17. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

A – «Появление четного числа очков»

B – «Появление не менее 5 очков»

C – «Появление не более 5 очков»

Задание № 18. В урне 8 белых и 6 черных шаров. Из неё наугад вынимаются 2 шара.

Найти вероятность того, что:

А) оба шара черные

В) Оба шара белые

С) они разного цвета.

Задание № 19. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:

a – «сумма выпавших очков равна 8»

b – «произведение выпавших очков равно 8»

c – «сумма выпавших очков больше, чем их произведение».

Задание № 20. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Задание № 21. Восемь различных книг расставляются наугад на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленные рядом.

Задание № 22. В книжном магазине на полке 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 рубля каждая, 3 книги – по 1 рублю и 2 – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наугад 2 книги стоят 5 рублей.

Задание № 23. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».

Задание № 24. На 15 одинаковых карточках написаны целые числа от 1 до 15 в двоичной системе счисления. Наудачу извлекается одна карточка. Найти вероятность того, что написанное на ней число содержит:

- а) не менее двух единиц;
- б) не более двух нулей;
- с) ровно три единицы.

Задание № 25. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалось равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Задание № 26. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорционально площади круга и не зависит от его расположения.

Практическое занятие № 2

Тема: Теоремы сложения и умножения

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Учебные мастерские техникума получают изделия от трех заводов. Вероятность поступления изделий с первого завода равна 0,35, со второго – 0,4. Найти вероятность того, что очередная партия поступит с третьего завода?

Задание № 2. В партии из 30 пар обуви имеется 10 мужских пар, 8 женских и 12 детских. Найти вероятность того, что взятая наугад пара обуви окажется детской.

Задание № 3. В партии 10 деталей, из них 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад двух деталей окажется хотя бы одна стандартная.

Задание № 4. Три стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель 1-го, 2-го и 3-его стрелков соответственно равна 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в цель.

Задание № 5. В каждой из 3-ех партий, содержащих по 20 изделий, имеется соответственно одно, два и четыре бракованных изделия. Из каждой партии наугад извлекают по одному изделию. Найти вероятность того, что все три изделия окажутся бракованными.

Задание № 6. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти попадания хотя бы одного попадания при одном залпе из трех орудий.

Задание № 7. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,9, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Задание № 8. Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

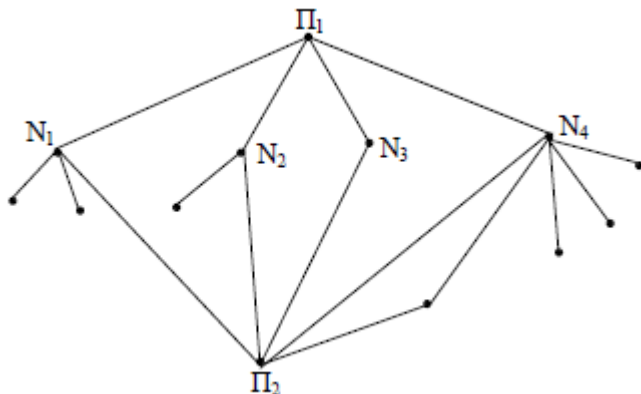
Задание № 9. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

Практическое занятие № 3

Тема: Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. На рисунке изображена схема дорог. Туристы, выходят из пункта Π_1 , выбирая каждый раз на развилке дорог дальнейший путь наудачу. Какова вероятность того, что они попадут в пункт Π_2 , если



Задание № 2. У сборщика имеются 80 деталей, 36 из которых изготовлены в 1-ом цехе, 24 – во 2-ом и 20 – в 3-ем. Вероятность того, что деталь, изготовленная в 1-ом цехе стандартная 0,8; для 2-го и 3-его цехов 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь стандартная.

Задание № 3. Система обнаружения самолета из-за наличия помех в зоне действия локатора может давать ложные показания с вероятностью 0,05, а при наличии цели в зоне система обнаруживает ее с вероятностью 0,9. Вероятности появления противника в зоне равна 0,25. Определить вероятности ложной тревоги.

Задание № 4. Детали для сборки изготавливают на двух станках, из которых 1-ый производит деталей в три раза больше второго. При этом брак составляет в выпуске первого станка 2,5%, а второго – 1,5%. Взятая наугад деталь оказалась годной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Практическое занятие № 4

Тема: Формула Бернулли. Формула Пуассона

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность пяти попаданий при шести выстрелах.

Задание № 2. В ящике находятся 80 стандартных и 20 нестандартных деталей. Найти вероятность того, что из пяти взятых наудачу деталей не менее четырех окажутся стандартными.

Задание № 3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T окажутся ровно три элемента.

Задание № 4. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равна 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) 4 вызова; б) менее 4-ех вызовов; в) не менее 4-ех вызовов.

Практическое занятие № 5.

Тема: Теоремы Лапласа

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 104 раза в 400 испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,2.

Задание № 2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Задание № 3. Французский ученый Бюффон (VIII в) бросил 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности появления «герба» по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.

Задание № 4. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем 0,02.

Задание № 5. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет следующим неравенствам: а) $83 \leq m \leq 93$; б) $m \geq 70$.

Задание № 6. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0,6.

Практическое занятие № 6

Тема: Дискретные и непрерывные СВ.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

Задание № 2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Задание № 3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задание № 4. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равно 0,3, вторым - 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

Задание № 5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

Построить многоугольник распределения.

Задание № 6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить многоугольник распределения, график функции распределения, найти вероятности $P(x > 1,4)$, $P(1,4 \leq x \leq 2,3)$

Задание № 7. Три стрелки, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5; 0,6; 0,8. Построить ряд распределения случайной величины x - числа попаданий в цель.

Задание № 8. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервалы $(1; 2,5)$, $(2,5; 3,5)$.

Задание № 9. Случайная величина X имеет плотность вероятности:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x/3, & \text{если } 0 < x \leq \pi \\ 1, & \text{если } x > \pi \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ (x-2)^2, & \text{если } 1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график

Задание № 10. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале $(0; \pi/4)$ функцией $f(x) = c \sin 4x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c .

Задание № 11. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ функцией $f(x) = c \cos x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c и определить вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; \pi/4)$

Задание № 12. Случайная величина X задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 0,3, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Найти ряд распределения, а также вероятности: $P(x=1)$, $P(1 < x \leq 8)$

Задание № 13. При каких значениях параметров k и b функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1 \\ kx + b, & \text{если } -1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Может быть функцией распределения некоторой непрерывной с. в. X ? Найти вероятности того, что с. в. X примет значения, заключенное в промежутке $(-2,3; 1,5)$. Построить график плотности распределения этой случайной величины.

Практическое занятие № 7

Тема: Числовые характеристики ДСВ.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

a) /

X	-4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

b) /

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Задание № 2. Найти математическое ожидание случайной величины Z , если известны математическое ожидание X и Y :

a) $Z=X+2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$

b) $Z=3X+4Y$, $M(X)=2$, $M(Y)=6$

Задание № 3. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X -числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

Задание № 5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Задание № 6. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z=3X+2Y$, если известно, что $D(X)=5$, $D(Y)=6$.

Задание № 7. Найти дисперсию дискретной случайной величины x -числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий A в каждом испытании равна 0,2

Практическое занятие № 8

Тема: Числовые характеристики НСВ.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = x + 0,5$ в интервале $(0,1)$ и $f(x)=0$ вне интервала. Найти математическое ожидание величины X^3 не находя предварительно плотности распределения $Y=X^3$.

Задание № 2. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(x^2 + 2x)$ в интервале $(0,1)$ и $f(x)=0$ вне интервала. Найти: а) параметр c ; б) математическое ожидание случайной величины X .

Задание № 10. Найти дисперсию случайной величины X , заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2 \\ \frac{x}{4}, & \text{при } -2 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X

Задание № 11. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(x^2 + 2x)$ в интервале $(0,1)$ и $f(x)=0$ вне интервала. Найти: а) параметр c ; б) математическое ожидание случайной величины X .

Задание № 12. Случайная величина X в интервале $(-1,1)$ задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \text{ и равна } 0 \text{ вне интервала. Найти моду, медиану случайной величины } X.$$

Задание № 1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[1;6]$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратное отклонение величины.

Задание № 2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение на интервале $(12,14)$.

Задание № 3. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $F(x) = 1 - e^{-0,6x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $F(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(2,5)$.

Задание № 4. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$:

а) плотностью $f(x) = 5e^{-5x}$; б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

Задание № 6. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $a=3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=2$. Написать плотность вероятности X .

Задание № 7. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X , зная, что $M(x)=3$, $D(x)=16$

Задание № 8. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X .

Задание № 9. Найти математическое ожидание случайной величины X , распределенной равномерно в интервале $(2,8)$. $M(X)=5$.

Задание № 10. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормального распределения случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12,14)$.

Задание № 11. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $F(x) = 1 - e^{-0,6x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $F(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(2;5)$.

Задание № 12. Автобус некоторого маршрута идет строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

Практическое занятие № 9

Тема: Функция случайного аргумента.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. ДСВ X задана законом распределения

X	1	3	5
p	0,4	0,1	

Найти закон распределения СВ Y , если: а) $Y = 5X$; б) $Y = 2X+1$; в) $Y=X^2$.

Задание № 2. Задана плотность распределения $f(x) = 2x-2$ СВ X , возможные значения которой заключены на интервале $(1, a)$. Найти значение a и плотность распределения $g(y)$ СВ Y , если: а) $Y=-3X$; б) $Y=2X+6$.

Задание № 3. СВ X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Найти плотность распределения $g(y)$ СВ $Y = \cos X$.

Задание № 4. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X , возможные значения которой заключены в интервале (a, b) . Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X$.

Практическое занятие № 10

Тема: Предельные теоремы.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Средний срок службы прибора 10 лет. Используя неравенство Маркова, оценить вероятность того, что данный прибор не прослужит более 15 лет.

Задание № 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,10	0,15	0,30	0,25	0,20

Найти вероятность события $A = (|X - M(X)| < 1,5)$. Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

Задание №3. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,85. Оценить вероятность того, что из 400 посеянных семян число взошедших будет заключено в пределах от 300 до 380.

Задание № 4. Игральная кость подбрасывается 1200 раз. Оценить вероятность отклонения относительной частоты выпадения 6 очков от вероятности этого события (по модулю) на величину, меньшую чем 0,02.

Задание № 5. Последовательность независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n=1,2,\dots$)

x_n	-па	0	па
P	0,25	0,5	0,25

где $a > 0$. Применима ли к данной последовательности теорема Чебышева?

Практическое занятие № 11

Тема: Дискретная двумерная СВ.

Примерные варианты типовых задач:

Задание. Задан закон распределения двумерной ДСВ

		X		
		3	10	12
Y	4	0,17	0,13	0,25
	5	0,1	0,3	0,05

1) Найти закон распределения СВ X и Y .

2) Найти: а) безусловные законы распределения составляющих СВ X и Y , б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=4$, в) условный закон распределения составляющей Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_2=10$.

Практическое занятие № 12

Тема: Непрерывная двумерная СВ.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Задана функция распределения двумерной СВ $F(x,y) = \sin x * \sin y$ для x и y на отрезках $[0; \pi/2]$ и равна 0 вне этих отрезков. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x= \pi/4$, $y= \pi/6$, $y= \pi/3$.

Задание № 2. Задана двумерная СВ функцией $f(x,y) = C/[(9+x^2)(16+y^2)]$ системы (X,Y) двух случайных величин. Найти C .

Задание № 3. В первом квадранте задана функция распределения

$$F(x,y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}.$$

Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в треугольник с вершинами $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(2,8)$.

Задание № 4. Плотность совместного распределения двумерной СВ

$$f(x,y) = C \exp(-x^2 - 2xy - 4y^2).$$

Найти: а) постоянный множитель C , б) плотности распределения составляющих, в) условные плотности распределения составляющих.

Задание № 6. Плотность совместного распределения двумерной СВ

$F(x,y) = \cos x * \cos y$ в квадрате для x и y на $[0; \pi/2]$ и равна 0 вне этого квадрата. Доказать, что составляющие СВ X и Y независимы.

Практическое занятие № 13

Тема: Ковариация СВ.

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Задана плотность совместного распределения двумерной СВ (X,Y)

$$f(x) = 5 \exp(-5x) \text{ при } x > 0 \text{ и равна нулю при } x < 0,$$

$$f(y) = 2 \exp(-2y) \text{ при } y > 0 \text{ и равна нулю при } y < 0$$

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию составляющих, б) корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Задание № 2. Задана плотность совместного распределения двумерной СВ (X,Y)

$f_1(x,y) = 5\exp(-x^2-y^2)$ в 1ой четверти плоскости OXY и равна нулю вне 1ой четверти. Найти: а) плотность совместного распределения составляющих, б) функцию распределения системы.

Задание № 3. Доказать, что если СВ X и Y связаны линейной зависимостью $Y=3X-2$, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна 1.

Практическое занятие № 14

Тема: Описательная статистика

Примерные варианты типовых задач:

Задание №1. При обследовании потока пассажиров на автобусном маршруте, насчитывающем 6 остановок, на конечном пункте было опрошено 25 пассажиров. Каждый из опрошенных пассажиров назвал номер остановки от конечного пункта, на которой он входил. Найти статистическое распределение выборки по результатам опроса:

6,5,6,4,1,2,6,6,6,5,5,3,3,4,4,4,5,6,6,6,5,3,4,6,5.

Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон распределения.

Задание №2. Абитуриентами на вступительных экзаменах были набраны следующие суммы баллов:

20, 21, 17, 20, 19, 24, 22, 21, 22, 21, 20, 18, 24, 18, 16, 22, 21, 23, 18, 21, 18, 21, 23, 19, 20, 25, 17, 20, 17, 22, 20, 24, 21, 20, 16, 21, 17, 19, 15, 20, 19, 21, 23, 18, 20, 24, 23, 21, 19, 22, 21, 19, 20, 23, 22, 25, 21, 21.

Построить дискретный вариационный ряд, найти моду и медиану.

Задание №3. Построить гистограммы частот и относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
1	[3;5]	4	
2	(5;7]	6	
3	(7;9]	20	
4	(9;11]	40	
5	(11;13]	20	
6	(13;15]	4	
7	(15;17]	6	

Задание № 4. Значения случайной величины X представлены в виде статистического распределения:

Значения X	Частота	Значения X	Частота
120-140	1	200-220	53
140-160	6	220-240	24
160-180	19	240-260	16
180-200	58	260-280	3

Найти моду и медиану этого распределения.

Практическое занятие № 15

Тема: Точечная оценка.

Примерные варианты типовых задач:

Задание №1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n=50$:

x_i	1	3	6	25
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную генеральной средней

Задание №2. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n=20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Указание: перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 2620$.

Задание №3. По выборке объема $n=51$ найдена смещенная оценка $D_s = 5$ генеральной дисперсии.

Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Задание №4. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8;9;11;12. Найти:

- выборочную среднюю результатов измерений;
- выборочную среднюю и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Задание №5. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=100$:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Указание: перейти к условным вариантам $U_i = x_i - 360$

Задание №6. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=50$:

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8
n_i	5	15	20	10

Указание: перейти к условным вариантам $U_i = 10x_i$

Задание №7. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=100$:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

Указание: перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 1275$

Задание №8. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=20$:

x_i	0.1	0.5	0.7	0.9
n_i	6	12	1	1

Указание: перейти к условным вариантам $u_i = 10x_i$

Практическое занятие № 16

Тема: Интервальная оценка

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения, вычислить: 1) выборочное среднее; 2) исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение; 3) доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ ; 4) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения для того же значения γ . (по табл).

Задание № 2. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением s , вычислить: 1) выборочное среднее; 2) доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ .

Практическое занятие № 17

Тема: Элементы теории корреляции

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. X – количество дождливых дней в течение месяца: {2, 4, 6, 8, 10}, Y – изменение высоты растений, м: {0,2; 0,25; 0,4; 0,45; 0,5}.

Составить корреляционную таблицу.

Задание № 2. Проведено исследование 6 хозяйств для изучения зависимости урожайности зерновых культур (Y , ц/га) от количества внесённых минеральных удобрений на 1 га пашни (X , ц/га). Получены следующие данные:

X	2,1	2,3	2,4	2,6	2,9	3,0
Y	18,0	21,0	22,1	25,3	28	28,5

Определить тесноту связи между величиной Y и величиной X , используя коэффициент корреляции, проверить на уровне $\alpha = 0,05$ его значимость.

Задание № 3. Случайные величины X и Y связаны таблицей:

X	2	3	4	5	6
Y	2	1,9	3,2	2,4	2,3

Определить тесноту связи X и Y , используя коэффициент корреляции и проверить на уровне $\alpha = 0,05$ его значимость.

Задание № 4. Если коэффициент корреляции значим, то для него построить доверительный интервал, который с заданной надёжностью $g = 0,95$ покрывает неизвестное значение r (используя Z – преобразование Фишера и таблицу значений функции Лапласа).

Практическое занятие № 18

Тема: Проверка статистических гипотез

Примерные варианты типовых задач:

Задание Проверить гипотезу.

1. При испытании радиоэлектронной аппаратуры фиксировалось число отказов. Результаты 60 испытаний приводятся ниже.

Число отказов	0	1	2	3
Число испытаний	42	11	4	3

С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона. Принять $\alpha = 0,05$.

2. Ниже приводятся данные о фактических объемах сбыта (в усл. ед.) в пяти районах:

Район	1	2	3	4	5
Объем сбыта	110	130	70	90	100

С помощью критерия Пирсона проверить, согласуются ли эти результаты с предположением о том, что сбыт продукции в этих районах должен быть одинаковым? Принять $\alpha = 0,01$.

Практическое занятие № 19

Тема: Регрессионный анализ

Примерные варианты типовых задач:

Задание № 1. Зависимость между стоимостью эксплуатации самолёта Y (млн. р.) и его возрастом X (лет) выражается следующей таблицей:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	3	3,5	3,5	4	4	6	9	10

Найти линейное уравнение регрессии Y по X , оценить его значимость на уровне $\alpha = 0,01$ и определить остаточную дисперсию.

Задание № 2. Для зависимости Y от X , заданной корреляционной таблицей, найти оценки параметров a и b уравнения линейной регрессии $y_x = a + bx$, остаточную дисперсию $2 S_0$; выяснить значимость уравнения регрессии при $\alpha = 0,05$.

Практическое занятие № 20

Тема: Случайные процессы

Примерные варианты типовых задач:

4. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = V \cdot t^2$, где V – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2 . Найти многомерную плотность распределения случайного процесса $\xi(t)$.
5. Случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой аддитивную смесь некоррелированных между собой процессов: сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, т.е. $\xi(t) = s(t) + n(t)$. Известно, что сигнал есть детерминированная функция $s(t) = A \cdot \cos(B \cdot t + \varphi)$, а помеха $n(t)$ – нормальный стационарный шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Записать одномерный закон распределения этого процесса.
6. Пусть $\xi(\omega, t) = \eta + t$, где $t > 0$ и η – случайная величина, плотность распределения которой имеет вид $p_\eta(x) = e^{-x}, x > 0$. Найти n -мерные функции распределения данного случайного процесса. При каких n существуют n -мерные плотности распределения?
7. Пусть случайный процесс $\xi(t) = \varphi(t) \cdot V, t \in [0, 1]$, где V – некоторая случайная величина, с функцией распределения $F_\nu(x)$, а $\varphi(t) > 0$. Найти многомерную функцию распределения случайного процесса $\xi(t)$.
8. Пусть случайный процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$, определяется соотношением: $\xi(t) = U \cdot t + V$, где U и V – независимые случайные величины с функциями распределения $F_U(x)$ и $F_\nu(y)$. Определить вид реализаций данного процесса $\xi(t)$ и его одномерную и n -мерную функции распределения.

Практическое занятие № 21

Тема: Законы распределения СП

Примерные варианты типовых задач:

8. Пусть случайный процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$, определяется соотношением: $\xi(t) = U \cdot t + V$, где U и V – независимые случайные величины с функциями распределения $F_U(x)$ и $F_V(y)$. Определить вид реализаций данного процесса $\xi(t)$ и его одномерную и n -мерную функции распределения.
9. В условиях задачи 8 построить пучок траекторий процесса $\xi(t)$, если $U \sim R[-1, 0]$ и $V \sim R[0, 1]$.
10. Случайный процесс $\xi(t) = X \cdot t^2 + Y \cdot t$, $t > 0$, где X, Y – независимые случайные величины с одинаковым гауссовским распределением $N(0, 1)$. Найти вероятности следующих событий:
 - a) $A_1 = \{ \text{траектория процесса монотонно не убывает} \}$;
 - b) $A_2 = \left\{ \min_{t \geq 0} \xi(t) < 0 \right\}$.

Практическое занятие № 22

Тема: Интервальная оценка

Примерные варианты типовых задач:

1. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса $\xi(t) = U \sin 3t$; где U – случайная величина, $m_U = 10$, $D_U = 0,2$.
2. Дан случайный процесс $\xi(t) = \alpha t + \eta$, $\alpha = \text{const}$, $t > 0$, η – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения:

η_i	-1	0	1
p_i	$0,25$	$0,5$	$0,25$

Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\xi(t) = \alpha t + \eta$.

3. Случайный процесс выражается через элементарную случайную функцию, которая имеет вид $Y(t) = X \cdot \cos t$, где X – дискретная случайная величина, закон распределения которой дан таблицей:

x_i	1	2	3	4
p_i	$0,5$	$0,1$	$0,2$	$0,2$

Найти значение корреляционной функции $K_Y(t_1, t_2)$, при $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$.

4. Найти нормированную взаимную ковариационную функцию случайных процессов $\xi(t) = Ut$ и $\eta(t) = U(t+1)$; где U – случайная величина, $D_U = 10$.

Практическое занятие № 23

Тема: Корреляция и ковариация СП.

Примерные варианты типовых задач:

5. Известны математические ожидания $m_\xi(t) = 2t + 1$, $m_\eta(t) = t - 1$ и ковариационные функции $K_\xi(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$, $K_\eta(t_1, t_2) = e^{-4(t_2 - t_1)^2}$ некоррелированных случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$.
6. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, ковариационную функцию $K_\xi(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t) = U \sin t + V \cos t$, где U, V - некоррелированные случайные величины, $m_U = 1, m_V = 8, D_U = D_V = 4$.
7. Заданы случайные функции $\xi(t) = U \cos t + V \sin t$, $\eta(t) = U \cos 3t + V \sin 3t$, где U, V - некоррелированные случайные величины, $m_U = 0, m_V = 0, D_U = D_V = 5$. Найти нормированную взаимную ковариационную функцию.
8. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, ковариационную функцию $K_\xi(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t) = U \cdot \sin t - 3e^{-3t} \cdot V + t^2$, где U, V - некоррелированные случайные величины, $U \sim R(-3; 3)$, $V \sim P(1, 2)$.
9. Найти ковариационную функцию $K_\zeta(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_\zeta(t)$, если $\xi(t), \eta(t)$ - некоррелированные случайные процессы, $\zeta(t) = t^2 \cdot \xi(t) - \eta(t) \cdot \sin 2t + \cos 2t$, и даны ковариационные функции $K_\xi(t_1, t_2) = 1 + \cos(t_2 - t_1)$; $K_\eta(t_1, t_2) = \exp(-|t_2 - t_1|)$.
10. Даны центрированные случайные процессы $\xi(t), \eta(t)$. Для которых известно: $K_\xi(t_1, t_2) = 4 \sin t_1 \sin t_2$; $K_\eta(t_1, t_2) = 81 \sin t_1 \sin t_2$; $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 18 \sin t_1 \sin t_2$. Найти математическое ожидание $m_\zeta(t)$, ковариационную функцию $K_\zeta(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\zeta(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\zeta(t_1, t_2)$ случайного процесса $\zeta(t) = \sin 4t + e^{-2t} \cdot \xi(t) + e^{-t} \cdot \eta(t)$.

Практическое занятие № 24

Тема: Стационарные СП

Примерные варианты типовых задач:

1. Задан случайный процесс $X(t) = \cos(t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что $X(t)$ – строго стационарный процесс.
2. Является ли стационарным случайный процесс $X(t) = U \sin t + V \cos t$, где U, V – некоррелированные случайные величины $m_U = m_V = 0$, $D_U = D_V = D$.
3. Известна ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ стационарного процесса $\xi(t)$. Доказать, что если $\eta(t) = a \cdot \xi(t)$, то $K_\eta(\tau) = a^2 \cdot K_\xi(\tau)$.
4. Задан случайный процесс $\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$, $A = \text{const}$, $\omega = \text{const}$.
Определить, является ли процесс эргодическим относительно математического ожида-

Практическое занятие № 25

Тема: Эргодические СП.

Примерные варианты типовых задач:

4. Задан случайный процесс $\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$, $A = \text{const}$, $\omega = \text{const}$.
Определить, является ли процесс эргодическим относительно математического ожидания и дисперсии.
5. Заданы два стационарных случайных процесса $X(t) = \cos(t + \varphi)$, $Y(t) = \sin(t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что эти функции стационарно связаны.
9. U и V – независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами λ_1 и λ_2 , соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t) = U + Vt$. Выяснить является ли этот процесс стационарным?

Практическое занятие № 26

Тема: Линейные преобразования случайных процессов

Примерные варианты типовых задач:

1. Задано математическое ожидание $m_X(t) = t^3 + 2t + 1$ случайного процесса $X(t)$. Найти математическое ожидание ее производной.
2. Задано математическое ожидание $m_X(t) = t^2 + 4$ случайного процесса $X(t)$. Найти математическое ожидание случайного процесса: $Y(t) = t \cdot X'(t) + t^2$.
3. Задана ковариационная функция $K_\xi(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2}$ случайного процесса $X(t)$. Найти ковариационную функцию его производной.
4. Зная математическое ожидание $m_X(t) = 3t^2 + 1$ случайного процесса $X(t)$, найти математическое ожидание интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.
5. Задан случайный процесс $X(t) = U \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$, где U – случайная величина, $m_U(t) = 5$.
Найти математическое ожидание интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.
6. Дан случайный процесс $\xi(t) = ch2t - U \cdot sh2t$, случайная величина $U \sim E(0,4)$, $\eta(t) = \xi'(t)$. Найти математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\eta(t_1, t_2)$ случайного процесса $\eta(t)$, не дифференцируя $\xi(t)$. Найти взаимную ковариационную функцию $K_{\xi, \eta}(t_1, t_2)$ и нормированную взаимную ковариационную функцию $r_{\xi, \eta}(t_1, t_2)$.
7. Дан случайный процесс $\xi(t) = (t^2 + 1) \cdot U$, где $U \sim N(-3, 5)$, и случайный процесс $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds$. Найти математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$, взаимные ковариационные функции $K_{\xi, \eta}(t_1, t_2)$, $K_{\eta, \xi}(t_1, t_2)$ не интегрируя $\xi(t)$.
8. Дан случайный процесс $\xi(t) = \frac{U}{(t^2 + 4)}$, где $U \sim P(2)$ и случайный процесс $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds$.
Найти ковариационную функцию $K_\xi(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\xi(t_1, t_2)$ случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$, не интегрируя $\xi(t)$.

Практическое занятие № 27

Тема: Спектральная плотность

Примерные варианты типовых задач:

Построить дискретный спектр стационарного случайного процесса

$$X(t) = \sum_{k=1}^6 [U_k \cos kt + V_k \sin kt], \quad \text{где } U_k, V_k, k = \overline{1,6} - \text{некоррелированные}$$

случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями:

$$D(U_1) = D(V_1) = 10.9, D(U_2) = D(V_2) = 4.6, D(U_3) = D(V_3) = 5.3, D(U_4) = D(V_4) = 7.1, D(U_5) = D(V_5) = 2.9, D(U_6) = D(V_6) = 3.$$

Практическое занятие № 28

Тема: Сходимость, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

Примерные варианты типовых задач:

Пример 7.3. Показать, что пуассоновский случайный процесс непрерывен в среднем квадратическом.

Пример 7.4. Пусть дан случайный процесс вида: $X(\omega, t) = \frac{\xi}{t}$, где $\xi \sim N(0,1)$ – стандартная нормально распределенная случайная величина. Показать, что $X(t)$ – не является непрерывным процессом в среднем квадратическом в точке $t = t_0 = 0$.

Пример 7.5. Дан случайный процесс $\xi(t) = X + t \cdot (Y + t)$, где X и Y – случайные величины. Причем Y имеет симметричное относительно нуля распределение и $P(Y = 0) = 0$. Найти вероятность того, что реализации случайного процесса при $t \geq 0$ возрастают.

При решении была указана производная процесса. Покажем, что процесс $\xi(t) = X + t \cdot (Y + t)$ дифференцируем в среднем квадратическом и имеет среднеквадратическую производную $\xi'_5(t) = 2 \cdot t + Y$.

Пример 7.2. Пусть дан случайный процесс вида: $X(\omega, t) = \xi \cdot t$, где $\xi \sim N(0, 1)$ – стандартная нормально распределенная случайная величина. Показать, что $X(t)$ – непрерывен в среднем квадратическом.

Пример 7.6. Задан случайный процесс $X(t) = \alpha \cdot \cos(\varphi \cdot t) + \beta \cdot \sin(\varphi \cdot t)$, где α, β – независимые случайные величины, числовые характеристики, которых $m_\alpha = m_\beta = 0$, $\sigma^2 = \sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2$. Показать, что это дифференцируемый процесс.

Пример 7.7. Задан случайный процесс $X(t) = V \cdot t^2$, где V – случайная величина, числовые характеристики, которой $m_V = 2$, $\sigma_V^2 = 1$. Показать, что $X(t)$ интегрируемый в среднем квадратическом процесс на $[1, 2]$.

Практическое занятие № 29

Тема: Гауссовский СП и процессы с ортогональными и независимыми приращениями

Примерные варианты типовых задач:

22. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, b – вещественное число. Найти функцию корреляции случайного процесса $Y(t) = X \cdot t + b$, $t > 0$.
27. Найти предел в среднеквадратическом $X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t)$, если $X_n(t) = \frac{\sin nt}{nt}$ причем $X_n(t)$ распределена равномерно на интервале $[0, 1]$.

Практическое занятие № 30

Тема: Интервальная оценка

Примерные варианты типовых задач:

Пример 8.3. Показать, что корреляционная функция винеровского процесса имеет вид:

$$R_w(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\}$$

Пример 8.4. Показать, что винеровский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

Пример 8.5. Показать, что пуассоновский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

33. Доказать, что процесс $X_k(t) = \sum_{n=1}^k \frac{\sin \pi n^2 t}{n^2}$ сходится к винеровскому процессу $W(t)$.

5. Пример оформления заданий

Задание. Из 10 изделий 4 имеют скрытый дефект. Наугад выбрано 4 изделий. Найдите вероятности следующих событий:

- 1) А - среди выбранных 3 изделия имеют скрытый дефект
- 2) В - среди выбранных есть хотя-бы одно изделие со скрытым дефектом
- 3) С - среди выбранных не более двух изделий со скрытым дефектом

Решение:

- 1) Выбрать любые четыре изделия из 10 можно C_{10}^4 способами. Поэтому имеем 210 равновозможных исходов. Нам нужно достать 1 годное изделие из 6 возможных. Это можно сделать $C_6^1 = 6$ способами. И из 4 изделий нужно достать 3 бракованных изделия, это можно сделать $C_4^3 = 4$ способами. В итоге получаем:

$$P(A) = \frac{C_6^1 * C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{24}{210} = 0,114$$

- 2) Найдём вероятность того, что среди выбранных нету ни одного изделия со скрытым дефектом. Т.е. $\frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} = 0,071$

Тогда, вероятность того, что среди выбранных есть хотя бы одно со скрытым дефектом:
 $P(B) = 1 - 0.071 = 0.929$

- 3) Найдём вероятность, что среди выбранных нету ни одного изделия (см. пункт 2) $= 0,071$

Вероятность того, что среди 4 изделий 1 имеет дефект: $\frac{C_4^1 * C_6^3}{C_{10}^4} = 0.381$

Вероятность того, что среди 4 изделий 2 имеют дефект: $\frac{C_4^2 * C_6^2}{C_{10}^4} = 0.429$

Теперь найдём вероятность того, что среди выбранных изделий не более двух имеют скрытый дефект:

$$P(C) = 0.071 + 0.381 + 0.429 = 0.881$$

Ответ: 1) $P(A) = 0.114$;

2) $P(B) = 0.929$;

3) $P(C) = 0.881$.

6. Рекомендуемая учебная литература и иные материалы

6.1 Основная литература

6.1.1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Рекомендовано Министерством образования РФ в качестве учебного пособия - М.: Высшее образование, 2008 - 479 с

6.1.2 Миллер Б.М. Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. Под ред. А.И. Кибзуна. - М.: Физматлит, 2007 - 320 с.

6.1.3 Кацман Ю.Я. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы [Электронный ресурс]: учебник/ Кацман Ю.Я.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Томский политехнический университет, 2013.— 131 с. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/34722.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

6.2 Дополнительная литература

6.2.1 Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Учебное пособие. Рекомендовано Министерством образования и науки РФ - М.: КНОРУС, 2010 - 496 с.

6.2.2 Володин Б.Г., Ганин М.П., Динер И.Я. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. А.А. Свешникова. - СПб: Лань, 2008 - 448 с.

6.2.3 Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Айрис-пресс, 2010 - 288 с.

6.3 Методические указания, рекомендации и другие материалы к занятиям

6.3.1 Теория вероятностей и математическая статистика. Часть I: Сборник индивидуальных заданий и методические указания по их выполнению для студентов всех форм обучения Сост. Зюзина Н.Ю., Тюрмина М.В. - НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2016 – 34 с.