ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат:
2FC246F6C833D54EB0E94DC86683EC3124321638
Владелец: Глебов Владимир Владимирович
Действителен: с 07.09.2021 до 07.12.2022

Н.В. Жидкова, О.Ю. Мельникова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

Ай Пи Эр Медиа
Саратов • 2018

УДК 519.85
ББК 22.1
Ж69

Жидкова Н.В.
Ж69 Методы оптимизации систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. В. Жидкова, О. Ю. Мельникова. — Электрон. дан. и прогр. (7 Мб). — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 149 с.

ISBN 978-5-4486-0257-3

В настоящем пособии рассматриваются различные экономические задачи математического программирования. В книге излагается теоретическая сторона решения этих задач. Приведены определения, формулы, а также методические указания, необходимые для решения задач; даны решения типовых задач, показаны возможности использования в этих целях MS Excel. Приведены задачи по вариантам для самостоятельного решения и перечень контрольных вопросов.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.01 «Экономика», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», для выполнения практических заданий по курсам «Методы оптимальных решений», «Методы оптимизации» и «Методы оптимизации информационных систем». Соответствует требованиям ФГОС ВО и ОП ВО по данным направлениям подготовки.

Учебное электронное издание

© Жидкова Н.В., Мельникова О.Ю., 2017
© ООО «Ай Пи Эр Медиа», 2017

Издано в авторской редакции

Технический редактор *А.В. Неверова*
Компьютерная верстка, обложка *С.С. Сизиумовой*

Для создания электронного издания использовано:
Приложение pdf2swf из ПО Swftools, ПО IPRbooks Reader, разработанное на основе Adobe Air

Подписано к использованию 17.11.2017. Объем данных 7 Мб.

Издание представлено в электронно-библиотечных системах
IPRbooks (www.iprbookshop.ru),
Библиокомплектатор (www.bibliocomplectator.ru)

Бесплатный звонок по России: **8-800-555-22-35**
Тел.: 8 (8452) 24-77-97, 8 (8452) 24-77-96

Отдел продаж и внедрения ЭБС:
доб. 206, 213, 144, 145
E-mail: sale@iprmedia.ru

Отдел комплектования ЭБС:
доб. 224, 227, 208
E-mail: mail@iprbookshop.ru

По вопросам приобретения издания обращаться:
доб. 208, 201, 222, 224
E-mail: izdat@iprmedia.ru, author@iprmedia.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **6**
1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ **7**
1.1. Построение экономико-математической модели 9
1.2. Приведение задачи к каноническому виду 12
1.3. Графическое решение задачи линейного программирования 14
1.4. Двойственная задача в линейном программировании 19
2. СИМПЛЕКС-МЕТОД В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ **25**
2.1. Табличный симплекс-метод 25
2.2. Метод искусственного базиса (Симплекс М-метод) 31
3. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ **36**
3.1. Линейное программирование с параметром 36
в целевой функции 36
3.2. Линейное программирование с параметром в правых частях ограничений 38
4. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ **45**
4.1. Графический метод решения целочисленных задач линейного программирования 45
4.2. Решение целочисленных задач методом ветвей и границ 47
5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ **52**
5.1. Оптимальная стратегия замены оборудования методом динамического программирования 53
5.2. Оптимальное распределение ресурсов методом динамического программирования 57
6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА **62**
6.1. Постановка транспортной задачи 62
6.2. Математическая модель транспортной задачи 64
6.3. Методы определения первоначального опорного плана 69
6.4. Определение оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов 75
7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР **84**
7.1. Основные понятия теории игр 84
7.2. Решение игр в чистых стратегиях 85
7.3. Решение игр в смешанных стратегиях 87
7.3.1. Решение конечной игры 2×2 без седловой точки 89
7.3.2. Решение игр вида 2×n и m×2 графоаналитическим способом 95
7.4. Игры с природой 97
8. ВОЗМОЖНОСТИ ПАКЕТА *MS EXCEL* ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ **103**
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ **109**
Практическая работа 1. Сущность оптимизационных методов 109
Практическая работа 2. Основы линейного программирования (каноническая форма) 120

Практическая работа 3. Основы линейного программирования (графический метод) 122
Практическая работа 4. Симплекс-метод 124
Практическая работа 5. Симплекс-метод (метод искусственного базиса) 126
Практическая работа 6. Двойственность в линейном программировании 128
Практическая работа 7. Параметрическое программирование (параметр в целевой функции) 128
Практическая работа 8. Параметрическое программирование (параметр в правых частях ограничений) 131
Практическая работа 9. Целочисленные задачи линейного программирования 133
Практическая работа 10. Динамическое программирование (оптимальная стратегия замены оборудования) 135
Практическая работа 11. Динамическое программирование (оптимальное распределение ресурсов) 136
Практическая работа 12. Транспортные задачи (определение первоначального опорного плана) 140
Практическая работа 13. Транспортные задачи (определение оптимального плана) 142
Практическая работа 14. Использование MS Excel при решении задач линейного программирования 142
Практическая работа 15. Элементы теории игр (игры в чистых стратегиях) 142
Практическая работа 16. Элементы теории игр (игры в игр в смешанных стратегиях) 143
Практическая работа 17. Элементы теории игр (игры с природой) 144
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ 146
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 149

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью данного курса является ознакомление студентов с основными математическими моделями и методами, используемых в процессах принятия решений.

Повышение эффективности производства является главным направлением развития экономики и связано с внедрением результатов и достижений научно-технического прогресса, рациональных форм технологии и организации производства, повышением интенсификации использования основных фондов и денежных средств и т.п.

Современная экономическая теория как на макро-, так и на микроуровне включает в себя в качестве необходимого элемента математические методы и модели. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные и существенные связи экономических переменных и объектов. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений методами дедукции можно получать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и сделанные предпосылки. В-третьих, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы.

Как выработать наилучшее решение в сложной экономической ситуации, рассчитать возможную прибыль и убытки, найти, какие условия кредита сегодня самые выгодные, определить, сколько будут стоить через год-два деньги? Ответы на эти вопросы можно найти на стыке экономики и математики с помощью особых приемов, называемых «экономико-математическое моделирование».

В этих условиях планирование функционирования и развития производства, управление им с помощью традиционных методов не всегда обеспечивает получение обоснованных решений. Одним из основных путей повышения научного уровня с целью обеспечения максимальной эффективности планирования производства и управления им является внедрение математических методов на основе широкого использования современной электронно-вычислительной техники.

Экономико-математические методы и современная вычислительная техника позволяют отыскивать оптимальные решения из всей совокупности решений.

1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

На практике часто применяются количественные модели и методы, цель которых найти оптимальную стратегию (или хотя бы рассчитать результат при выбранной стратегии) в условиях, когда все параметры и правила функционирования системы четко определены и не подвержены никаким случайным воздействиям. Широко используемым методом, применяемым для задач такого типа, является метод линейной оптимизации. С помощью моделей линейной оптимизации рассматриваются задачи, целью которых является составление оптимальных планов. Речь может идти об оптимальных планах производства, продаж, закупок, перевозок, об оптимальном финансовом планировании, оптимальной организации рекламной кампании или об оптимальном плане инвестиционного портфеля фирмы.

При постановке любой задачи оптимизации необходимо, прежде всего, определить количественную характеристику цели, которую хотелось бы достичь в процессе оптимизации – *целевую функцию*. Это может быть максимум прибыли или минимум издержек (в денежном, временном или каком-либо другом выражении). Целевая функция показывает, почему одно рассматриваемое решение лучше или хуже другого.

Целевая функция зависит от величин, называемых *переменными*. Эти величины, мы должны изменять, разыскивая оптимальное решение. Цель оптимизации найти такие значения переменных, при которых целевая функция максимальна или минимальна.

Любая оптимизация всегда проводится при наличии некоторых ограничений – *условий*, ограничивающих изменения переменных при поиске максимальной или минимальной целевой функции. Эти ограничения могут диктоваться вторичными целями (например, минимизируя риск инвестиционного портфеля, необходимо одновременно добиться ожидаемой прибыли не хуже заданной), ограниченностью ресурсов, находящихся в распоряжении (денежных, временных, материальных), а также установленными «правилами игры» (рыночные ограничения, нормативные акты, лимитирующие ту или иную характеристику или любые требования субъекта, принимающего решения).

Линейная оптимизация имеет дело с моделями, в которых целевая функция линейно зависит от переменных, и ограничения представляют собой линейные уравнения или неравенства относительно переменных. Фактически, это означает, что целевая функция и ограничения могут представлять собой только суммы произведений постоянных коэффициентов на переменные в первой степени, т.е. выражения типа ($c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$).

Для решения задач линейной оптимизации можно использовать надстройку к программе электронных таблиц *MS Excel*, которая называется «Поиск решения».

В общем виде задача линейного программирования имеет следующую формулировку: найти значения n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые обращают в min (max) линейную функцию следующего вида

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max) . \qquad (1)$$

При этом переменные должны удовлетворять ограничениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2)$$

где $x_j \ge 0$ для $j = \overline{1,n}$.

В дальнейшем, для определенности, всегда будем рассматривать задачу минимизации $F(x)$, т.к. если по содержанию задачи надо найти max $F(x)$, то такая задача сводится к нахождению min (– $F(x)$).

Допустимым решением задачи линейного программирования называется любая совокупность переменных удовлетворяющих условиям (2).

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется такое решение из множества допустимых решений, при котором линейная функция обращается в минимум.

Множество точек пространства $\mathbf{R^n}$, координаты которых удовлетворяют ограничениям (2), называется областью допустимых решений.

Задача линейного программирования может быть записана в следующих формах:

1. Общий вид – найти минимум (максимум) целевой функции $F(x)$ при ограничениях (2) и условии неотрицательности переменных.

2. Канонический вид – найти минимум (максимум) целевой функции $F(x)$, где все ограничения заданы в виде равенств и есть условие неотрицательности переменных.

1.1. Построение экономико-математической модели

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения экономики, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) Что является искомыми величинами задачи?

2) Какова цель решения? Какой параметр задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком направлении должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?

3) Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в математическом виде, т.е. к записи математической модели.

1) Искомые величины являются переменными задачи, которые как правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Цель решения записывается в виде целевой функции, обозначаемой, например, $F(x)$. Математическая формула целевой функции отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

3) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ограничений. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

Пример 1.

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: *A* и *B*. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 12 т соответственно. Известны расходы *A* и *B* на 1 т соответствующих красок (таблица 1). Изучение рынка сбыта

показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 4 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1

Параметры задачи о производстве красок

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
A	1	2	6
B	3	5	12

Решение.

В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются суточные объемы производства каждого вида красок:

x_1 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр суточного дохода, который должен стремится к максимуму. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т.е. x_1 и x_2 т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс. руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен $3x_1$ тыс. руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида – $2x_2$ тыс. руб. в сутки. Поэтому запишем целевую функцию в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок) $F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$.

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

– количество ингредиентов *A* и *B*, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;

– согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;

– объем производства краски 2-го вида не должен превышать 4 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;

– объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

1) расходом ингредиентов;

2) рыночным спросом на краску;

3) неотрицательностью объемов производства.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента *A* на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. *A*) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. *A*) (таблица 1). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т ингр. *A*. Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента *A* в сутки (таблица 1). Таким образом, ограничение по расходу *A* имеет вид $1x_1 + 2x_2 \le 6$. Аналогична математическая запись ограничения по расходу *B*.

Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет вид $x_2 - x_1 \le 1$. Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида имеет вид $x_1 \le 4$.

Неотрицательность объемов производства задается как $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Таким образом, математическая модель этой задачи имеет вид

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2. Приведение задачи к каноническому виду

Задачу можно привести к каноническому виду, путем введения дополнительных неотрицательных переменных. Т.е. свести к системе m линейных уравнений с n переменными.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называются основными (или базисными), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные ($m - n$) переменных называются неосновными или (свободными).

Базисные переменные – это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом и не входят в целевую функцию.

Каноническая форма задачи линейного программирования:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min . \qquad (3)$$

При этом переменные должны удовлетворять ограничениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (4)$$

где $b_i \geq 0$ и $x_j \geq 0$ для $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Для того, чтобы привести задачу линейного программирования к канонической форме, нужно уметь сводить задачу максимизации к минимизации, переходить от ограничений неравенств к ограничениям равенств и заменять переменные, которые не подчиняются условию неотрицательности.

Максимизация некоторой функции эквивалентна минимизации той же функции, взятой с противоположным знаком, и наоборот.

Правила приведения задачи линейного программирования к каноническому виду:

1. если в исходной задаче требуется определить максимум линейной функции, то следует изменить знак и искать минимум этой функции;

2. если в ограничении правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на –1;

3. если среди ограничений имеются неравенства, то путем введения дополнительных неотрицательных переменных они преобразуются в равенства;

4. если некоторая переменная x_k не имеет требуемого ограничения по знаку, то она заменяется (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью между двумя новыми неотрицательными переменными: $x_k = x'_k - x_l$, где l – свободный индекс; $x'_k \geq 0$, $x_l \geq 0$.

Пример 2.

Привести к канонической форме задачи линейного программирования:

$$F(x) = 3x_1 + 5x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1, \\ 4x_1 - 2x_2 \leq -7, \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Введем в каждое уравнение системы ограничений выравнивающие переменные x_4, x_5, x_6. Система запишется в виде равенств, причем в первое и третье уравнения системы ограничений переменные x_4, x_6 вводятся в левую часть со знаком «+», а во второе уравнение вводится x_5 со знаком «–».

Отсюда система неравенств будет преобразована к виду:

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_6 = -7, \\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Свободные члены в канонической форме должны быть положительными, для этого два последних уравнения умножим на -1:

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_6 = 7. \end{cases}$$

В канонической форме записи задач линейного программирования все переменные, входящие в систему ограничений, должны быть неотрицательными. Поэтому для $x_1 \le 0$ допустим, что $x_1 = x_1' - x_7$, где $x_1' \ge 0,\ x_7 \ge 0$.

Подставляя данное выражение в систему ограничений и целевую функцию и записывая переменные в порядке возрастания индекса, получим задачу линейного программирования, представленную в канонической форме:

$$F(x) = 3x_1' + 5x_2 - x_3 - 3x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1' - x_2 + 2x_3 + x_5 + x_7 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_6 + 4x_7 = 7, \\ x_1' \ge 0,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{2,7}. \end{cases}$$

1.3. Графическое решение задачи линейного программирования

Графический способ используется для:

– решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;

– решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической форме содержится не более двух свободных переменных.

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач линейного программирования с двумя переменными. Он основан на геометрическом представлении допустимых решений и целевой функции задачи.

Было доказано, что оптимальное решение задач линейного программирования находится, по крайней мере, в одной из угловых точек многогранника решений. Рассмотрим задачу в стандартной форме с двумя переменными.

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min(\max)\ .$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \ge b_j \end{cases} \qquad (5)$$

Каждое из неравенств задачи линейного программирования (5) определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость (рис. 1), а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей.

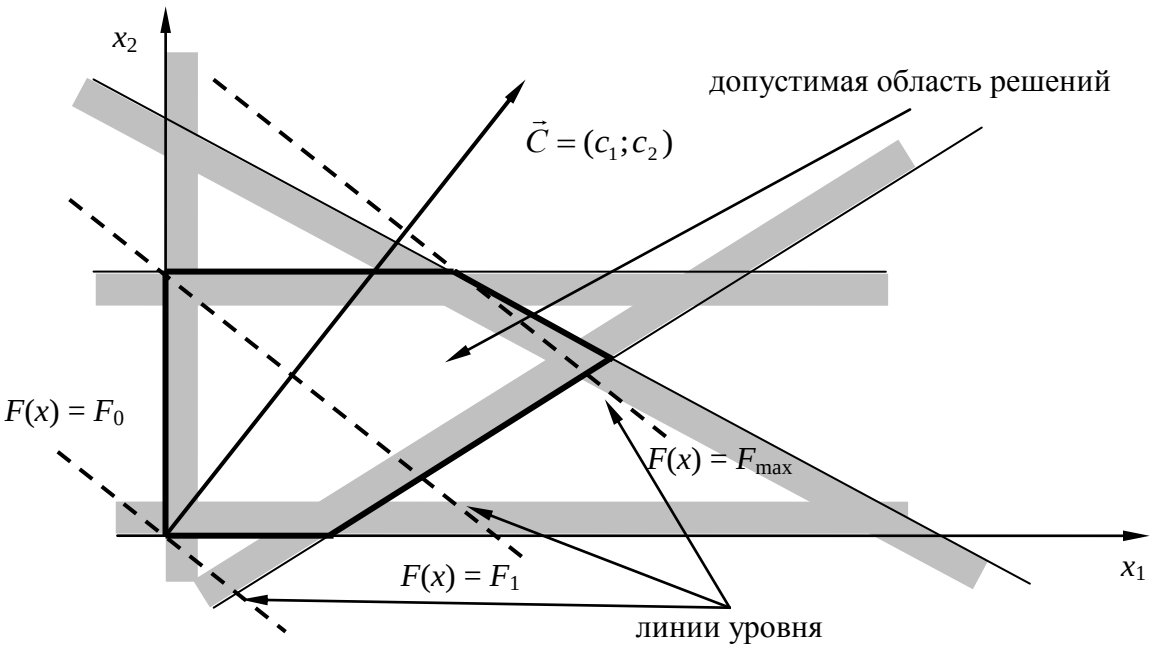

Рис. 1. Геометрическая интерпретация ограничений и целевой функции задачи линейного программирования

Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется областью допустимых решений. Область допустимых решений всегда представляет собой выпуклую фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки *A* и *B* принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок *AB* принадлежит ей. Область допустимых решений графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучем, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи линейного программирования область допустимых решений является пустым множеством.

Целевая функция $F(x)$ при фиксированном значении $F(x) = F$ определяет на плоскости прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = F$. Изменяя значения *F*, мы получим семейство параллельных прямых, называемых линиями уровня. Это связано с тем, что изменение значения *F* повлечет изменение лишь длины отрезка, отсекаемого линией уровня на оси x_2 (начальная ордината), а угловой коэффициент прямой останется постоянным. Поэтому для решения будет достаточно построить одну из линий уровня, произвольно выбрав значение *F*.

Вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$ с координатами из коэффициентов целевой функции при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня (рис. 1). Направление вектора $\vec{C}$ совпадает с направлением возрастания целевой функции, что является важным моментом для решения задач.

Направление убывания целевой функции противоположно направлению вектора $\vec{C}$.

Суть графического метода заключается в следующем. По направлению (против направления) вектора $\vec{C}$ в области допустимых решений производится поиск оптимальной точки. Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня $F_{\max}$ ($F_{\min}$), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции $F(x)$.

Оптимальное решение всегда находится на границе области допустимых решений, например, в последней вершине многоугольника области допустимых решений, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне.

При поиске оптимального решения задач линейного программирования возможны следующие ситуации:

– существует единственное решение задачи;

– существует бесконечное множество решений (альтернативный оптимум);

– целевая функция не ограничена;

– область допустимых решений – единственная точка;

– задача не имеет решений.

Методика решения задач линейного программирования графическим методом:

1. Необходимо в ограничениях задачи (5) заменить знаки неравенств на знаки точных равенств и построить соответствующие прямые: $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$,.

2. Найти и заштриховать полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи. Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки (например, (0; 0)), и проверить истинность полученного неравенства. Если неравенство истинное, то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; иначе (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

3. Определить область допустимых решений как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделить ее. При отсутствии области допустимых решений задача не имеет решений.

4. Если область допустимых решений – не пустое множество, то необходимо построить целевую прямую, т.е. любую из линий уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = F$, где F – произвольное число, удобное для проведения расчетов. Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.

5. Построить вектор $\vec{C}=(c_1;c_2)$, который начинается в точке (0; 0), заканчивается в точке (c_1; c_2). Если целевая прямая и вектор $\vec{C}$ построены верно, то они будут перпендикулярны.

6. При поиске максимума целевой функции надо передвигать целевую прямую в направлении вектора $\vec{C}$, при поиске минимума целевой функции – против направления вектора $\vec{C}$. Последняя по ходу движения вершина области допустимых решений будет точкой максимума или минимума целевой функции. Если такой точки (точек) не существует, то целевая функция неограниченна на множестве планов сверху (при поиске максимума) или снизу (при поиске минимума).

7. Определить координаты точки максимума (минимума) целевой функции и вычислить значение целевой функции в этой точке. Для вычисления координат оптимальной точки необходимо решить систему уравнений прямых, на пересечении которых находится данная точка.

Пример 3.

В суточный рацион включают два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице 2. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Таблица 2

Питательные вещества	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		$П_1$	$П_1$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

Решение.

Обозначим x_1 – количество продукта питания $П_1$,

x_2 – количество продукта питания $П_2$.

$$F(x)=2x_1+4x_2 \to \min \text{ (суммарная стоимость).}$$

При ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 200, \\ 0{,}2x_1+0{,}2x_2 \ge 120, \\ 0{,}4x_1+0{,}2x_2 \ge 160, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

В ограничениях задачи заменим знаки неравенств на знаки точных равенств

$$\begin{cases} x_1 = 200 \to Z_1, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 = 120 \to Z_2, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 = 160 \to Z_3, \\ x_1 = 0 \to Z_4, \\ x_2 = 0 \to Z_5. \end{cases}$$

и построим соответствующие прямые: Z_1, Z_2, Z_3 (рис. 2).

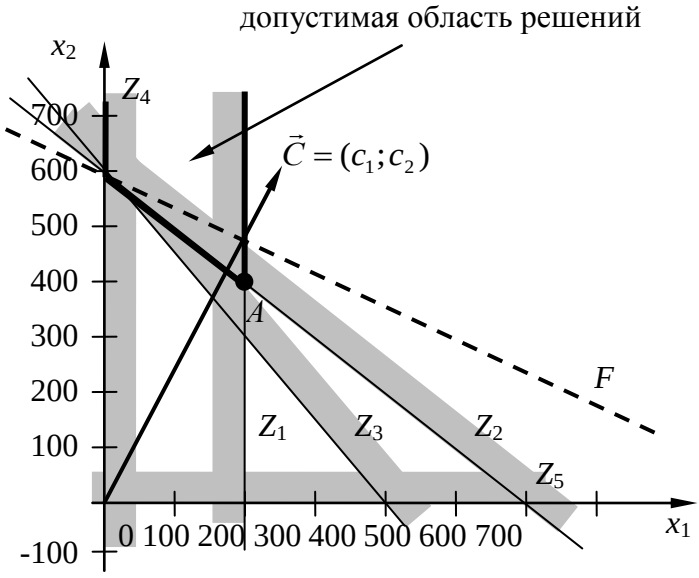

Рис. 2. Решение задачи линейного программирования графическим методом

Заштрихуем полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи. Определим область допустимых решений как часть плоскости, принадлежащей одновременно всем разрешенным областям, и выделим ее.

Построим целевую прямую со значением $F(x) = 2x_1 + 4x_2 = 2400$ для точек $x_1 = 0, x_2 = 600$ и $x_1 = 1200, x_2 = 0$. Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.

Построим вектор $\vec{C}$, который начинается в точке (0; 0), заканчивается в точке (2; 4). Если целевая прямая и вектор $\vec{C}$ построены верно, то они будут перпендикулярны.

Т.к. в задаче ищем минимум целевой функции, то будем передвигать целевую прямую против направления вектора $\vec{C}$. Последняя по ходу движения вершина области допустимых решений (точка *A*) будет точкой минимума целевой функции.

Определим координаты точки минимума целевой функции и вычислим значение целевой функции в этой точке. Для вычисления координат оптимальной точки решим систему уравнений прямых Z_1 и Z_2, на пересечении которых находится данная точка.

$$\begin{cases} x_1 = 200 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 200 \\ 0{,}2x_2 = 120 - 0{,}2 \cdot 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 400 \end{cases}$$

Получаем, что минимальное значение, при заданных ограничениях на переменные, достигается в точке $A(200;400)$. $F(A)=2000$, т.е. наименьшая стоимость 2000 будет при рационе 200 ед. продукта $П_1$ и 400 ед. продукта $П_2$.

1.4. Двойственная задача в линейном программировании

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом с ней связанную другую задачу, которая называется двойственной по отношению к исходной.

Под двойственной задачей понимается вспомогательная задача линейного программирования, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий прямой задачи. Заинтересованность в определении оптимального решения прямой задачи путем решения двойственной к ней задачи обусловлена тем, что вычисления при решении двойственной задачи могут оказаться менее сложными. Трудоемкость вычислений при решении задачи линейного программирования в большей степени зависит от числа ограничений, а не от количества переменных.

С экономической точки зрения двойственную задачу можно интерпретировать так: какова должна быть цена единицы каждого из ресурсов, чтобы при заданных количествах ресурсов b_i и величинах стоимости единицы продукции c_j минимизировать общую стоимость затрат. А исходную задачу определим следующим, образом: сколько и какой продукции x_j ($j = \overline{1,n}$) необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях c_j ($j = \overline{1,n}$) единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов b_i ($i = \overline{1,m}$) максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении. Большинство задач линейного программирования изначально определяются как исходные или двойственные задачи. Сделав вывод можно говорить о паре двойственных задач линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования будем считать задачу следующего вида:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (6)$$

где $x_j \ge 0$ для $j = \overline{1,n}$.

Двойственная задача, состоящая в нахождении минимального значения функции

$$Z(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge c_2, \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases} \qquad (7)$$

где $y_i \ge 0$ для $i = \overline{1,m}$, называется двойственной по отношению к задаче (6).

Задачи (6) и (7) образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой. Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача составляется согласно следующим правилам:

1) целевая функция исходной задачи (6) задается на максимум, а целевая функция двойственной (7) – на минимум;

2) число переменных в двойственной задаче (7) равно числу ограничений в системе исходной задачи (6), а число ограничений в системе двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче;

3) матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи (6)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

и аналогичная матрица в двойственной задаче (7) получается транспонированием матрицы (8) (т.е. заменой строк столбцами, а столбцов – строками)

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

4) коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи (7) являются свободные члены в системе исходной задачи (6), а правыми частями в соотношениях системы двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи;

5) если переменная x_j исходной задачи (6) может принимать только лишь положительные значения, то j–е условие в системе двойственной задачи (7) является неравенством вида «≥»; если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то 1 – соотношение в системе представляет собой уравнение. Аналогично, если i – соотношение в системе исходной задачи (6) является неравенством, то i–я переменная двойственной задачи $y_i \geq 0$. В противном случае переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения прямой задачи и соотношения двойственной задачи являются неравенствами вида «≤». Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

Несимметричные пары задач отличаются от симметричных двумя особенностями:

1) ограничения задачи выражаются уравнениями, а не неравенствами;

2) в задаче отсутствуют условия неотрицательности переменных y_i.

Каждая из пары двойственных задач может быть решена самостоятельно, однако из решения одной можно получить решение другой.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 1. Если X – некоторый план исходной задачи (6), а Y – произвольный план двойственной задачи (7), то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y, т.е. $F(X) \le Z(Y)$ или $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Лемма 2. Если $F(X^*) = Z(Y^*)$ для некоторых планов $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ задач (6) и (7), то X^* – оптимальный план исходной задачи, а Y^* – оптимальный план двойственной задачи.

Теорема 1 (первая теорема двойственности). Если одна из задач двойственной пары (6) или (7) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны, т.е. $F(X^*) = Z(Y^*)$ или $F_{\max} = Z_{\min}$. Если же целевая функция одной задачи из двойственной пары неограничена (для исходной (6) – сверху, для двойственной (7) – снизу), то другая задача вообще не имеет планов.

Экономический смысл первой теоремы двойственности: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и получить максимальную прибыль от ее реализации $F_{\max}$, либо продавать ресурсы по оптимальным ценам $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ и возместить от продажи минимальные затраты на ресурсы $Z_{\min}$.

Теорема 2 (вторая теорема двойственности). Если хотя бы одно оптимальное решение одной из двойственных задач обращает i-е ограничение задачи в строгое неравенство, то i-я компонента каждого оптимального решения второй двойственной задачи равна нулю.

Если же i-я компонента хотя бы одного оптимального решения одной из двойственных задач положительна, то каждое оптимальное решение другой двойственной задачи обращает i-е ограничение в строгое равенство.

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ задачи (6) и план $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ задачи (7) являются оптимальными планами этих задач тогда и только то-

гда, когда для любого $j=\overline{1,n}$ выполняется равенство $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0$, а для любого $i=\overline{1,m}$ $-\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0$,

Следствия из второй теоремы двойственности и их экономический смысл:

1. Если в оптимальном плане производства продукция вида *j* выпускается, то стоимость ресурсов затраченных на выпуск этой единицы продукции в точности равна прибыли от этой единицы продукции ($x_j > 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$)

2. Если стоимость ресурсов, затраченных на выпуск одной единицы продукции вида *j* больше прибыли от единицы продукции ($\sum a_{ij} > c_j$), то продукцию вида *j* выпускать невыгодно.

3. Если в оптимальном плане двойственной задачи цена единицы *i*-го ресурса положительна, т.е. $y_i > 0$, то такой ресурс в оптимальном плане производства расходуется полностью ($y_i > 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$) такой ресурс называется дефицитным.

4. Если в оптимальном плане производства какой-то *i*-й ресурс использован не полностью, т.е. имеется остаток ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < b_i$), то оценка такого ресурса в оптимальном плане двойственной задачи будет равна 0, это недефицитный ресурс. Равенство нулю такой оценки говорит о том, что неиспользованное количество ресурсов – остаток ресурсов в прибыль вклада не вносит.

Пример 4.

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на примере. Пусть для производства трех видов изделий *A*, *B*, и *C* используются три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количествах 180, 210, 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида заданы в таблице 3.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость при условиях, что используемое сырье каждого вида не превосходит заданный объем.

Таблица 3

вид сырья	нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции			объем сырья
	A	*B*	*C*	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
цена единицы продукции	10	14	12	

Решение.

Обозначим: x_1 – произведено изделий *A*, x_2 – произведено изделий *B*, x_3 – произведено изделий *C*. Исходная (прямая задача) имеет вид:

$$F(x) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Формально построим двойственную задачу по описанному выше правилу. Обозначим двойственные переменные y_1, y_2, y_3.

$$Z(y) = 180y_1 + 210y_2 + 224y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \le 12, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Формулировка двойственной задачи: найти такую совокупность y_1, y_2, y_3 цен каждого вида сырья (оценки сырья каждого вида), при которых общая стоимость (общая оценка) всего сырья, используемого для производства продукции, была минимальной при условиях, что суммарная цена сырья всех трех видов, используемого на производство единицы продукции данного типа (*A*, *B*, *C*) была не меньше цены единицы продукции данного типа. Можно дать экономическую интерпретацию любой двойственной задачи линейной оптимизации.

2. СИМПЛЕКС-МЕТОД В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

2.1. Табличный симплекс-метод

Решение основной задачи линейного программирования графическим методом не всегда возможно, например, для случая большого числа переменных, тогда используется так называемый симплекс-метод, где используется тот факт, что если задача линейного программирования имеет решение, то хотя бы одно из них – угловая точка многогранника решений (базисное). Поэтому решение задачи линейного программирования может быть следующим: перебрать конечное число всех угловых точек многогранника решений и выбрать среди них ту, на которой целевая функция принимает оптимальное решение. Однако, практическое осуществление такого перебора связано с трудностями, т.к. число решений может быть чрезвычайно велико.

Алгоритм составления симплексных таблиц:

1. Система ограничений приводится к каноническому виду.

Для нахождения первоначального базисного решения переменные разбиваются на базисные ($x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$) и свободные ($x_1, x_2, ..., x_k$). В качестве базисных переменных следует выбрать такие, каждая из которых входит только в одно из уравнений системы ограничений, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных.

$$F(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k \to \max(\min) \tag{10}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + x_{k+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + x_{k+2} = b_2, \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mk}x_k + x_n = b_m, \end{cases} \tag{11}$$

2. Составляют таблицу (таблица 4), где в последней строке указываются коэффициенты функции (c_j) с противоположным знаком. В левом столбце таблицы записывают базисные переменные, в первой строке – все переменные, во втором столбце свободные члены системы (b_i).

3. Проверяют выполнение критерия оптимальности. Отсутствие в последней строке отрицательных (положительных) коэффициентов показывает, что решение оптимально, достигнут максимум (минимум) функции в столбце свободных членов системы нижней строке таблицы. Базисные переменные при этом принимают значение b_i, а свободные

переменные равны нулю, т.е. получается оптимальное базисное решение (оптимальный опорный план).

Таблица 4

переменные задачи		b_i	свободные переменные				базисные переменные			
			x_1	x_2	…	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	…	x_n
базисные переменные	x_{k+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	1	0	…	0
	x_{k+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	0	1	…	0
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	x_n	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mk}	0	0	…	1
индексная строка $F(x)$		$-c_0$	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_k$	0	0	…	0

4. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный (положительный) коэффициент в последней строке (c_j) определяет *ключевой столбец S*. Составляют оценочные ограничения по следующим правилам:

– ∞, если b_i и a_{is} имеют разные знаки;
– ∞, если $b_i = 0$ и $a_{is} < 0$;
– ∞, если $a_{is} = 0$;
– 0, если $b_i = 0$ и $a_{is} > 0$;
– $\left|b_i / a_{is}\right|$, если b_i и a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяют $\min\left|b_i / a_{is}\right|$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума. Далее выбирают строку с номером q, на которой он достигается (любую, если их несколько), и называют ее *ключевой строкой*. На пересечении ключевой строки и ключевого столбца находится *разрешающий элемент* a_{qs} (таблица 5).

Таблица 5

переменные задачи		b_i	свободные переменные					базисные переменные			$\left\|b_i / a_{is}\right\|$
			x_1	…	x_s	…	x_k	x_{k+1}	…	x_n	
базисные переменные	x_{k+1}	b_1	a_{11}	…	a_{1s}	…	a_{1k}	1	…	0	
	x_{k+2}	b_2	a_{21}	…	a_{2s}	…	a_{2k}	0	…	0	
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	x_q	b_q	a_{q1}	…	a_{qs}	…	a_{qk}	0	…	0	$\min\left\|b_i / a_{is}\right\|$
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	x_n	b_m	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mk}	0	…	1	
индексная строка $F(x)$		$-c_0$	$-c_1$	…	$-c_s$	…	$-c_k$	0	…	0	

5. Переходим к следующей таблице по правилам:

а) в левом столбце записывают новый базис: вместо основной переменной x_q - переменную x_s, а геометрически произойдет переход к соседней вершине многоугольника, где значение линейной функции «лучше». Значение линейной функции увеличится (уменьшится), т.к. переменная, входящая в выражение функции, станет базисной, т.е. будет принимать не нулевое, а положительное значение;

б) в новой таблице все элементы ключевого столбца равны 0, кроме разрешающего, он всегда равен 1;

в) значения в столбцах для переменных не вышедших из базиса переносятся в новую таблицу без изменений;

г) новую строку с номером q получают из старой делением на решающий элемент a_{qs};

д) столбец, у которого в ключевой строке имеется 0, в новой таблице будет таким же; строка, у которой в ключевом столбце имеется 0, в новой таблице будет такой же;

в) все остальные элементы вычисляют по правилу прямоугольника:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}};\ b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}; \qquad (12)$$

В результате получают новую симплекс-таблицу, отвечающую новому базисному решению. Далее переходим к пункту 3 алгоритма.

Замечание: при отыскании минимума целевой функции, полагаем, что $F_{\min} = -F_{\max}$.

При использовании симплекс-метода могут возникнуть особые случаи решения задачи:

1. Отсутствие допустимых решений. В этом случае ограничения противоречивы, и это означает, что модель построена некорректно. Необходимо построить модель, имеющую иную структуру.

2. Неограниченность. В этом случае возможно неограниченное увеличение переменных без нарушения наложенных ограничений, т.е. пространство решений, по крайней мере, в одном направлении неограниченно и целевую функцию F можно сделать как угодно малой. Разработанная модель недостаточно точна. Необходимо корректировать модель.

3. Вырожденность. Так называется ситуация, когда один или больше свободных членов в уравнениях-ограничениях равны нулю, т.е. некоторые базисные переменные в опорном решении равны нулю. В этом случае может оказаться, что замена приводит только к перестанов-

ке переменных без уменьшения функции F и через конечное число замен получается тоже, что уже было. Это явление называется зацикливанием. С практической точки зрения это означает, что в модели есть, по крайней мере, одно избыточное ограничение. Чтобы избежать зацикливания надо взять на каком-либо этапе другой ключевой столбец; или несколько изменить коэффициенты ограничений; или применить лексиграфическую процедуру, т.е. расположить базисы в лексиграфическом порядке. Таким образом, никогда не встретится базис уже встречавшийся ранее. Это обеспечивает, что через конечное число итераций F снова будет убывать.

4. Альтернативность. Альтернативные решения возникают тогда, когда оптимальное решение достигается не в одной крайней точке, а на некотором многограннике, порожденном крайними точками. Здесь F принимает одно и тоже значение во всех точках этого многогранника. Существование альтернативного решения на практике может быть удобно, т.к. оптимальное решение можно выбрать, используя еще какие-либо дополнительные соображения.

Пример 5.

Пусть предприятием выпускается продукция четырех видов $П_1$ – $П_4$ с использованием для этого ресурсов, виды и нормы расхода по которым, а также уровень получаемой от их реализации прибыли приведены в таблице 6.

Таблица 6

Ресурсы	Нормы затрат сырья на единицу продукции				Располагаемый ресурс
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
трудовые	1	1	1	1	20
сырье	2	6	4	3	60
оборудование	4	6	10	12	40
Прибыль с единицы продукции	60	40	80	100	

Необходимо получить вариант оптимального плана производства по критерию максимума прибыли.

Решение.

Обозначим: x_1 – произведено изделий $П_1$, x_2 – произведено изделий $П_2$, x_3 – произведено изделий $П_3$, x_4 – произведено изделий $П_4$. Математическую модель данной задачи можно записать так:

$$F(x) = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 100x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 60, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 \le 40, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

В математическую модель задачи введем дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 и запишем ограничения в виде уравнений:

$$-F(x) = -60x_1 - 40x_2 - 80x_3 - 100x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_6 = 60, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 + x_7 = 40, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Задачу можно представить в виде симплекс-таблицы 7.

Таблица 7

переменные задачи		свободные члены	свободные переменные				базисные переменные		
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
базисные переменные	x_5	20	1	1	1	1	1	0	0
	x_6	60	2	6	4	2	0	1	0
	x_7	40	4	6	10	4	0	0	1
индексная строка $F(x)$		0	– 60	– 40	– 80	– 100	0	0	0

В этой таблице свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 по условию равны нулю, а базисные переменные x_5, x_6, x_7, а также целевая функция (+ F) равны свободным членам, т.е. $x_5 = 20$, $x_6 = 60$, $x_7 = 40$, + $F = 0$.

В последней строке (индексной) таблицы имеются отрицательные оценки: – 60; – 40; – 80; –100. Необходимо взять наибольший по модулю отрицательный коэффициент (– 100), таким образом, определив ключевой столбец x_4. В этом столбце имеются три положительных элемента 1; 2; 4. Делим на эти числа соответствующие свободные члены: 20; 60; 40; из полученных частных: 20; 30; 10; наименьшее – 10; следовательно, разрешающим является элемент 4, стоящий на пересечении

ключевой строки для x_7 и ключевого столбца для x_4. Выделим эту строку и этот столбец рамками (таблица 8).

Таблица 8

переменные задачи		свободные члены	свободные переменные				базисные переменные		
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
базисные переменные	x_5	20	1	1	1	1	1	0	0
	x_6	60	2	6	4	2	0	1	0
	x_7	40	4	6	10	4	0	0	1
индексная строка $F(x)$		0	– 60	– 40	– 80	– 100	0	0	0

На следующей итерации переменную x_7 нужно вывести из базисных, а переменную x_4, ввести в базисные. Новый базис состоит из x_5, x_6, x_4. Для составления следующей таблицы 9 разделим выделенную ключевую строку таблицы 8 на разрешающий элемент 4 и полученную строку запишем на месте прежней. В ключевом столбце все элементы кроме разрешающего заменим на 0, а разрешающий будет равен 1. Все остальные элементы получаем по правилу прямоугольника (12). Этим завершается первая итерация, и в результате придем к таблице 9.

Таблица 9

переменные задачи		свободные члены	свободные переменные				базисные переменные		
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
базисные переменные	x_5	10	0	-0,5	-1,5	0	1	0	-0,25
	x_6	40	0	3	-1	0	0	1	-0,5
	x_4	10	1	1,5	2,5	1	0	0	0,25
индексная строка $F(x)$		1000	40	110	170	0	0	0	25

Расчет следующей итерации не нужен, так как значения коэффициентов индексной строки не содержат отрицательных значений. Оптимальный план производства – X = (0, 0, 0, 10), максимум целевой функции (прибыли) – $F(x)$ = 1000.

2.2. Метод искусственного базиса (Симплекс М-метод)

Для решения задачи линейного программирования симплекс-методом, как было отмечено в пункте 2.1, необходимо выразить базисные переменные через свободные. Причем базисные переменные должны иметь неотрицательные коэффициенты. Но данное условие соблюдается не для всех задач линейного программирования. В этом случае задача может быть решена методом искусственного базиса.

Данный метод решения применяется при наличии в системе ограничений и условий-равенств, и условий-неравенств, и является модификацией табличного симплекс-метода. Решение системы производится путем ввода искусственных переменных со знаком, зависящим от типа оптимума. Т.е. для исключения из базиса этих переменных последние вводятся в целевую функцию с большими отрицательными коэффициентами М для задачи максимизации, а в задачи минимизации – с положительными М. Таким образом, из исходной получается новая М-задача (поэтому метод искусственного базиса так же называют М-методом).

Пусть требуется найти максимум функции

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{\ln}x_n \le b_l, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k, \\ a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + \ldots + a_{vn}x_n = b_v. \end{cases}$$

Предположим, что все коэффициенты $b_i \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$. Если какое-то $b_i < 0$, то умножением i-го уравнения на -1 можно обеспечить неотрицательность b_i .

Система ограничений приводится к каноническому виду. Введем вспомогательные переменные $y_i \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$.

$$\begin{cases} y_k = b_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n + x_{n+k}, \\ y_v = b_v - a_{v1}x_1 - a_{v2}x_2 - \ldots - a_{vn}x_n. \end{cases}$$

Введем также дополнения в целевую функцию, для задачи, состоящей в определении максимального значения функции:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - My_k - My_v.$$

где M – некоторое достаточно большое положительное число.

Расширенная задача имеет опорный план X = (0; 0; ...; 0; b_1; b_2; ...; b_m), определяемых системой единичных векторов, образующих базис m-го векторного пространства, который называется искусственным. Сами векторы, так же как и переменные y, называются искусственными. Так как расширенная задача имеет опорный план, то ее решение может быть найдено симплексным методом.

Если в оптимальном решении М-задачи нет искусственных переменных, это решение есть оптимальное решение исходной задачи. Если же в оптимальном решении М-задачи хоть одна из искусственных переменных будет отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна и исходная задача неразрешима.

Симплекс-таблица, которая составляется в процессе решения, используя метод искусственного базиса, называется расширенной. Она отличается от обычной тем, что содержит дополнительно столбцы для искусственных переменных. При составлении симплекс таблицы полагают, что исходные переменные являются свободными, а дополнительные (x_{n+l} и x_{n+k}) и искусственные – базисными.

Пример 6.

Решить задачу линейного программирования для целевой функции

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

с системой ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Задача линейного программирования записана в общей форме. Приведем ее к канонической форме, вводя дополнительно в систему ограничений неотрицательные балансовые неизвестные x_4, x_5, x_6 следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 = 4, \\ x_3 - x_6 = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы ограничений имеет предпочтительный вид, а два других – нет (т.к. если в качестве базиса взять x_4, x_5, x_6 и придать свободным неизвестным значение, равное нулю, то неизвестные x_5 и x_6 примут отрицательные значения).

Составим М-задачу линейного программирования, для чего в левые части второго и третьего уравнений системы введем неотрицательные «искусственные» неизвестные y_1 и y_2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 + y_1 = 4, \\ x_3 - x_6 + y_2 = 1. \end{cases}$$

а в правую часть целевой функции добавим слагаемые Мy_1 и Мy_2:

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \mathrm{M}y_1 + \mathrm{M}y_2 \to \min .$$

В этой задаче базис представлен как (x_4, y_1, y_2). Начальным опорным решением будет план X = (0; 0; 0; 2; 0; 0; 4; 1).

Разрешим целевую функцию относительно свободных неизвестных x_1, x_2, x_3, x_5, x_6. Для этого найдем выражения базисных неизвестных y_1 и y_2 через свободные из последней системы уравнений и подставим эти выражения в целевую функцию. После уединения свободного члена в правой части целевая функция примет вид:

$$F(x) = -(3\mathrm{M} - 3)x_1 - (8\mathrm{M} - 2)x_2 - (3\mathrm{M} - 3)x_3 + \mathrm{M}x_5 + \mathrm{M}x_6 + 5\mathrm{M} \to \min$$

Заполним начальную симплекс-таблицу (таблица 10), где последняя строка (индексная) содержит три положительных числа: (3М − 3), (8М − 2) и (3М – 3), следовательно, начальное опорное решение М-задачи линейного программирования не является оптимальным, т.е. не дает целевой функции минимальное значение. Выберем столбец, соответствующий наибольшему положительному числу в последней строке.

Таблица 10

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2
x_4	2	2	1	1	1	0	0	0	0
y_1	4	3	8	2	0	– 1	0	1	0
y_2	1	0	0	1	0	0	– 1	0	1

индексная строка $F(x)$	5M	3M – 3	8M – 2	3M – 3	0	– M	– M	0	0

Поскольку M – достаточно большое положительное число, выбираем ключевой столбец неизвестной x_2. Делением свободных членов на соответствующие положительные числа выделенного столбца устанавливаем наименьшее частное и выбираем ключевую строку базисной неизвестной y_1, следовательно, «искусственная» неизвестная выходит из базиса, а ее место занимает неизвестная x_2. Таким образом, в следующей симплекс-таблице (таблица 11) становится на одну неизвестную, а значит, и на один столбец, меньше.

Правила составления и заполнения таблицы 11 те же, что и ранее рассмотренные в пункте 1.5 для симплекс-метода.

Таблица 11

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_2
x_4	1,5	1,625	0	0,75	1	0,125	0	0
x_2	0,5	0,375	1	0,25	0	– 0,125	0	0
y_2	1	0	0	1	0	0	– 1	1
индексная строка $F(x)$	M + 1	– 2,25	0	M – 2,5	0	– 0,25	– M	0

Новая симплекс таблица содержит в последней строке единственное положительное число: M – 2,5. Выбираем его как ключевой и находим ключевую строку y_2. Переходя к составлению и заполнению следующей симплекс-таблицы (таблица 12), заменяем в базисе неизвестную y_2 неизвестной x_3. Таким образом, все «искусственные» неизвестные (y_1 и y_2) вышли из базиса, т.е. в таблице 11 получаем исходную задачу линейного программирования, записанную в канонической форме.

Таблица 12

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0,75	1,625	0	0	1	0,125	0,75
x_2	0,25	0,375	1	0	0	– 0,125	0,25
x_3	1	0	0	1	0	0	– 1
индексная строка $F(x)$	3,5	– 2,25	0	0	0	– 0,25	– 2,5

В последней строке таблицы 12 нет положительных чисел, следовательно, найдено оптимальное решение задачи линейного программирования, записанной в канонической форме X = (0; 0,25; 1; 0,75; 0; 0), а соответствующее значение целевой функции равно $F_{\min} = 3{,}5$. Исключая из решения балансовые неизвестные, получим ответ X = (0; 0,25; 1), $F_{\min} = 3{,}5$.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Параметрическое программирование представляет собой один из разделов математического программирования, изучающий задачи, в которых целевая функция или ограничения зависят от одного или нескольких параметров.

С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как способ анализа чувствительности решения к вариации исходных данных и оценки устойчивости решения, так как исходные данные для численного решения любой реальной задачи оптимизации в большинстве случаев определяются приближенно или могут изменяться под влиянием различных факторов, что может существенно сказаться на оптимальности выбираемой программы действий. Соответственно, разумно указывать не конкретные данные, а диапазон возможного их изменения, что бы в результате решения иметь наилучшие планы для любого варианта исходных данных.

3.1. Линейное программирование с параметром в целевой функции

Рассмотрим задачу параметрического линейного программирования, в которой только коэффициенты целевой функции линейно зависят от некоторого единственного параметра λ (например, времени, температуры и т. п.):

$$F(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(c_j+d_j\lambda)x_j \to \min(\max). \tag{13}$$

Отыскать максимум (или минимум) функции при условиях

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,m},\\&x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n},\\&\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2,\end{aligned} \tag{14}$$

где a_j, c_j, d_j – постоянные коэффициенты,

λ – параметр, который изменяется в некоторых пределах (в общем случае от – ∞ до +∞).

Для каждого значения λ в промежутке $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 – произвольные действительные числа, найти оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, удовлетворяющий системе ограничений и обращающий в максимум (минимум) целевую функцию. Если обратиться к геометрической интерпретации задачи, то можно заметить, что вектор-градиент, показывающий направление возрастания целевой функции, определяется ее параметром.

Пример 7.

Для целевой функции $F(x,\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ при различных значениях параметра λ градиент определяет различные направления роста функции (рис. 3).

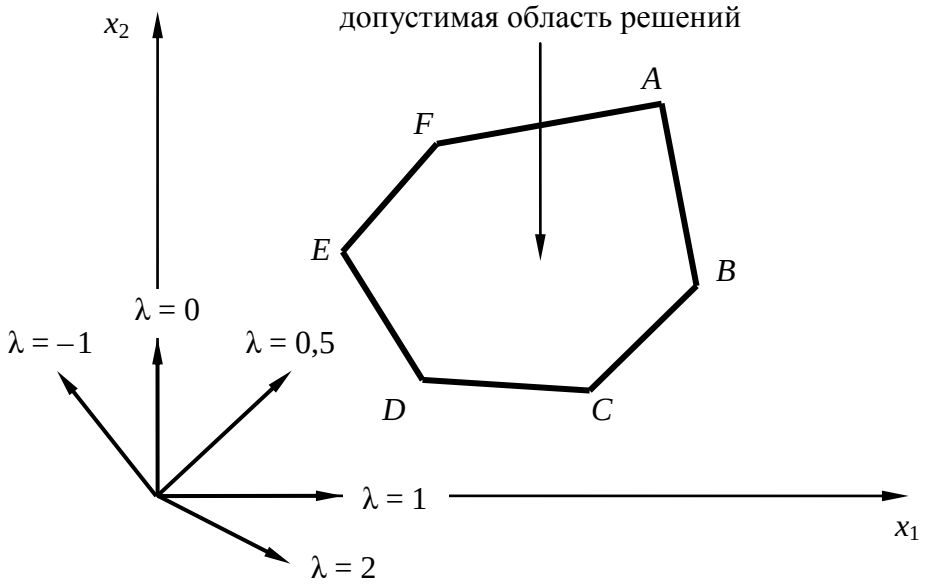

Рис. 3. Геометрическая интерпретация задачи параметрического линейного программирования

Видно, что, если при некотором значении параметра максимум достигается в вершине *A*, то небольшая вариация этого значения несколько изменит направление градиента, но не изменит положение точки максимума. Таким образом, некоторый план, оптимальный при $\lambda = \lambda^*$ оптимален и в окрестности λ^*, т.е. при $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$, где $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Так же можно заметить, что при градиенте, ставшем перпендикулярным некоторой стороне многоугольника решений, имеем два разных оптимальных опорных плана с одним и тем же значением линейной формы, откуда можно утверждать непрерывность экстремума линейной формы по λ.

В случае неограниченности множества планов можно утверждать, что если линейная форма не ограничена при $\lambda = \lambda^*$, то она не ограничена при всех λ, больших или меньших λ^*.

3.2. Линейное программирование с параметром в правых частях ограничений

В этом случае целевая функция определяется как

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \min(\max) \tag{15}$$

при условиях

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i+\lambda d_i,\ i=\overline{1,m},\\&x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n},\\&\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2.\end{aligned} \tag{16}$$

Алгоритм для решения задач параметрического линейного программирования в случае зависимости от параметра коэффициентов целевой функции незначительно отличается от обычного симплексного метода. В случае зависимости от параметра правых частей ограничений, для сохранения неотрицательности компонент плана при любых λ (сохранения неотрицательности правой части системы уравнений при всех ее тождественных преобразованиях), достаточно постановить двойственную задачу, воспользоваться алгоритмом решения задач параметрического линейного программирования при зависимости от параметра коэффициентов целевой функции и с помощью известных двойственных соотношений находить решение исходной задачи.

Пример 8.

Решить задачу параметрического линейного программирования для целевой функции

$$F(x,\lambda)=\lambda x_1-\lambda x_2-x_3+x_4\to\min$$

с системой ограничений

$$\begin{cases}3x_1-3x_2-x_3+x_4\ge 5,\\2x_1-2x_2+x_3-x_4\le 3,\\x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4},\\-\infty<\lambda<\infty.\end{cases}$$

Решение.

Приведем задачу к канонической форме

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 3. \end{cases}$$

И с использованием метода искусственного базиса составим М-задачу линейного программирования

$$F(x,\lambda) = \lambda x_1 - \lambda x_2 - x_3 + x_4 + \mathrm{M}y \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + y = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 3. \end{cases}$$

В результате преобразований целевая функция примет вид

$$F(x,\lambda) = (\lambda - 3\mathrm{M})x_1 + (3\mathrm{M} - \lambda)x_2 + (\mathrm{M} - 1)x_3 + (1 - \mathrm{M})x_4 + \mathrm{M}x_5 + 5\mathrm{M} \to \min$$

Начальный опорный план X = (0; 0; 0; 0; 0; 3; 5) для $F(x,\lambda) = 5\mathrm{M}$ (таблица 13).

Таблица 13

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
y	5	3	– 3	– 1	1	– 1	0	1
x_6	3	2	– 2	1	– 1	0	1	0
$F(x,\lambda)$	5М	3М – λ	λ – 3М	1 – М	М – 1	– М	0	0

Так как определяющую роль на этом шаге решения играет величина М, превышающая все величины задачи, то не обращаем внимания на λ и вводим в базис x_4 вместо y, а затем переходим к следующему опорному плану (таблица 14).

Таблица 14

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5	3	– 3	– 1	1	– 1	0
x_6	8	5	– 5	0	0	– 1	1
$F(x,\lambda)$	5	3 – λ	λ – 3	0	0	– 1	0

Полученный опорный план X = (0; 0; 0; 5; 0; 8) для $F(x,\lambda)=5$ будет оптимальным, если все значения Δ_j неположительны, т. е.

$$\begin{cases}\Delta_1 = 3-\lambda \le 0,\\ \Delta_2 = \lambda - 3 \le 0.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\lambda \ge 3,\\ \lambda \le 3.\end{cases}$$

Решаем систему двух линейных неравенств и обнаруживаем, что найденный план X оптимален при $\lambda = 3$.

Исследуем оставшиеся из заданного диапазона значения λ.

Пусть $\lambda > 3$. Тогда $\Delta_2 > 0$ и переменная x_2 подлежит вводу в базис, но в силу неположительности коэффициентов столбца приходим к выводу, что при $\lambda > 3$ линейная форма задачи не ограничена снизу.

Пусть $\lambda < 3$. Тогда $\Delta_1 > 0$ и в базис вводится переменная x_1 (таблица 15).

Таблица 15

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5	3	– 3	– 1	1	– 1	0
x_6	8	5	– 5	0	0	– 1	1
$F(x,\lambda)$	5	$3-\lambda$	$\lambda-3$	0	0	– 1	0

В результате преобразований получим следующую симплекс-таблицу 16.

Таблица 16

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0,2	0	0	– 1	1	– 0,4	– 0,6
x_1	1,6	1	– 1	0	0	– 0,2	0,2
$F(x,\lambda)$	$\frac{8\lambda+1}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{\lambda+2}{5}$	$\frac{\lambda-3}{5}$

Полученный опорный план является оптимальным, если все значения Δ_j неположительны, т. е.

$$\begin{cases}\Delta_5 = -\dfrac{(\lambda+2)}{5} \le 0,\\ \Delta_6 = \dfrac{\lambda-3}{5} \le 0.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\lambda \ge -2,\\ \lambda \le 3.\end{cases}$$

Решая эту систему линейных неравенств, обнаруживаем, что найденный опорный план X = (1,6; 0; 0; 0,2; 0; 0) для $F(x,\lambda)=\dfrac{8\lambda+1}{5}$ оптимален при $-2 \le \lambda \le 3$.

Пусть $\lambda < -2$. Тогда $\Delta_5 > 0$ и переменная x_5 подлежит вводу в базис, но в силу неположительности коэффициентов столбца приходим к выводу, что при $\lambda < -2$ линейная форма задачи не ограничена снизу.

Таким образом, получаем решение задачи

$$F_{\min}(x,\lambda)=\begin{cases} \to -\infty, \text{ при } \lambda < -2, \\ \dfrac{8\lambda+1}{5}, \text{ при } -2 \le \lambda \le 3, \ X_{opt}=(1{,}6;\,0;\,0;\,0{,}2;\,0;\,0), \\ 5, \ \lambda = 3, \ X_{opt}=(0;\,0;\,0;\,5;\,0;\,0), \\ \to -\infty, \text{ при } \lambda > 3. \end{cases}$$

Пример 9.

Решить задачу параметрического линейного программирования для целевой функции

$$F(x)=x_1-x_2-2x_3 \to \max$$

с системой ограничений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \le 3+\lambda, \\ 2x_1-x_2+x_3 \le 5-\lambda, \\ x_j \ge 0, \ j=\overline{1,3}, \\ -\infty < \lambda < \infty. \end{cases}$$

Решение.

Для решения задачи, достаточно решить двойственную к ней задачу, имеющую вид

$$Z(y)=(3+\lambda)y_1+(5-\lambda)y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ y_1 - y_2 \geq -1, \\ y_1 + y_2 \geq -2 \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,2}, \\ -\infty < \lambda < \infty. \end{cases}$$

Приводим двойственную задачу к канонической форме (умножив предварительно второе и третье неравенства на –1) и решаем симплекс-методом искусственного базиса.

$$Z(y,\lambda) = (3 + \lambda - \mathrm{M})y_1 + (5 - \lambda - 2\mathrm{M})y_2 + \mathrm{M}y_3 + \mathrm{M} \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 + \alpha = 1, \\ -y_1 + y_2 + y_4 = 1, \\ -y_1 - y_2 + y_5 = 2 \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}, \end{cases}$$

Таблица 17

базисные переменные	свободные члены (b_i)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	α
α	1	1	2	– 1	0	0	1
y_4	1	– 1	1	0	1	0	0
y_5	1	– 1	– 1	0	0	1	0
$Z(y,\lambda)$	M	M – 3 – λ	2M – 5 + λ	– M	0	0	0

В результате преобразований получим следующую симплекс-таблицу 18.

Таблица 18

базисные переменные	свободные члены (b_i)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	α
y_1	1	1	2	– 1	0	0	1
y_4	2	0	3	– 1	1	0	1
y_5	3	0	1	– 1	0	1	1
$Z(y,\lambda)$	3 + λ	0	1 + 3λ	– (3 + λ)	0	0	– M + 3 + λ

Найденный план Y_{opt} = (1; 0; 0; 2; 3) оптимален, если

$$\begin{cases} \Delta_2 = 1 + 3\lambda \le 0, \\ \Delta_3 = -(3+\lambda) \le 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad -3 \le \lambda \le -0{,}3$$

В индексной строке $Z(y,\lambda)$ в позициях 6, 4, и 5 (в соответствии с начальным базисом) находим решение прямой задачи: $X_{opt} = (3 + \lambda; 0; 0)$, $F(X_{opt}) = 3 + \lambda$.

Пусть $\lambda < -3$. Тогда $\Delta_3 > 0$ и переменная y_3 подлежит вводу в базис, но в силу неположительности коэффициентов столбца приходим к выводу, что при $\lambda < -3$ линейная форма решаемой (двойственной) задачи не ограничена снизу и, следовательно, ограничения исходной задачи противоречивы.

В случае $\lambda > -0{,}3$ получим следующие вычисления (таблица 19).

Таблица 19

базисные переменные	свободные члены (b_i)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	α
y_1	1	1	2	– 1	0	0	1
y_4	2	0	3	– 1	1	0	1
y_5	3	0	1	– 1	0	1	1
$Z(y,\lambda)$	$3 + \lambda$	0	$1 + 3\lambda$	$-(3 + \lambda)$	0	0	$-M + 3 + \lambda$

В результате преобразований получим следующую симплекс-таблицу (таблица 20).

Таблица 20

базисные переменные	свободные члены (b_i)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	α
y_2	0,5	0,5	1	– 0,5	0	0	0,5
y_4	0,5	– 1,5	0	0,5	1	0	– 0,5
y_5	2,5	– 0,5	0	– 0,5	0	1	0,5
$Z(y,\lambda)$	$\frac{5-\lambda}{2}$	$-\frac{1+3\lambda}{2}$	0	$-\frac{5-\lambda}{2}$	0	0	$-M + 2{,}5 - 0{,}5\lambda$

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} \Delta_1 = -\dfrac{1+3\lambda}{2} \le 0, \\ \Delta_3 = -\dfrac{(5-\lambda)}{2} \le 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad -0{,}3 \le \lambda \le 5.$$

При найденном диапазоне $-0{,}3 \le \lambda \le 5$ – Y_{opt} = (0; 0,5; 0; 0,5; 2,5), а решение прямой задачи $X_{opt} = (\frac{(5-\lambda)}{2}; 0; 0)$, $F(X_{opt}) = \frac{(5-\lambda)}{2}$.

Продолжаем решение задачи при $\lambda > 5$ (таблица 21).

Таблица 21

базисные переменные	свободные члены (b_i)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	α
y_2	1	– 1	1	0	1	0	0
y_3	1	– 3	0	1	2	0	– 1
y_5	3	– 2	0	0	1	1	0
$Z(y,\lambda)$	$5-\lambda$	– 8	0	0	$5-\lambda$	0	– M

При $\lambda \ge 5$ решением двойственной задачи будет Y_{opt} = (0; 1; 1; 0; 3), а решением прямой задачи $X_{opt} = (0; (\lambda - 5); 0)$, $F(X_{opt}) = 5 - \lambda$.

Результаты решения задачи сведем в таблицу 22.

Таблица 22

Диапазон λ	Двойственная задача	Исходная задача
$\lambda < -3$	$Z(y,\lambda) \to -\infty$	ограничения противоречивы
$-3 \le \lambda \le -0{,}3$	Y_{opt} = (1; 0)	$X_{opt} = (3+\lambda; 0; 0)$, $F(X_{opt}) = 3+\lambda$
$-0{,}3 \le \lambda \le 5$	Y_{opt} = (0; 0,5)	$X_{opt} = (\frac{(5-\lambda)}{2}; 0; 0)$, $F(X_{opt}) = \frac{(5-\lambda)}{2}$
$\lambda \ge 5$	Y_{opt} = (0; 1)	$X_{opt} = (0; (\lambda-5); 0)$, $F(X_{opt}) = 5-\lambda$

4. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Среди практически важных задач отыскания условного экстремума линейной функции особое место занимают задачи с требованием целочисленности всех (части) переменных. Задачи математического программирования, в которых наряду с обычными ограничениями накладывается требование целочисленности всех или некоторых компонент решения, изучает раздел математического программирования, который называется *целочисленным программированием*.

Задача называется *полностью целочисленной*, если условие целочисленности наложено на все переменные. Когда данное условие относится лишь к некоторым переменным, задача называется *частично-целочисленной*. Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, – линейные, то задача называется *линейной целочисленной*.

Математическая модель задачи целочисленного математического программирования:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n},$$

$$x_j - \text{целые}, \ j = \overline{1, n_1}, \ n_1 \le n.$$

Если $n_1 = n$, то задача является полностью целочисленной, если $n_1 < n$ – частично целочисленной задачей линейного программирования.

4.1. Графический метод решения целочисленных задач линейного программирования

Пример 10.

Найти максимум целевой функции

$$F(x) = x_1 + x_2 \to \max$$

в области

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, 2}, \\ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

Решение.

Решим задачу геометрически (рис. 4). Область поиска экстремума – многоугольник *OABCD*. Так как линия уровня целевой функции параллельна стороне *BC* многоугольника, экстремум достигается в вершинах $B(13/3;\ 8/3)$ и $C(40/9;\ 23/9)$, а также в любой точке отрезка *BC* и равен 7. Нас интересуют лишь точки с целочисленными координатами, поэтому ни *B*, ни *C* не являются допустимым решением задачи. Округлив значение координат точек *B* и *C*, получим точку (4; 3), не принадлежащую области поиска. Легко показать, что целочисленный оптимум достигается в точках *M*(2; 3) и *N*(3; 2) и равен 5. Обе точки находятся внутри области поиска.

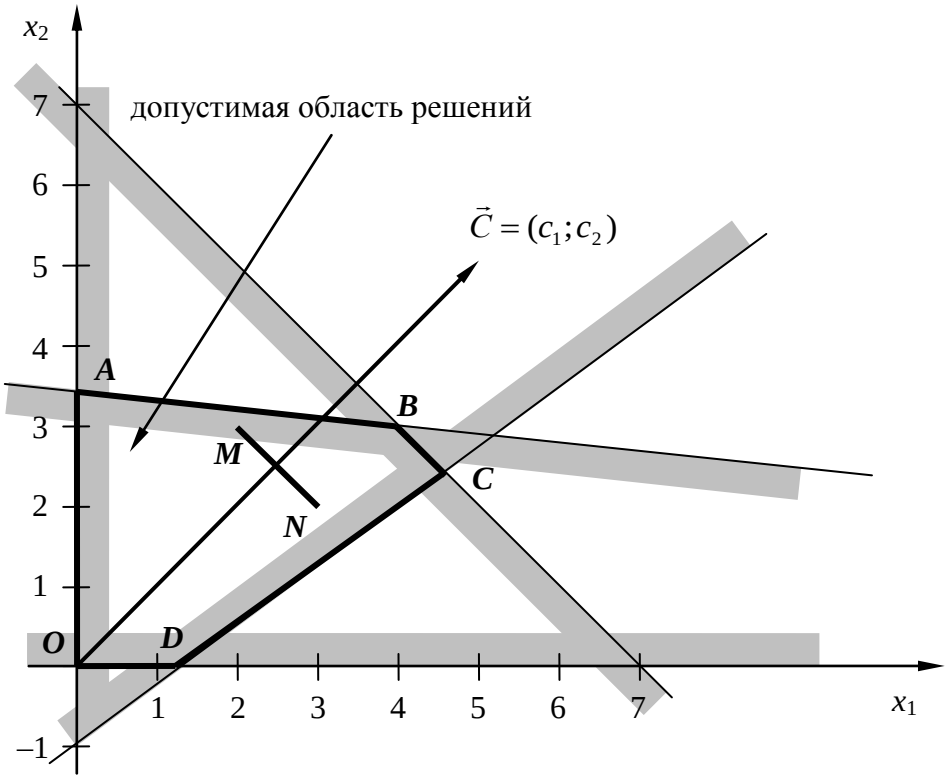

Рис. 4. Графическое решение задачи целочисленного линейного программирования

Из приведенного примера видно, что для решения задач целочисленного программирования необходимо рассмотреть особые методы оптимизации. Кроме того, оптимальное решение задач целочисленного программирования не обязательно принадлежит границе многоугольника решений, что характерно для задач линейного программирования.

4.2. Решение целочисленных задач методом ветвей и границ

Метод ветвей и границ, используемый при решении задач целочисленных программирования позволяет отбрасывать достаточно большие подмножества заведомо неоптимальных элементов множества допустимых решений. Рассмотрим применение метода ветвей и границ к решению задачи целочисленного линейного программирования.

Метод ветвей и границ относится к комбинаторным методам решения целочисленных задач и применим как к полностью, так и к частично целочисленным задачам.

Суть метода ветвей и границ – в направленном частичном переборе допустимых решений. Вначале задача линейного программирования решается без ограничений на целочисленность. При этом находится верхняя граница $F(x)$, так как целочисленное решение не может улучшить значение целевой функции.

Далее в методе ветвей и границ область допустимых значений переменных разбивается на ряд непересекающихся областей (ветвление), в каждой из которых оценивается экстремальное значение функции. Если целое решение не найдено, ветвление продолжается.

Ветвление производится последовательным введением дополнительных ограничений. Пусть x_k – целочисленная переменная, значение которой в оптимальном решении получилось дробным. Интервал $[\beta_k] \leq x_k \leq [\beta_k] + 1$ не содержит целочисленных компонентов решения. Поэтому допустимое целое значение x_k должно удовлетворять одному из неравенств $x_k \geq [\beta_k] + 1$ или $x_k \leq [\beta_k]$. Это и есть дополнительные ограничения. Введение их в методе ветвей и границ на каждом шаге порождает две не связанные между собой подзадачи. Каждая подзадача решается как задача линейного программирования с исходной целевой функцией. После конечного числа шагов будет найдено целочисленное оптимальное решение.

Применение метода ветвей и границ рассмотрим на конкретном примере.

Пример 11.

Методом ветвей и границ найти максимальное значение функции.

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

в области

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 22, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, 2}, \\ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

Решение.

1-й шаг метода ветвей и границ. Решается задача линейного программирования с отброшенными условиями целочисленности с помощью симплекс-метода (таблицы 23 - 25).

Таблица 23

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	24	3	4	1	
x_4	22	2	5	0	1
индексная строка $F(x)$	0	– 2	– 3	0	0

Таблица 24

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	32/5	7/5	0	1	– 4/5
x_2	22/5	2/5	1	0	1/5
индексная строка $F(x)$	66/5	– 4/5	0	0	3/5

Таблица 25

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	32/7	1	0	5/7	– 4/7
x_2	18/7	0	1	– 2/7	3/7
индексная строка $F(x)$	118/7	0	0	4/7	1/7

По данным таблицы 25 запишем оптимальное нецелое решение

$$x_1^* = 4\frac{4}{7}; \ x_2^* = 2\frac{4}{7}; \ F_{\max} = 16\frac{6}{7}$$

Графическая интерпретация задачи приведена на рисунке 5. Здесь область допустимых решений представлена четырехугольником *OABC*, а координаты вершины *B* совпадают с x_1^* и x_2^*. Обе переменные в оптимальном решении являются нецелыми, поэтому любая из них может быть выбрана в качестве переменной, инициирующей процесс ветвления.

Пусть это будет x_2 . Выбор x_2 порождает две подзадачи (2 и 3), одна из них получается путем добавления ограничения $x_2 \geq 3$ к исходной задаче, а другая – путем добавления ограничения $x_2 \leq 2$. При этом область допустимых решений разбивается на две заштрихованные области, а полоса значений $2 < x_2 < 3$ исключается из рассмотрения. Однако множество допустимых целочисленных решений сохраняется, порожденные подзадачи содержат все целочисленные решения исходной задачи.

2-й шаг метода ветвей и границ. Осуществляется выбор одной из обозначенных ранее подзадач. Не существует точных методов определения, какой из подзадач отдать предпочтение. Случайный выбор приводит к разным последовательностям подзадач и, следовательно, к различным количествам итераций, обеспечивающих получение оптимального решения.

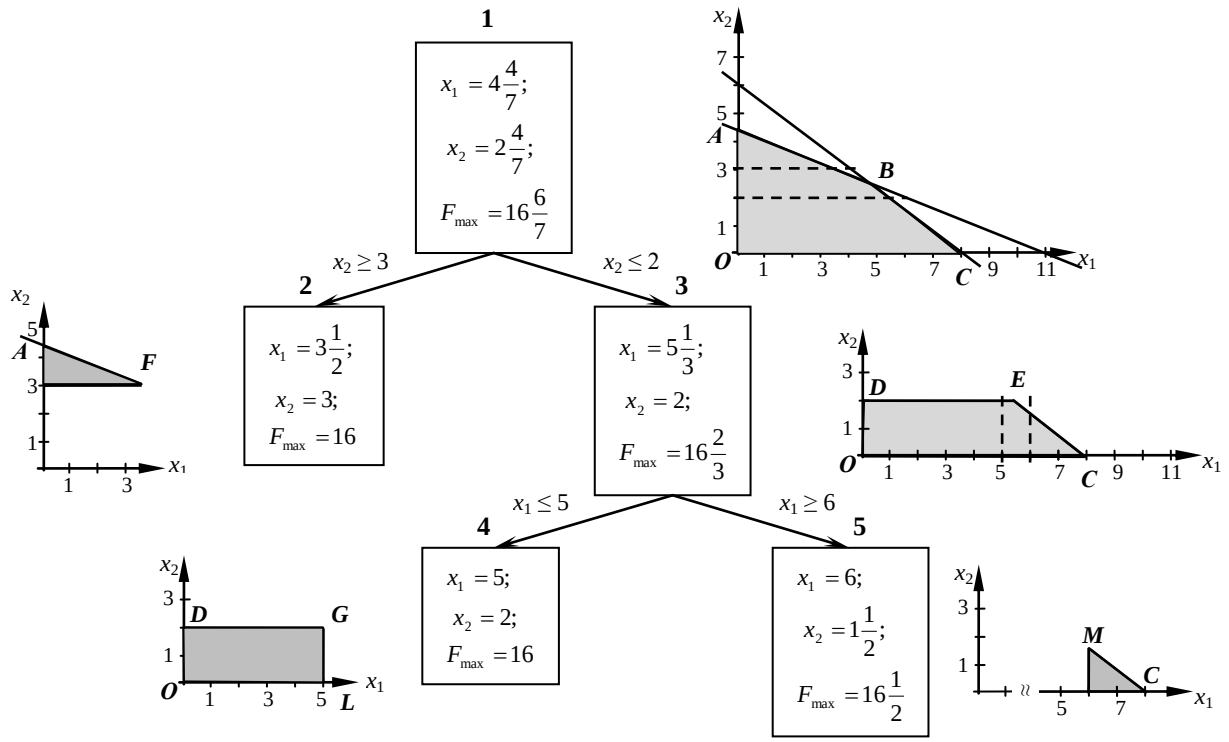

Рис. 5. Графическая интерпретация решения примера методом ветвей и границ

Пусть вначале решается подзадача 3 с дополнительным ограничением $x_2 \le 2$ или $x_2 + x_5 = 2$. Из таблицы 25 для переменной x_2 справедливо следующее выражение ($-2/7\, x_3 + 3/7\, x_4 + x_2 = 18/7$) или ($x_2 = 18/7 + 2/7\, x_3 - 3/7\, x_4$), тогда ($2/7\, x_3 - 3/7\, x_4 + x_5 = -4/7$). Включаем ограничение в таблице 25, при этом получим новую таблицу 26.

Таблица 26

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	32/7	1	0	5/7	– 4/7	0
x_2	18/7	0	1	– 2/7	3/7	0
x_5	– 4/7	0	0	2/7	– 3/7	1
индексная строка $F(x)$	118/7	0	0	4/7	1/7	0

Осуществляя оптимизацию решения, переходим к таблице 27, которой соответствует решение

$$x_1^* = 5\frac{1}{3};\ x_2^* = 2;\ F_{\max} = 16\frac{2}{3}$$

Переменная x_1 нецелая, поэтому ветвление необходимо продолжить; при этом возникают подзадачи 4 и 5 с ограничениями $x_1 \le 5$ и $x_1 \ge 6$ соответственно. Полоса значений $5 < x_1 < 6$ исключается из рассмотрения.

Таблица 27

базисные переменные	свободные члены (b_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	16/3	1	0	1/3	0	– 4/3
x_2	2	0	1	0	0	1
x_4	4/3	0	0	– 2/3	1	– 7/3
индексная строка $F(x)$	50/3	0	0	2/3	0	1/3

3-й шаг метода ветвей и границ. Решаются подзадачи 4 и 5. Из рисунка 5 видно, что оптимальное целочисленное решение подзадачи 4 достигается в вершине G с координатами $x_1^* = 5;\ x_2^* = 2$, однако это не означает, что найден оптимум исходной задачи. Причиной такого вывода являются еще не решенные подзадачи 3 и 5, которые также могут дать целочисленные решения. Найденное целочисленное решение F =

16 определяет нижнюю границу значений целевой функции, т.е. меньше этого значения оно быть не должно.

Подзадача 5 предполагает введение дополнительного ограничения $x_1 \geq 6$ в подзадачу 3. Графическое решение на рисунке 5 определяет вершину M с координатами $x_1^* = 6;\ x_2^* = 3/2$, в которой достигается оптимальное решение подзадачи 5: $F_{\max} = 16{,}5$. Дальнейшее ветвление в этом направлении осуществлять нецелесообразно, так как большего, чем 16, целого значения целевой функции получить невозможно. Ветвление подзадачи 5 в лучшем случае приведет к другому целочисленному решению, в котором $F = 16$.

4-й шаг метода ветвей и границ. Исследуется подзадача 2 с ограничением $x_2 \geq 3$, находится ее оптимальное решение, которое соответствует вершине F (рисунок 5) с координатами $x_1^* = 7/2;\ x_2^* = 3$. Значение целевой функции при этом $F_{\max} = 16$, которое не превышает найденного ранее решения. Таким образом, поиск вдоль ветви $x_2 \geq 3$ следует прекратить.

Решением задачи будут значения $x_1^* = 5;\ x_2^* = 2$ при этом $F_{\max} = 16$.

Отметим, что алгоритм метода ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач, он положен в основу большинства прикладных программ для компьютеров, используемых для этих целей.

5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование – один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Например, выпуск продукции предприятием, обеспечение предприятия сырьем, замена оборудования, финансирование и т. д. – управляемые процессы. Необходимо организовать процесс управления так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного Р. Беллманом.

Принцип оптимальности формулируется следующим образом, каково бы ни было состояние системы в результате какого-то числа шагов, необходимо выбирать управление на ближайшем шаге так, чтобы оно, в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах, приводило к максимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

Принцип вложения утверждает, что природа задачи, допускающей использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов, т. е. форма такой задачи инвариантна относительно N.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями – номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на

каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Задачи динамического программирования имеют ряд особенностей:

1. В них рассматривается процесс поведения системы во времени.
2. Состояние системы в каждый момент времени однозначно определяется численными значениями небольшого набора параметров.
3. Операция выбора решения состоит в преобразовании этого набора параметров такой же набор с другими числовыми значениями.
4. Если система в рассматриваемый момент времени находится в некотором состоянии, то ее поведение в дальнейшем определяется этим состоянием и выбираемым управлением, но не зависит от предыстории (т.е. от того, в каких состояниях находилась система до этого момента).

Пусть имеется система *S*, состояние которой характеризуется вектором $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Численное значение набора параметров в момент времени *i* обозначим через $\vec{X}_i$. Пусть в момент *i* на систему *S* воздействует управляющий фактор U^i, в результате которого в следующий момент
i + 1 она переходит в новое состояние. Символически такой переход можно представить в виде

$$S(\vec{x}_i)^{U^i} \to S(\vec{x}_{i+1}) \tag{17}$$

5.1. Оптимальная стратегия замены оборудования методом динамического программирования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые. Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: $r(t)$ – стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста *t* лет; $u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста *t* лет; $c(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста *t* лет; *P* – покупная цена оборудования. Рассмотрим период *N* лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования. Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста *t* лет за

оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N = N$ – к началу процесса (рис. 6).

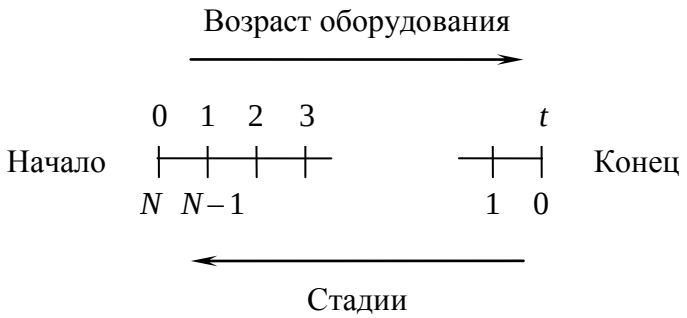

Рис. 6. Графическая интерпретация временных стадий процесса использования оборудования

На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид

1) для описания N-стадийный процесса:

$$f_N(t) = \max\begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) & \to \text{Сохранение}, \\ c(t) - P + r(0) - u(0) + f_{N-1}(1) & \to \text{Замена}, \end{cases} \tag{18}$$

2) для описания одностадийный процесса:

$$f_1(t) = \max\begin{cases} r(t) - u(t) & \to \text{Сохранение}, \\ c(t) - P + r(0) - u(0) & \to \text{Замена}. \end{cases} \tag{19}$$

Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя – доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В первом уравнении для описания N-стадийного процесса функция $(r(t) - u(t))$ есть разность между стоимостью произведенной продук-

ции и эксплуатационными издержками на N-й стадии процесса. Функция $f_{N-1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от (N – 1) оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет (t + 1) лет. Функция ($s(t)$ – P) представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет. Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию. Последняя функция $f_{N-1}(1)$ представляет собой доход от оставшихся (N – 1) стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного 55роцессса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как N принимает значение 1, 2,…, N. Равенство $f_0(t)=0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Данные уравнения являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t+1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до (t + 1) лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до (N – 1).

Расчет начинают с использования уравнения, описывающего N-стадийный процесс. Представленные уравнения позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем, чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример 12.

Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: P = 10, $c(t)$ = 0, $f(t)$ = $r(t)$ – $u(t)$, представленных в таблице 28.

Таблица 28

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Решение.

Используя функциональные уравнения для описания процесса использования оборудования, запишем:

$$f_N(t) = \max\begin{cases} f(t) + f_{N-1}(t+1), \\ -P + f(0) + f_{N-1}(1), \end{cases}$$

$$f_1(t) = \max\begin{cases} f(t), \\ -P + f(0). \end{cases}$$

Для $N = 1$

$$f_1(0) = \max\begin{cases} f(0) \\ -P + f(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10,$$

$$f_1(1) = \max\begin{cases} f(1) \\ -P + f(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9,$$

……..

$$f_1(12) = \max\begin{cases} f(12) \\ -P + f(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0.$$

Для $N = 2$

$$f_2(0) = \max\begin{cases} f(0) + f_1(1) \\ -P + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19,$$

$$f_2(1) = \max\begin{cases} f(1) + f_1(2) \\ -P + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 9 + 8 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17,$$

……..

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_{N-1}(1) > f_N(t)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем (таблица 29).

Таблица 29

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9^*						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17^*							

$f_4(t)$	34	30	26	24	24^*								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30^*							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35*						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41*							

Окончание табл. 29

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_8(t)$	58	54	51	48	48^*								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54^*							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60^*							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65^*						
$f_{12}(t)$	82	78	75	73	73^*								

Можно не решать каждый раз функциональное уравнение $f_N(t)$, а вычисления проводить в таблице. Например, для $f_4(t)$:

$$f_4(0) = f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(1) = f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 > f_3(1),$$
$$f_4(2) = f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 > f_3(1),$$
$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 > f_3(1),$$
$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 < f_3(1).$$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$.

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования. Для данной задачи он составляет 4 года. Т.е. для получения максимальной прибыли от использования оборудования в двенадцатиэтапном процессе оптимальный цикл состоит в замене оборудования через каждые 4 года.

5.2. Оптимальное распределение ресурсов методом динамического программирования

Пусть имеется некоторое количество ресурсов *x*, которое необходимо распределить между *n* различными предприятиями, объектами,

работами и т. д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения: x_i – количество ресурсов, выделенных i-му предприятию ($i=\overline{1,n}$); $g_i(x_i)$ – функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса x_i, полученного i-м предприятием; $f_k(x)$ – наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов x от первых k различных предприятий.

Сформулированную задачу можно записать в математической форме:

$$f_n(x)=\max\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i). \tag{20}$$

При ограничениях:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} x_i = x,\\ &x_i \ge 0,\ i=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{21}$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$.

Обозначим через x_k количество ресурса, используемого k-м способом ($0 \le x_k \le x$), тогда для (k – 1) способов остается величина ресурсов, равная ($x-x_k$). Наибольший доход, который получается при использовании ресурса ($x-x_k$) от первых (k – 1) способов, составит $f_{k-1}(x-x_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от k-го и первых (k – 1) способов необходимо выбрать x_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned}&f_1(x)=g_1(x_1),\\ &f_k(x)=\max\{g_k(x_k)+f_{k-1}(x-x_k)\},\ k=\overline{2,n}.\end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим конкретную задачу по распределению капиталовложений между предприятиями.

Пример 13.

Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для расширения производства совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн. руб. с дискретностью 20 млн. руб. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в таблице 30.

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

Таблица 30

Выделяемые средства, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Решение.

Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, на которых предполагается осуществить инвестиции.

Рекуррентные соотношения будут иметь вид:

1) для предприятия № 1 – $f_1(x) = g_1(x_1)$,

2) для всех остальных предприятий – $f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}$, $k = \overline{2, n}$.

Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям в четыре этапа.

1-й этап. Инвестиции производим только первому предприятию. Тогда

$$f_1(20) = 8, \quad f_1(40) = 16, \quad f_1(60) = 25,$$
$$f_1(80) = 36, \quad f_1(100) = 44, \quad f_1(120) = 62.$$

2-й этап. Инвестиции выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для 2-го этапа имеет вид

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

Тогда

– при $x = 20 \to f_2(20) = \max\{8+0; 0+10\} = \max\{8; 10\} = 10,$

– при $x = 40 \to f_2(40) = \max\{16; 8+10; 20\} = \max\{16; 18; 20\} = 20,$

– при
$x = 60 \to f_2(60) = \max\{25; 16+10; 8+20; 28\} = \max\{25; 26; 28; 28\} = 28,$

– при
$x = 80 \to f_2(80) = \max\{36; 25+10; 16+20; 8+28; 40\} = \max\{36; 35;$
$36; 36; 40\} = 40,$

– при
$x = 100 \to f_2(100) = \max\{44; 36+10; 25+20; 16+28; 8+40; 48\} =$
$= \max\{44; 46; 45; 44; 48; 48\} = 48,$

– при $x = 120 \to f_2(120) = \max\{62; 44+10; 36+20; 25+28; 16+40;$
$8+48; 62\} = \max\{62; 54; 56; 53; 56; 56; 62\} = 62.$

3-й этап. Финансируем 2-й этап и третье предприятие. Расчеты проводим по формуле

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}.$$

Тогда

– при $x = 20 \to f_3(20) = \max\{10; 12\} = 12,$

– при $x = 40 \to f_3(40) = \max\{20; 10+12; 21\} = \max\{20; 22; 21\} = 22,$

– при
$x = 60 \to f_3(60) = \max\{28; 20+12; 10+21; 27\} = \max\{28; 32; 31; 27\} = 32,$

– при
$x = 80 \to f_3(80) = \max\{40; 28+12; 20+21; 10+27; 38\} = \max\{40;$
$40; 41; 37; 38\} = 41,$

– при
$x = 100 \to f_3(100) = \max\{48; 40+12; 28+21; 20+27; 10+38; 50\} =$
$= \max\{48; 52; 49; 47; 48; 50\} = 52,$

– при
$x = 120 \to f_3(120) = \max\{62; 48+12; 40+21; 28+27; 20+28; 10+$
$+50; 63\} = \max\{62; 60; 61; 55; 58; 60; 63\} = 63.$

4-й этап. Инвестиции в объеме 120 млн. руб. распределяем между 3-м этапом и четвертым предприятием.

– при

$$x = 120 \to f_4(120) = \max\{63; 52 + 11; 41 + 23; 32 + 30; 22 + 37; 12 + \\ + 51; 63\} = \max\{63; 63; 64; 62; 59; 63; 63\} = 64.$$

Получены условия управления от 1-го до 4-го этапа. Вернемся от 4-го к 1-му этапу. Максимальный прирост выпуска продукции в 64 млн. руб. получен на 4-м этапе как (41 + 23), т.е. 23 млн. руб. соответствуют выделению 40 млн. руб. четвертому предприятию (смотри таблицу 29). Согласно 3-му этапу 41 млн. руб. получен как (20 + 21), т. е. 21 млн. руб. соответствует выделению 40 млн. руб. третьему предприятию. Согласно 2-этапу 20 млн. руб. получено при выделении 40 млн. руб. второму предприятию.

Таким образом, инвестиции в объеме 120 млн. руб. целесообразно выделить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн. руб. каждому, при этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн. руб.

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

6.1. Постановка транспортной задачи

Транспортная задача – это задача определения оптимального плана перевозок груза из данных пунктов отправления в заданные пункты потребления.

Выделяют два типа транспортных задач:

1) по критерию стоимости (достижение минимума затрат на перевозку) или расстоянию;

2) критерию времени (затрачивается минимум времени на перевозку).

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных специальных задач линейного программирования.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:

– распределению подлежат однородные ресурсы;

– условия задачи описываются только уравнениями;

– все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения;

– во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;

– каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены известным симплекс-методом. Однако, обычная транспортная задача имеет большое число переменных и решение ее симплекс-методом громозко. С другой стороны матрица системы ограничений транспортной задачи весьма своеобразна, поэтому для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить последовательность опорных решений, которая завершается оптимальным решением.

Условие транспортной задачи: однородный груз сосредоточен у m поставщиков (пунктах отправления) в объемах $a_1, a_2, ..., a_m$, данный груз необходимо доставить n потребителям (пункты назначения) в объемах $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны c_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ – стоимости перевозки единиц груза (матрица тарифов) от каждого i-го поставщика (i-го пункта отправления) каждому j-му потребителю (j-му пункту потребления).

При этом в качестве критерия оптимальности выбирают либо минимальную стоимость перевозок всего груза (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию), либо минимальное время его доставки (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

Требуется спланировать перевозки так, чтобы максимально удовлетворить потребности и чтобы суммарные затраты (время) на перевозки всего груза были минимальные.

Исходные данные транспортной задачи заносятся в специальную таблицу, которая называется распределительной или транспортной (таблица 31).

Таблица 31

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам отправления, причем в последней клетке каждой строки указан объем запаса груза в i-м пункте $a_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Столбцы транспортной таблицы соответствуют пунктам назначения, причем последняя клетка каждого столбца содержит значение потребности j-го пункта потребления $b_j \geq 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в нижней строке и правом столбце) содержат информацию о перевозке из i-го пункта в j-й: в правом верхнем углу находится цена перевозки единицы продукта c_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, а в центре – количество перевозимого груза для данных пунктов x_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Предполагается, что все $x_{ij} \geq 0$.

Планом транспортной задачи называется *матрица перевозок* $X = \left\{x_{ij}\right\}_{m \times n}$. Если в плане перевозок переменная x_{ij} принимает положительное значение ($x_{ij} > 0$), то это будет записано в соответствующей клетке $(i,\ j)$ и она считается *загруженной* (*занятой*) или *базисной*; если же $x_{ij} = 0$, то клетку $(i,\ j)$ называют *свободной*.

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребности в грузе в пунктах назначения.

Транспортная задача называется закрытой (с правильным балансом), если выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (23)$$

Если это равенство не выполняется, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \qquad (24)$$

то задача называется открытой (с неправильным балансом).

Если в исходных условиях дана открытая задача, то ее необходимо привести к закрытой форме, для чего следует произвести следующее:

а) *случай дефицита* (суммарное потребление строго больше суммарных запасов $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$). В этом случае вводят фиктивный фиктивного поставщика A'_{m+1} с запасами груза $a'_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ с нулевыми тарифами перевозок во все пункты отправления (вводим фиктивную базу, из которой вывоз осуществляется по нулевым тарифам)

б) *случай избытка продукта* (суммарные запасы строго больше суммарного потребления $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$). В этом случае вводят фиктивный пункт потребления с объемом потребностей груза $b'_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, перевозки в который из всех пунктов отправления осуществляется с нулевыми тарифами.

6.2. Математическая модель транспортной задачи

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю.

Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Так как произведение $(c_{ij} \cdot x_{ij})$ определяет затраты на перевозку груза от *i*-го поставщика *j*-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений.

Первая группа из *m* уравнений описывает, что запасы всех *m* поставщиков вывозятся полностью и имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}$$

Вторая группа из *n* уравнений выражает требование удовлетворить запросы всех *n* потребителей полностью и имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}$$

Запишем математическую модель задачи:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min, \tag{25}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{26}$$

Математическая формулировка транспортной задачи такова: найти переменные задачи x_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, удовлетворяющие системе ограничений, условиям неотрицательности $x_{ij} \geq 0$ и обеспечивающие минимум целевой функции $F(x)$.

Особенности транспортных задач:

– все коэффициенты при неизвестных в уравнениях равны 1, что позволяет решать задачу простыми способами;

– любая переменная x_{ij} встречается только в двух уравнениях;

– уравнения не являются линейно независимыми в силу условия (23) (если задача сбалансирована);

– число линейно-независимых уравнений – (m + n – 1), переменных $m \cdot n$, число базисных переменных – (m + n – 1), $k = m \cdot n$ – (m + n – 1) = (m – 1)(n – 1) – число свободных переменных;

– если все a_i и b_j – целые, тогда значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые.

Так как в задачах линейного программирования оптимальные решения достигаются в одной из вершин области допустимых решений, где свободные переменные равны нулю, то в транспортных задачах (m – 1)(n – 1) перевозок должны быть равны нулю.

Любой план перевозок – *допустимый*, если он удовлетворят условию (26). *План опорный* – если в допустимом плане отличны от нуля не более (m + n – 1) переменных. Если число ненулевых x_{ij} в опорном плане равно (m + n – 1), то план называется *невырожденный*, иначе – *вырожденный*. План оптимальный, если он среди всех допустимых планов приводит к минимальной стоимости.

Теорема 1. Для любой транспортной задачи существует план (то есть для любой транспортной задачи допустимая область не пуста).

Действительно, по смыслу задачи, $a_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ b_j > 0,\ j = \overline{1,n}$. Так как

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A,$$

то возьмем план в виде

$$x_{ij} = a_i \cdot b_j / A,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Величины $x_{ij} \geq 0$. Далее

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j,$$

то есть ограничения выполняются. Поэтому x_{ij} составляют план.

Теорема 2. Транспортная задача всегда имеет оптимальный план.

Действительно, допустимая область не пуста. Далее, так как по смыслу $c_{ij} \geq 0$, то для любого плана перевозок

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0 .$$

В силу того, что значения целевой функции ограничены снизу, транспортная задача всегда имеет решение.

Теорема 3. Любой опорный план имеет не более (m + n – 1) положительных компонент.

Действительно, исходная система содержит всего (m + n) ограничений типа равенств:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}, \text{ то есть } m \text{ ограничений;}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}, \text{ то есть } n \text{ ограничений.}$$

Однако в силу соотношения

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$$

одно из этих ограничений является следствием всех остальных. Действительно, сложим все первые m ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = A, \tag{27}$$

а из второй группы сложим первые (n + 1) ограничение

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} b_j , \tag{28}$$

Вычитая теперь (28) из (27), получим:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = A - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_n,$$

и получим последнее, n-ое ограничение второй группы. Таким образом, независимых ограничений всего не более ($m + n - 1$). Поэтому каждый опорный план имеет не более ($m + n - 1$) компонент.

Следствие. Оптимальный план содержит не более, чем ($m + n - 1$) перевозку.

Пример 14.

Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 32.

Таблица 32

b_j / a_i	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

Решение.

Вводим переменные задачи – матрицу перевозок.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$$

Записываем матрицу стоимостей (тарифов перевозок).

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Целевая функция задачи равняется сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X. Данная функция, определяющая суммарные затраты на перевозки, должна достигать минимального значения.

$$F(x) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} \to \min$$

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы перевозок X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке – запасам

второго поставщика. Это означает, что запасы поставщика вывозятся полностью.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50. \end{cases}$$

Сумма всех перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы перевозок *X*, должны быть равны запросам соответствующих потребителей. Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40. \end{cases}$$

Также необходимо учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными.

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи записывается следующим образом – найти переменные задачи, обеспечивающие минимум целевой функции (29) и удовлетворяющие системе ограничений (30) и условиям неотрицательности (31).

$$F(x) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} \to \min \tag{29}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40. \end{cases} \tag{30}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}. \tag{31}$$

6.3. Методы определения первоначального опорного плана

Алгоритм решения транспортной задачи состоит из двух этапов:

1) составление первоначального (опорного) плана перевозок;

2) последовательное улучшение плана перевозок до тех пор, пока он
не станет оптимальным.

Опорный план не обязательно должен быть оптимальным. Это просто своеобразный «черновик», «набросок», улучшая который постепенно переходят к плану оптимальному.

Существует несколько методов поиска опорного плана. Наиболее распространены метод северо-западного угла и метод минимального элемента (наименьшей стоимости).

Метод северо-западного угла является наиболее простым. При этом загрузка клеток таблицы (распределение объемов пунктов отправления по пунктам назначения) начинается с верхней левой клетки («северо-западная» часть таблицы) и продолжается по столбцу вниз и вправо по строке (по диагонали).

В клетку, находящуюся на пересечении первой строки и первого столбца, помещается максимально возможное число единиц продукции $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$. Возможны два варианта:

1) $\min\{a_1; b_1\} = a_1$, то есть $a_1 < b_1$. Тогда, запланировав перевозку от первого поставщика в первый пункт потребления в объеме a_1, запасы поставщика вывозятся полностью. Поэтому все остальные перевозки от первого поставщика могут быть только нулевые, первую строку далее вычеркиваем, переходим ко второй, двигаясь по столбцу вниз. Ну, а потребность в первом пункте потребления останется в объеме $b_1 - a_1$. В клетку x_{21} помещают максимально возможное число единиц продукции, т.е. $x_{21} = \min\{a_2; b_1 - a_1\}$.

2) $\min\{a_1; b_1\} = b_1$, то есть $b_1 < a_1$. Тогда, запланировав перевозку от первого поставщика в первый пункт потребления в объеме b_1, запросы потребителя полностью удовлетворяются. Перевозить потребителю больше будет ничего не надо, поэтому остальные перевозки будут равны нулю, первый столбец далее вычеркиваем, переходим ко второму, двигаясь по строке вправо. Ну, а у первого поставщика еще останется $a_1 - b_1$ запасов продукта. В клетку x_{12} помещают максимально возможное число единиц продукции, т.е. $x_{12} = \min\{a_1 - b_1; b_2\}$.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны запасы всех поставщиков и не удовлетворены запросы всех потребителей. Последней будет заполнена клетка (m; n).

У нас всего в таблице m строк и n столбцов. Каждый раз исчезает,
как минимум, либо строка, либо столбец (могут исчезнуть сразу и строка, и столбец, если запасы какого-то подмножества поставщиков полно-

стью удовлетворят потребности какого-то подмножества потребителей). Однако при последней перевозке исчезает сразу и последняя строка, и последний столбец. Поэтому получающийся план перевозок содержит не более ($m + n - 1$) компонент.

Метод северо-западного угла наиболее простой метод, но и план перевозок, полученный таким образом, достаточно далек от оптимального.

Пример 15.

На складах трех поставщиков A_1, A_2, A_3 хранится 160, 30 и 90 единиц одного и того же груза. Этот груз требуется доставить четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, заказы которых составляют 100, 40, 80 и 60 единиц груза соответственно. Стоимость перевозок c_{ij} единицы груза с i-го склада j-му потребителю:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Используя метод северо-западного угла построить начальное опорное решение транспортной задачи.

Таблица 33

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 x_{11}	8 x_{12}	10 x_{13}	5 x_{14}	160
A_2	4 x_{21}	6 x_{22}	2 x_{23}	3 x_{24}	30
A_3	4 x_{31}	4 x_{32}	6 x_{33}	5 x_{34}	90
Потребность	100	40	80	60	

Решение.

Первая клетка загружается на основе правила:

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{160; 100\} = 100 .$$

Запрос первого потребителя полностью удовлетворен, первый столбец вычеркиваем. А пункт отправления первого поставщика имеет остатки груза $\Delta a_1 = 160 - 100 = 60$. Двигаемся по первой строке вправо и распределяем далее по тому же правилу:

$$x_{12} = \min\{\Delta a_1; b_2\} = \min\{60; 40\} = 40.$$

Запрос второго потребителя полностью удовлетворен, второй столбец вычеркиваем. Остатки груза второго поставщика составят $\Delta a_1 = 60 - 40 = 20$. Двигаемся по первой строке вправо:

$$x_{13} = \min\{\Delta a_1; b_3\} = \min\{20; 80\} = 20.$$

Запас поставщика исчерпан, первая строка вычеркивается. Третьему потребителю не хватает $\Delta b_3 = 80 - 20 = 60$ единиц груза. Двигаемся по третьему столбцу вниз

$$x_{23} = \min\{a_2; \Delta b_3\} = \min\{30; 60\} = 30.$$

Запас второго поставщика исчерпан, и вычеркивается вторая строка. Третьему потребителю все еще не хватает $\Delta b_3 = 60 - 30 = 30$ единиц груза. Двигаемся по третьему столбцу вниз

$$x_{33} = \min\{a_3; \Delta b_3\} = \min\{90; 30\} = 30.$$

Запрос третьего потребителя полностью удовлетворен, третий столбец вычеркиваем. Остатки груза третьего поставщика составят $\Delta a_3 = 90 - 30 = 60$. Двигаемся по третьей строке вправо

$$x_{34} = \min\{\Delta a_3; b_4\} = \min\{60; 60\} = 60.$$

Транспортная таблица заполнена (таблица 34). Число ненулевых значений x_{ij}, , равно 6. Число базисных переменных задачи 3 + 4 – 1 = 6. Остальные 3 · 4 – 6 = 6 переменных являются свободными, их значения равны нулю.

Таблица 34

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10 20	5	160
A_2	4	6	2 30	3	30
A_3	4	4	6 30	5 60	90
Потребность	100	40	80	60	

После распределения можно подсчитать общую стоимость всех перевозок (25) по данному плану:

$$F(x) = 4 \cdot 100 + 8 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 1460 .$$

Метод минимального элемента (*наименьшей стоимости*) предполагает, что из всех не вычеркнутых клеток транспортной матрицы выбирается клетка с минимальной стоимостью перевозки $\min\{c_{ij}\}$.

Построение опорного плана при этом методе начинается с клетки с наименьшим тарифом перевозок, в которую помещают меньшее из чисел a_i, или b_j. При наличии нескольких клеток выбираем любую.

Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя, по правилу

$$x_{ij} = \min\{a_i ; b_j\}.$$

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пример 16.

Используя метод минимального элемента построить начальное опорное решение транспортной задачи.

Таблица 35

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 x_{11}	3 x_{12}	4 x_{13}	2 x_{14}	60
A_2	4 x_{21}	5 x_{22}	8 x_{23}	3 x_{24}	80
A_3	2 x_{31}	3 x_{32}	6 x_{33}	7 x_{34}	100
Потребность	40	60	80	60	

Решение.

Среди элементов матрицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость $c_{11} = 1$. Данная стоимость имеет место при перевозке груза от

первого поставщика первому потребителю. В соответствующую клетку записываем максимально возможный объем перевозки

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{60; 40\} = 40,$$

т.е. минимум между запасами первого поставщика и запросами первого потребителя. Запрос первого потребителя полностью удовлетворен, первый столбец вычеркиваем. А пункт отправления первого поставщика имеет остатки груза $\Delta a_1 = 60 - 40 = 20$.

В оставшейся части матрицы стоимостей минимальной стоимостью является стоимость $c_{14} = 2$. Максимально возможная перевозка, которую можно осуществить от первого поставщика четвертому потребителю

$$x_{14} = \min\{\Delta a_1; b_4\} = \min\{20; 60\} = 20.$$

Запасы первого поставщика исчерпаны, поэтому исключаем его из рассмотрения. Четвертому потребителю все еще не хватает $\Delta b_4 = 60 - 20 = 40$ единиц груза.

В оставшейся части матрицы стоимостей минимальная стоимость $c_{24} = c_{32} = 3$. Выбираем одну из двух клеток таблицы (2, 4) или (3, 2). Заполним клетку

$$x_{24} = \min\{a_2; \Delta b_4\} = \min\{80; 40\} = 40.$$

Запрос четвертого потребителя полностью удовлетворен. Исключаем его из рассмотрения, вычеркивая четвертый столбец. Уменьшаем запасы второго поставщика $\Delta a_2 = 80 - 40 = 40$.

В оставшейся части матрицы стоимостей минимальная стоимость $c_{32} = 3$. Запишем в клетку (3, 2) таблицы перевозку

$$x_{32} = \min\{a_3; b_2\} = \min\{100; 60\} = 60.$$

Исключим из рассмотрения второго потребителя, вычеркивая второй столбец. Уменьшаем запасы третьего поставщика $\Delta a_3 = 100 - 60 = 40$.

В оставшейся части матрицы стоимостей минимальная стоимость $c_{33} = 6$. Запишем в клетку (3, 3) таблицы перевозку

$$x_{33} = \min\{\Delta a_3; b_3\} = \min\{40; 80\} = 40.$$

Исключим из рассмотрения третьего поставщика, а из матрицы третью строку. Определяем оставшиеся запросы третьего потребителя $\Delta b_3 = 80 - 40 = 40$.

В матрице стоимостей остался единственный элемент $c_{23} = 8$. Записываем в клетку таблицы (2, 3) перевозку $x_{23} = 40$.

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток таблицы равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1$.

Таблица 36

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 40	3	4	2 20	60
A_2	4	5	8 40	3 40	80
A_3	2	3 60	6 40	7	100
Потребность	40	60	80	60	

Найдем суммарную стоимость перевозок по найденному опорному плану

$$F(x) = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 8 \cdot 40 + 3 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 6 \cdot 40 = 940$$

6.4. Определение оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов

Метод потенциалов предназначен для решения транспортной задачи в матричной постановке. Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи этим методом аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Потенциалы – это двойственные переменные. Сам метод – прямой, на каждом шаге выбирается одно из двойственных ограничений, которое не выполняется и исправляется таким образом, чтобы не нарушить ограничения прямой задачи. Постепенно в двойственной задаче ограничения будут выполнены, что будет означать оптимальность в прямой задаче.

Составим двойственную задачу:

1. $u_1, u_2, ... u_m$ и $v_1, v_2, ... v_n$ – любые;

2. $u_i + v_j \le c_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$;

3. $T(u,v) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$.

Пусть есть план $X^* = \{x_{ij}^*\}$, где $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

Теорема (критерий оптимальности). Для того чтобы допустимый план перевозок $X^* = \{x_{ij}^*\}$, где $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, в транспортной задаче был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $u_1, u_2, ... u_m$ и $v_1, v_2, ... v_n$, что

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0, \tag{32}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0. \tag{33}$$

числа u_i и v_j называются потенциалами пунктов отправления A_i и назначения B_j соответственно.

Сформулированная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи. Он состоит в следующем. Пусть одним из рассмотренных выше методов найден опорный план. Для этого плана, в котором ($m + n - 1$) базисных клеток, можно определить потенциалы u_i и v_j так, чтобы выполнялось условие (32). Поскольку система (26) содержит ($m + n - 1$) уравнений и ($m + n$) неизвестных, то одну из них можно задать произвольно (например, приравнять к нулю). После этого из ($m + n - 1$) уравнений (32) определяются остальные потенциалы и для каждой из свободных клеток вычисляются величины $\Delta c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Заметим, что для базисных клеток $\Delta c_{ij} = 0$. Если оказалось, что $\Delta c_{ij} \ge 0$, то план оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке $\Delta c_{ij} < 0$, то план не является оптимальным и может быть улучшен путем переноса по циклу, соответствующему данной свободной клетке.

Циклом пересчета в таблице условий транспортной задачи, называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце.

Цикл пересчета удовлетворяет следующим условиям:

1. одно из неизвестных последовательности свободное, а все остальные – базисные;

2. каждые два соседних в последовательности неизвестных лежат либо в одном столбце, либо в одной строке;

3. три последовательных неизвестных не могут находиться в одном столбце или в одной строке;

4. если, начиная с какого-либо неизвестного, мы будем последовательно переходить от одного к следующему за ним неизвестному, то через несколько шагов мы вернемся к исходному неизвестному.

Если каждые два соседних неизвестных цикла соединить отрезком прямой, то будет получено геометрическое изображение цикла – замкнутая ломаная из чередующихся горизонтальных и вертикальных звеньев, одна из вершин которой находится в свободной клетке, а остальные – в базисных клетках. Конфигурация цепочек в цикле может быть самая разная: от простейшей в виде квадрата до сложных многоугольных фигур.

Клетки, в которых цикл осуществляет поворот, называются *клетками цикла* или *вершинами*. Клетки, через которые проходит ломаная линия, не делая в них поворота, называются *транзитными*, и имеющиеся в них поставки не участвуют в процессе перераспределения груза.

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить единственный цикл пересчета

Пусть для некоторой свободной клетки (i; j) построен цикл. Расставим чередующиеся знаки «+» и «–» , начиная с «+» в свободной клетке, для которой этот цикл строится, и, осуществляя обход цикла (в любом направлении).

Переопределение достигается за счет сдвига по циклу пересчета. Суть сдвига заключается в следующем. Если в качестве Δx выбрать наименьшее из чисел, стоящих в вершинах, снабженных знаком «–», то, по крайней мере, одно из прежних базисных неизвестных примет значение нуль, и мы можем перевести его в число свободных неизвестных, сделав вместо него базисным то неизвестное, которое было свободным.

Для этого необходимо в клетках цепочки со знаком «–» выбрать клетку с наименьшим объемом перевозки $\Delta x^{-} = \min\{x_{ij}\}$. На эту величину уменьшаем все клетки цепочки, имеющие знак «–» и увеличиваем все клетки, включая свободную, имеющие знак «+». Общая сбалансированность плана при этом не изменится, а общая сумма затрат на перевозку уменьшится.

Алгоритм оптимизации плана перевозок по методу потенциалов будет следующим:

1. Проверить найденный опорный план на невырожденность, и если на каком-то этапе решения получается вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив эти клетки в базисные.

2. Сопоставить каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j величины потенциалов u_i и v_j так, чтобы для всех базисных клеток плана выполнялись соотношения $u_i + v_j = c_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$. Полученные потенциалы u_i для строк записываем в дополнительном столбце справа, а потенциалы столбцов v_j в нижней дополнительной строке.

3. Чтобы проверить план на оптимальность, для каждой свободной клетки вычисляются разности $\Delta c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, и полученные значения записываются в левых нижних углах соответствующих клеток (для базисных клеток $\Delta c_{ij} = 0$).

4. Если все разности $\Delta c_{ij} \geq 0$, то план является оптимальным, в противном случае необходимо перераспределение груза по клеткам цикла.

5. Найдем клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью Δc_{ij} и построим цикл пересчета, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными. Такой цикл всегда существует и единственен.

6. По всей длине цикла в каждой вершине проставляем поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в свободной клетке. Груз будет перераспределен по клеткам цикла на величину $\Delta x^- = \min\{x_{ij}\}$. В клетках со знаком «+» значение перевозки увеличивается на величину Δx^-, а в клетках со знаком «–» уменьшается на величину Δx^-.

7. Полученный новый план проверяется на оптимальность. Перераспределение груза производится до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным.

Пример 17.

Используя метод потенциалов найти оптимальное решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 37.

Таблица 37

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10 20	5	160
A_2	4	6	2 30	3	30

A_3	4	4	6 30	5 60	90
Потребность	100	40	80	60	

Решение.

1. Проверим план на невырожденность. Проверяем число базисных клеток в примере: 6. Результат ($m + n - 1$) = 3 + 4 – 1 = 6. Следовательно 6 = 6 – план невырожденный.

2. Определим величины потенциалов u_i и v_j, используя соотношение $u_i + v_j = c_{ij}$, и дополним транспортную таблицу (таблица 38).

$$u_1 = 0;$$
$$u_1 + v_1 = 4 \rightarrow 0 + v_1 = 4 \rightarrow v_1 = 4;$$
$$u_1 + v_2 = 8 \rightarrow 0 + v_2 = 8 \rightarrow v_2 = 8;$$
$$u_1 + v_3 = 10 \rightarrow 0 + v_3 = 10 \rightarrow v_3 = 10;$$
$$u_2 + v_3 = 2 \rightarrow u_2 + 10 = 2 \rightarrow u_2 = -8;$$
$$u_3 + v_3 = 6 \rightarrow u_3 + 10 = 6 \rightarrow u_2 = -4;$$
$$u_3 + v_4 = 5 \rightarrow -4 + v_4 = 5 \rightarrow v_4 = 9.$$

Таблица 38

Поставщики	Потребители				u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10 20	5	0
A_2	4	6	2 30	3	– 8
A_3	4	4	6 30	5 60	– 4
v_j	4	8	10	9	

3. Проверим план на оптимальность, для чего в каждой свободной клетке вычислим разности Δc_{ij}. Полученные значения записываем в транспортную таблицу (таблица 39).

$$\Delta c_{14} = 5 - (0 + 9) = -4;$$
$$\Delta c_{21} = 4 - (-8 + 4) = 8;$$
$$\Delta c_{22} = 6 - (-8 + 8) = 6;$$

$$\Delta c_{24} = 3 - (-8 + 9) = 2;$$
$$\Delta c_{31} = 4 - (-4 + 4) = 4;$$
$$\Delta c_{32} = 4 - (-4 + 8) = 0.$$

4. Так как $\Delta c_{14} = -4 \le 0$, то этот план не является оптимальным. Перераспределим груз по циклу, обозначенному в таблице 39 пунктиром, на величину $\Delta x^{-} = \min\{20; 60\}$. Для этого в клетках со знаком «+» увеличим поставки на 20 единиц, а клетках со знаком «–» – поставки на столько же уменьшим.

Таблица 39

Поставщики	Потребители				u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10 20	5 – 4	0
A_2	4 8	6 6	2 30	3 2	– 8
A_3	4 4	4 0	6 30	5 60	– 4
v_j	4	8	10	9	

5. Проверим план на невырожденность. Проверяем число базисных клеток в примере: 6. Результат ($m + n - 1$) = 3 + 4 – 1 = 6. Следовательно 6 = 6 – план невырожденный.

6. Определим величины потенциалов и дополним транспортную таблицу (таблица 40).

Таблица 40

Поставщики	Потребители				u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10	5 20	0
A_2	4	6	2 30	3	– 4
A_3	4	4	6 50	5 40	0
v_j	4	8	6	5	

$$u_1 = 0;$$
$$u_1 + v_1 = 4 \rightarrow 0 + v_1 = 4 \rightarrow v_1 = 4$$

$$u_1 + v_2 = 8 \rightarrow 0 + v_2 = 8 \rightarrow v_2 = 8$$
$$u_1 + v_4 = 5 \rightarrow 0 + v_4 = 5 \rightarrow v_4 = 5$$
$$u_3 + v_4 = 5 \rightarrow u_3 + 5 = 5 \rightarrow u_3 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 6 \rightarrow 0 + v_3 = 6 \rightarrow v_3 = 6$$
$$u_2 + v_3 = 2 \rightarrow u_2 + 6 = 2 \rightarrow u_2 = -4$$

7. Проверим план на оптимальность (вычислим Δc_{ij}). Полученные значения записываем в транспортную таблицу (таблица 41).

$$\Delta c_{13} = 10 - (0 + 6) = 4$$
$$\Delta c_{21} = 4 - (-4 + 4) = 4$$
$$\Delta c_{22} = 6 - (-4 + 8) = 2$$
$$\Delta c_{24} = 3 - (-4 + 5) = 2$$
$$\Delta c_{31} = 4 - (0 + 4) = 0$$
$$\Delta c_{32} = 4 - (0 + 8) = -4$$

Таблица 41

Поставщики	Потребители				u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40 −	10 4	5 + 20	0
A_2	4 4	6 2	2 30	3 2	– 4
A_3	4 0	4 + – 4	6 50	5 − 40	0
v_j	4	8	6	5	

8. Так как $\Delta c_{32} = -4 \le 0$, то этот план не является оптимальным. Поэтому придется еще раз улучшать план. С этой целью перераспределим груз по циклу, отмеченному в таблице 41 пунктиром, на величину $\Delta x^- = \min\{40; 40\}$.

9. Проверим план на невырожденность. Проверяем число базисных клеток в примере: 5. Результат ($m + n - 1$) = 3 + 4 – 1 = 6. Следовательно $5 \neq 6$ – план вырожденный. Дополним план нулевой перевозкой. Так как в результате в цикле получаются две клетки с нулевыми перевозками: (1; 3) и (3; 4) , то сделаем свободной клетку (1; 3), поскольку ее тариф перевозок больше.

10. Определим величины потенциалов и дополним транспортную таблицу (таблица 42).

$$u_1 = 0;$$
$$u_1 + v_1 = 4 \rightarrow 0 + v_1 = 4 \rightarrow v_1 = 4$$
$$u_1 + v_4 = 5 \rightarrow 0 + v_4 = 5 \rightarrow v_4 = 5$$
$$u_3 + v_4 = 5 \rightarrow u_3 + 5 = 5 \rightarrow u_3 = 0$$
$$u_3 + v_2 = 4 \rightarrow 0 + v_2 = 4 \rightarrow v_2 = 4$$
$$u_3 + v_3 = 6 \rightarrow 0 + v_3 = 6 \rightarrow v_3 = 6$$
$$u_2 + v_3 = 2 \rightarrow u_2 + 6 = 2 \rightarrow u_2 = -4$$

Таблица 42

Поставщики	Потребители				u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8	10	5 60	0
A_2	4	6	2 30	3	– 4
A_3	4	4 40	6 50	5 0	0
v_j	4	4	6	5	

11. Проверим план на оптимальность (вычислим Δc_{ij}). Полученные значения записываем в транспортную таблицу 43.

$$\Delta c_{13} = 10 - (0 + 6) = 4$$
$$\Delta c_{21} = 4 - (-4 + 4) = 4$$
$$\Delta c_{22} = 6 - (-4 + 8) = 2$$
$$\Delta c_{24} = 3 - (-4 + 5) = 2$$
$$\Delta c_{31} = 4 - (0 + 4) = 0$$
$$\Delta c_{32} = 4 - (0 + 8) = -4$$

12. Все Δc_{ij} неотрицательны, значит, план оптимален (таблица 43).

Таблица 43

Поставщики	Потребители				u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	10	5	0

	100	4	4	60	
A_2	4 4	6 6	2 30	3 2	-4
A_3	4 0	4 40	6 50	5 0	0
v_j	4	4	6	5	

Найдем суммарную стоимость перевозок по найденному оптимальному плану

$$F(x) = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 60 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 40 + 6 \cdot 50 = 1220 .$$

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

7.1. Основные понятия теории игр

Во многих экономических задачах часто возникают ситуации, когда две и более сторон разрешают одну и ту же проблему, но преследуют различные цели, их интересы противоположны. Такие ситуации называются *конфликтами* (отношения между продавцом и покупателем, кредитором и дебитором).

Математические методы анализа конфликтных ситуации называются *теорией игр*, конфликт называется *игрой*, а стороны, участвующие в конфликте называются *игроками*.

Игра описывает:

– множество заинтересованных сторон;

– возможные действия каждой из сторон (стратегии и ходы);

– интересы сторон (выигрыши или проигрыши).

Классификации видов игр:

– по числу игроков различают игры с двумя, тремя и более участниками. Если в игре участвует только два игрока, *игра* называется *парной*.

– по числу стратегий различаются конечные и бесконечные игры (например, при игре «орел» - «решка» конечное число; при взаимодействии продавца с покупателем – бесконечное число стратегий, любое количество товара и любая цена).

– по характеру взаимодействия игры делятся на *бескоалиционные* – игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; и *коалиционные* (*кооперативные*) – игроки могут вступать в коалиции (в кооперативных играх коалиции наперед определены).

– по характеру выигрышей игры делятся на *игры с нулевой суммой* (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками, и; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

Игра, в которой выигрыш одного из игроков точно равен проигрышу другого, называется *антагонистической игрой* или *игрой с нулевой суммой*.

Рассмотрим модель парной антагонистической игры.

Игрок A желает принять решение, на результат которого влияет игрок B, цели которого противоположны A. Игрок A может выбрать одну из n альтернатив своих действий: A_1, A_2, ..., A_n (стратегии). Игрок B также может выбрать одну из своих стратегий B_1, B_2, ..., B_m.

Предположим, что известны выигрыши (проигрыши) игрока A при любой выбранной им стратегии A_i и любом ответе ему игроком B –

стратегии B_j. Пусть этот результат выражен числом a_{ij} (которое может быть отрицательным в случае проигрыша A). Величины a_{ij} образуют матрицу, которая называется *платежной* или *матрицей игры* (таблица 44).

Таблица 44

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

7.2. Решение игр в чистых стратегиях

Игрок A выбирая свою стратегию A_i понимает, что B ответит ему такой стратегией B_j, чтобы выигрыш A был минимальным. Поэтому из всех наихудших вариантов (минимальных элементов каждой строки) $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ игроку A выгодно выбирать стратегию, соответствующую максимальному из этих элементов

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α называется *нижней ценой игры* или *максимином*. Это гарантированный выигрыш игрока A.

С другой стороны, игрок B, выбирая свою стратегию B_j, понимает, что игрок A ответит ему такой стратегий A_i, чтобы его выигрыш был максимален. Поэтому среди наилучших вариантов для A (максимальных элементов каждого столбца) $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ игроку B рационально выбрать свою стратегию, соответствующую минимальному из этих чисел

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β называется *верхней ценой игры* или *минимаксом*. Это минимальный проигрыш игрока B.

Результат решения конфликтной ситуации называется ценой игры и заключен в пределах $\alpha \le v \le \beta$. Если верхняя и нижняя цены игры сов-

падают $\alpha = v = \beta$, то игра решается в *чистых стратегиях*, а v называется седловой точкой.

Седловая точка – это пара оптимальных стратегий (A_i, B_j) или точка равновесия (или значение минимальное в своей строке и максимальное в своем столбце). В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке.

Пример 18.

Дебитор A желает выбрать один из четырех условий займа: A_1, A_2, A_3, A_4. Кредитор может на любой вариант займа ответить вариантом предоставления кредита B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Процентные ставки для дебитора при любом варианте кредитора представлены платежной матрицей, описанной в таблице 45.

Таблица 45

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	1	8	4	4
A_2	9	6	7	5	8
A_3	3	7	6	2	8
A_4	2	6	7	3	3

Решение.

Таблица 46

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	6	1	8	4	4	1
A_2	9	6	7	5	8	5
A_3	3	7	6	2	8	2
A_4	2	6	7	3	3	2
β_j	9	7	8	5	8	

Находим минимальные элементы каждой строки платежной матрицы α_i (1; 5; 2; 2) и из них находим максимальное значение $\alpha = \max\limits_{4}\{1; 5; 2; 2\} = 5$.

Из максимальных элементов каждого столбца β_j (9; 7; 8; 5; 8) выбираем минимальный $\beta = \min\limits_{5}\{9; 7; 8; 5; 8\} = 5$.

Видно, что верхние и нижние цены игры совпадают $\alpha = v = \beta = 5$, следовательно для обоих игроков выгодны стратегии и процентная ставка, равная 5. При принятии игроками иной стратегии, отличной от оптимальной, игроки только проиграют.

7.3. Решение игр в смешанных стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, не так уж часто встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цены игры различны $\alpha \neq \beta$.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии, с определенными вероятностями (частотами). Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются *активными*.

Теорема об активных стратегиях. Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры v, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

Смешанной стратегией игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причем сумма вероятностей равна

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \text{ при } p_i \geq 0.$$

Тогда смешанная стратегия игрока A – S_A, состоящая из стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, имеет вид

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{pmatrix}.$$

Аналогично смешанные стратегии игрока B обозначаются как

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1, B_2, \ldots, B_n \\ q_1, q_2, \ldots, q_n \end{pmatrix},$$

где сумма вероятностей появления стратегий

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \text{ при } q_j \geq 0.$$

Зная матрицу A для первого игрока можно определить средний выигрыш (математическое ожидание)

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \ .$$

Игрок A, применяя свои смешанные стратегии, стремиться увеличить свой средний выигрыш, достигая

$$\beta = \min_{q} \max_{p} M(A, \overline{p}, \overline{q}).$$

Игрок B добивается

$$\alpha = \max_{p} \min_{q} M(A, \overline{p}, \overline{q}).$$

Обозначим через p_A^* и q_B^* векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков A и B, при которых выполняется равенство

$$\min_{q} \max_{p} M(A, \overline{p}, \overline{q}) = \max_{p} \min_{q} M(A, \overline{p}, \overline{q}) = M(A, p_A^*, q_B^*).$$

При этом выполняется условие

$$M(A, \overline{p}, q_B^*) \leq M(A, p_A^*, q_B^*) \leq M(A, p_A^*, \overline{q}).$$

Решить игру – это означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Основной теоремой в теории антагонистических игр является теорема фон Неймана: каждая конечная матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение среди смешанных стратегий.

7.3.1. Решение конечной игры 2×2 без седловой точки

Простейший случай игры, решаемой в смешанных стратегиях – игра 2×2, когда у каждого игрока имеется лишь по две стратегии. Платежная матрица такой игры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix},$$

а смешанные стратегии игроков

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*), \quad p_1^* + p_2^* = 1,$$
$$S_B^* = (q_1^*, q_2^*), \quad q_1^* + q_2^* = 1,$$

и цену игры v.

Каковы бы не были действия противника, выигрыш будет равен цене игры G. Это означает, что если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии $S_A^*(p_1, p_2)$, то игроку B нет смысла отступать от своей оптимальной стратегии $S_B^*(q_1, q_2)$.

В игре 2×2, не имеющей седловой точки, обе стратегии являются активными.

Для игрока A имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* = v \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

Для игрока B аналогично

$$\begin{cases} a_{11} q_1^* + a_{21} q_2^* = \mathrm{v} \\ a_{12} q_1^* + a_{22} q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Если $v < 0$ и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы не равен нулю, следовательно, эти системы имеют единственное решение.

Решая приведенные системы уравнений, получим оптимальные стратегии

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ p_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ q_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases}$$

и цену игры

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Пример 19.

Дана платежная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков *A* и *B*.

Решение.

Так как $\alpha = 3$, $\beta = 5$, то $\alpha < \beta$ и игровая матрица не имеет седловой точки. Следовательно, решение необходимо искать в смешанных стратегиях.

Для игрока *A*

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{5-3}{6+5+2-3} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2; \\ p_2^* = \dfrac{6+2}{6+5+2-3} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8. \end{cases}$$

Для игрока *B*

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{5+2}{6+5+2-3} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7; \\ q_2^* = \dfrac{6-3}{6+5+2-3} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3. \end{cases}$$

и цена игры

$$v = \frac{6 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{6+5+2-3} = \frac{36}{10} = 3{,}6.$$

Следовательно оптимальные стратегии игроков *A* и *B* имеют вид

$$S_A^* = (0{,}2; 0{,}8), \quad S_B^* = (0{,}7; 0{,}3).$$

Решению игры 2×2 можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с матрицей, приведенной в таблице 47.

Таблица 47

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Геометрический метод решения игры включает следующие этапы.

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс откладывается отрезок A_1A_2, длина которого равна 1 (рис. 7). Левый конец отрезка (точка с абсциссой $x = 0$) соответствует стратегии A_1, правый конец отрезка ($x = 1$) – стратегии A_2. Все промежуточные точки этого отрезка соответствуют смешанным стратегиям $S_A = (p_1, p_2)$.

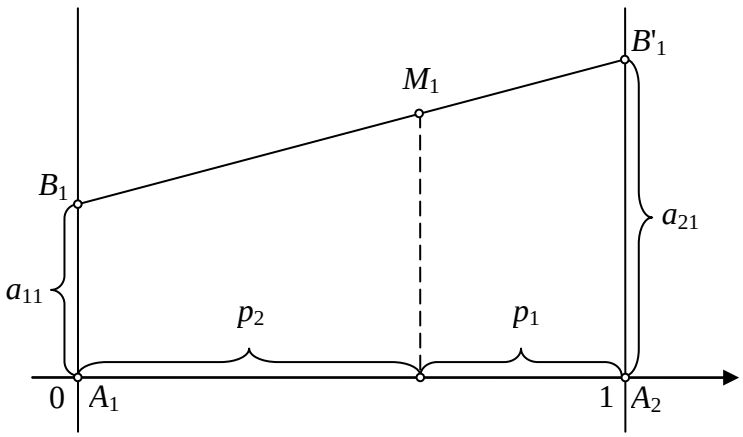

Рис. 7. Геометрическая интерпретация решения игры 2×2 (применение стратегии B_1)

2. Проведем через точки A_1 и A_2 два перпендикуляра к оси абсцисс: на оси ординат от точки 0 будем откладывать выигрыши при стратегии A_1; на линии, параллельной оси ординат, от точки 1 – выигрыши при стратегии A_2.

3. Если игрок *B* применит стратегию B_1, то выигрыш игрока *A* при стратегии A_1 будет равен a_{11}, поэтому на оси ординат отложим отрезок $A_1B_1 = a_{11}$. При применении игроком стратегии A_2 выигрыш равен a_{21}, отложим этот отрезок на перпендикуляре из точки A_2, обозначим точку B_1'.

4. Проведем через эти точки прямую B_1B_1'. Ордината любой точки M_1 отрезка B_1B_1' равна среднему выигрышу игрока *A* при применении смешанной стратегии S_A.

Запишем уравнение прямой B_1B_1':

$$y = a_{11} + x(a_{21} - a_{11}) \text{ или } x = \frac{y - a_{11}}{a_{21} - a_{11}},$$

тогда при $x = p_2$ получим $y = a_{11} + p_2a_{21} - p_2a_{11} = a_{11}(1 - p_2) + a_{21}p_2 = = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$.

Очевидно, если при стратегии противника B_1 будет применена смешанная стратегия

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

то средний выигрыш, равный в этом случае $a_{11}p_1 + a_{21}p_2$, будет отображен точкой M_1 на прямой, с абсциссой p_2.

5. Если игрок B применяет стратегию B_2, то аналогично откладываются отрезки a_{12} и a_{22} и строится отрезок B_2B_2' (рис. 8). Ордината любой точки M_2 отрезка B_2B_2' – выигрыш игрока A при применении им смешанной стратегии S_A и стратегии B_2 игроком B.

6. Необходимо найти оптимальную стратегию S_A^*, т.е. такую, для которой минимальный выигрыш (при любом поведении B) обращался бы в максимум. Для этого строиться нижняя граница выигрыша при стратегиях B_1 и B_2 , т.е. ломаная B_1NB_2'. Эта нижняя граница будет выражать минимальный выигрыш игрока A при любых его смешанных стратегиях. Точка N, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума, и определяет оптимальное решение и цену игры (ордината точки N). Проекция этой точки на ось OX показывает оптимальную стратегию (p_1^*, p_2^*).

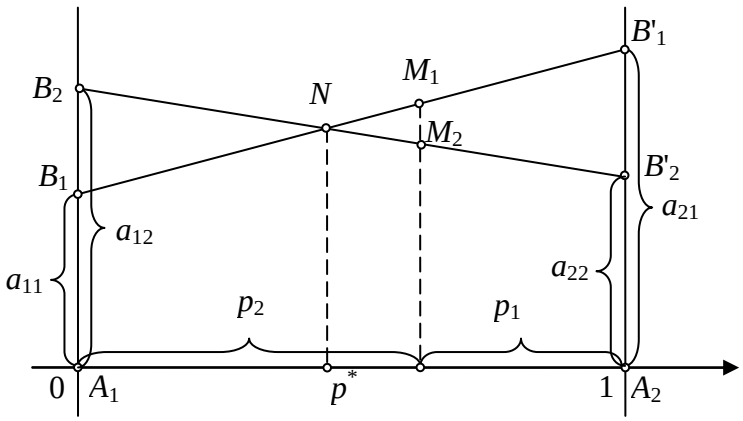

Рис. 8. Геометрическая интерпретация решения игры 2×2 (применение стратегии B_2)

7. Аналогично находится оптимальная стратегия (q_1, q_2) игрока B, только в соответствие с принципом минимакса надо находить верхнюю границу выигрыша, т.е. строить ломаную A_2NA_1' и брать точку N с наименьшей ординатой.

8. Абсцисса точки N определяет оптимальную стратегию игрока B, т.е. (q_1^*, q_2^*).

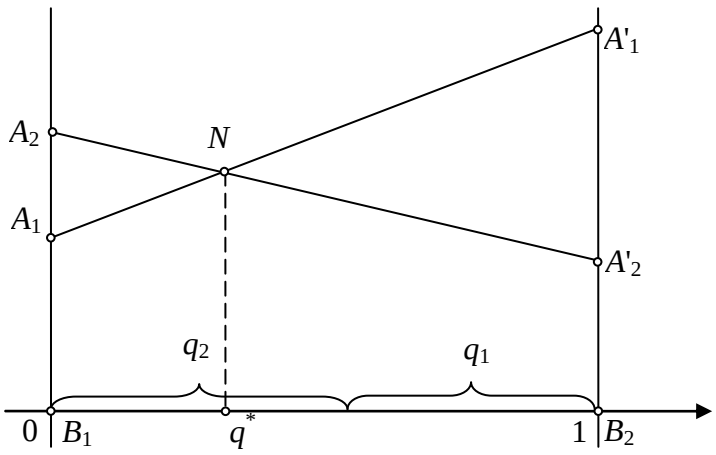

Рис. 9. Геометрическая интерпретация решения игры 2×2 (оптимальная стратегия игрока *B*)

Пример 20.

Решить игру, заданную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

графоаналитическим способом.

Решение.

Нижняя цена игры $\alpha = 1{,}5$, $\beta = 2$, то $\alpha < \beta$ и игровая матрица не имеет
седловой точки. Следовательно, решение необходимо искать в смешанных стратегиях.

Так как $a_{11} = 1{,}5$, $a_{21} = 2$ – строим точки $B_1(0;1{,}5)$ и $B_1'(1;2)$ и соединяем их отрезком.

Уравнение B_1B_1':

$$y = 1{,}5 + 0{,}5x \quad \text{или} \quad x = \frac{y - 1{,}5}{2 - 1{,}5},$$

уравнение B_2B_2':

$$y = 3 - 2x \quad \text{или} \quad x = \frac{y - 3}{1 - 3}.$$

Найдем точку *N* пересечения прямых B_1B_1' и B_2B_2', для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 1{,}5 + 0{,}5x \\ y = 3 - 2x \end{cases},$$

$$1{,}5 + 0{,}5x = 3 - 2x \;\rightarrow\; 2x = 1{,}5 \;\rightarrow\; x = 0{,}6;\; y = 1{,}8,$$

т.е. $N(0{,}6; 1{,}8)$, откуда $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}6$ и цена игры

$$v = \frac{1{,}5 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{1{,}5 + 1 - 3 - 2} = \frac{-4{,}5}{-2{,}5} = 1{,}8.$$

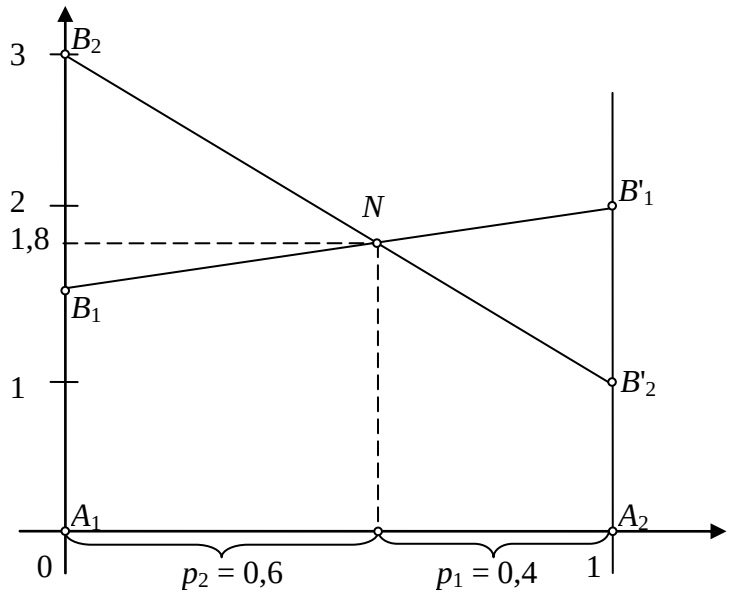

Рис. 10. Решение игры 2×2 графоаналитическим способом

7.3.2. Решение игр вида 2×n и m×2 графоаналитическим способом

У игр $2\times n$ и $m\times 2$ всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий для каждого из игроков. Если найти эти стратегии, то игра сводится к игре 2×2. Поэтому игры $2\times n$ и $m\times 2$ решают обычно графоаналитическим методом.

Пример 21.

Дана платежная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Таблица 48

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	4	7	1
A_2	6	3	2	2

				2
β_j	6	4	7	4

α = 2, β = 4, α ≠ β, игра не имеет седловой точки, и решение должно быть в смешанных стратегиях.

1. Строим графическое изображение игры (рис. 11).

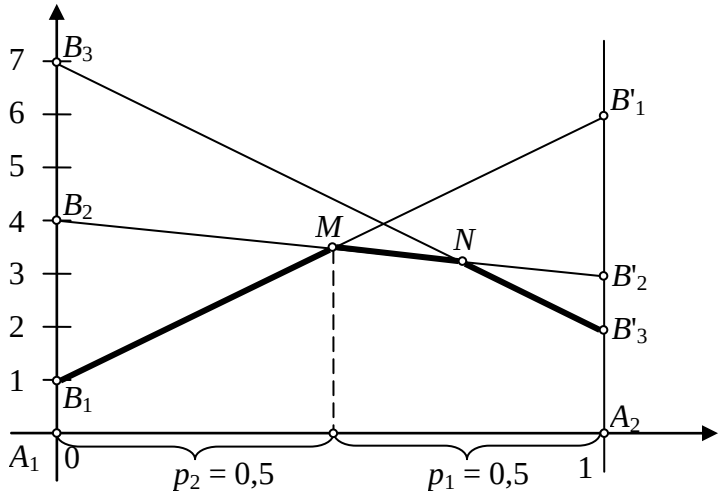

Рис. 11. Решение игры 2×*n* графоаналитическим способом

Если игрок *B* применяет стратегию B_1, то выигрыш игрока *A* при применении стратегии *A*1 равен $a_{11} = 1$, а при использовании A_2 выигрыш равен $a_{21} = 6$, поэтому откладываем отрезки $A_1B_1 = 1$, $A_2B_1' = 6$ на перпендикулярах в A_1 и A_2 и соединяем их отрезком. Аналогично для стратегий B_2 и B_3 строим отрезки B_2B_2' и B_3B_3'.

2. Выделяем нижнюю границу выигрыша B_1MNB_3' и находим наибольшую ординату этой нижней границы, ординату точки *M*, которая равна цене игры v.

3. Определяем пару стратегий, пересекающихся в точке оптимума *M*.

В этой точке пересекаются отрезки B_2B_2' и B_1B_1', соответствующие стратегиям B_1 и B_2 игрока *B*. Следовательно, стратегию B_3 ему применять невыгодно. Исключаем из матрицы третий столбец и решаем игру 2×2 аналитически:

$$\begin{cases} p_1 + 6p_2 = v \\ 4p_1 + 3p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$$p_1 + 6p_2 = 4p_1 + 3p_2 \rightarrow 3p_2 = 3p_1 \rightarrow p_1 = p_2 = 0{,}5;$$

$$v = 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 + 3 = 3{,}5.$$

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 = 3{,}5 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$$3q_2 = 2{,}5 \rightarrow q_2 = 2{,}5/3 = 0{,}83 \rightarrow q_1 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17 .$$

В результате получаем цену игры $v = 3{,}5$, и оптимальные стратегии игроков *A* и *B* имеют вид $S_A^* = (0{,}5; 0{,}5)$, $S_B^* = (0{,}17; 0{,}83; 0)$ соответственно.

7.4. Игры с природой

Если соперником игрока *A* выступает внешняя среда, т.е. обстоятельства, не контролируемые человеком, игра называется игрой с природой.

Характеристикой внешней среды (природы) является неопределенность, в условиях которой принимается управленческое решение. Выбор стратегии внешней средой происходит случайным образом, не учитывая выгоду игрока *A*.

Основными критериями, позволяющими выбирать оптимальную альтернативу для принятия решения в условиях неопределенности являются критерий Лапласа, минимаксный критерий, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

Основное различие между этими критериями определяется стратегией лица, принимающего решения. Критерий Лапласа основан на более оптимистичных предположениях, чем минимаксный критерий. Критерий Гурвица можно использовать при различных подходах – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Все эти критерии отражают субъективную оценку ситуации, в которой приходится принимать решение. При этом не существует общих правил применимости того или иного критерия, так как поведение лица, принимающего решение в условиях неопределенности, является наиболее важным фактором при выборе подходящего критерия.

Перечисленные критерии базируются на том, что лицу, принимающему решение, не противостоит разумный противник. В случае, когда в роли противника выступает природа, нет оснований предполагать, что она стремится причинить вред лицу, принимающему решение.

Данные, необходимые для принятия решений в условиях неопределенности, задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют действиям, а столбцы – возможным состояниям системы. Каждому действию и каждому возможному состоянию системы соответствует ре-

зультат (исход), определяющий выигрыш (или потери) при выборе данного действия и реализации данного состояния.

Предположим игрок A имеет n стратегий. Выигрыш игрока A зависит от развитии ситуации, на которую он не может повлиять. Предположим, существует m вариантов развития ситуации, которые обозначим S_1, S_2, ..., S_m. Они называются состояниями природы (реальные задачи этого типа связаны с погодными, климатическими, социальными и другими стихийными явлениями). a_{ij} – описывает соответствующий результат, в общем случае может быть непрерывной функцией, в дискретном случае указанные данные представляются в форме матрицы выигрышей (таблица 49).

Таблица 49

	S_1	S_2	…	S_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного основания, который гласит, что, поскольку распределение вероятностей состояний $P(s_i)$ неизвестно, нет причин считать их различными, т.е. каждый вариант состояния природы (развития ситуации) равновероятен $P(s_1) = P(s_2) = ... = P(s_m) = 1/m$. Необходимо рассчитать функцию полезности L для каждой альтернативы. Она равна среднеарифметическому показателей привлекательности по каждому состоянию природы. Выбирается стратегия, для которой функция полезности максимальна.

$$L = \max\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Критерий Вальда (*максимина*) основан на принципе максимального пессимизма и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших. Предполагается, что скорее всего произойдет худший вариант развития ситуации и риск наихудшего варианта надо свести к минимуму.

$$W = \max_i \min_j \left(a_{ij}\right).$$

Критерий максимального оптимизма (*максимакса*) основывается на идее, что игрок *A*, имея возможность в некоторой степени управлять ситуацией, рассчитывает, что произойдет такое развитие ситуации, которое для него является наиболее выгодным ("пан или пропал"). В соответствии с критерием принимается альтернатива, соответствующая максимальному элементу матрицы выигрышей.

$$M = \max_i \max_j (a_{ij}).$$

Критерий Сэвиджа основан на принципе минимизации потерь, связанных с тем, что игрок *A* принял неоптимальное решение. Для решения задачи составляется матрица потерь, которая называется матрица рисков. Она получается из матрицы выигрышей путем вычитания из максимального элемента каждого столбца всех остальных элементов $r_{ij} = \max_i (a_{ij}) - a_{ij}$ (таблица 50).

Таблица 50

	S_1	S_2	…	S_m
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1m}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	r_{n1}	r_{n2}	…	r_{nm}

Для каждой стратегии определяем величины, равные максимальному риску и выбираем стратегию, для которой риск минимален.

$$C = \min_i \max_j (r_{ij}).$$

Критерий Гурвица самый универсальный критерий, который позволяет управлять степенью оптимизма-пессимизма игрока *A*. Введем коэффициент *p*, который называется коэффициентом доверия или коэффициентом оптимизма. Это вероятность, с которой произойдет наилучший для *A* исход. Наихудший можно ожидать с вероятностью (1 – *p*). Если вероятности благоприятной и неблагоприятной ситуации для игрока *A* равны, то следует принять $p = 0{,}5$.

Стратегия игрока *A* выбирается по коэффициенту

$$H = \max_i \left(p \cdot \max_j (a_{ij}) + (1 - p) \cdot \min_j (a_{ij}) \right).$$

При p = 0 Критерий Гурвица совпадает с максимальным критерием (максимакса), а при p = 1 – с критерием Вальда.

Пример 22.

Директор торговой фирмы решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения A_1, A_2, ..., A_5. Успех фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации S_1, S_2, S_3, S_4. Прибыль фирмы (млн.руб. в год) для каждой альтернативы представлена матрицей выигрышей (таблица 51).

Таблица 51

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Рассмотрим основные критерии, позволяющие выбирать оптимальную альтернативу для принятия решения.

1) Критерий Лапласа

$$L_1 = \frac{1}{4}(8+12+14+5) = 9{,}75,$$

$$L_2 = \frac{1}{4}(9+10+11+10) = 10,$$

$$L_3 = \frac{1}{4}(2+4+9+22) = 9{,}25,$$

$$L_4 = \frac{1}{4}(12+14+10+1) = 9{,}25,$$

$$L_5 = \frac{1}{4}(15+6+7+14) = 10{,}5.$$

Функция полезности максимальна для стратеги A_5 ($L_5 = 10{,}5$), следовательно рациональнее принять ее.

2) Критерий Вальда (максимина).

$$W_1 = \min_j (8; 12; 14; 5) = 5,$$
$$W_2 = \min_j (9; 10; 11; 10) = 9,$$
$$W_3 = \min_j (2; 4; 9; 22) = 2,$$
$$W_4 = \min_j (12; 14; 10; 1) = 1,$$
$$W_5 = \min_j (15; 6; 7; 14) = 6.$$

Наилучший из наихудших показателей у стратегии A_2 ($W_2 = 9$).

3) Критерий максимального оптимизма (максимакса). Выбирается стратегия с максимальным элементом A_1 (максимальный элемент a_{34} = 22 или $M = 22$).

4) Критерий Сэвиджа. Построим матрицу рисков (таблица 52).

Таблица 52

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	15 – 8 = 7	14 – 12 = 2	14 – 14 = 0	22 – 5 = 17
A_2	15 – 9 = 6	14 – 10 = 4	14 – 11 = 3	22 – 10 = 12
A_3	15 – 2 = 13	14 – 4 = 10	14 – 9 = 5	22 – 22 = 0
A_4	15 – 12 = 3	14 – 14 = 0	14 – 10 = 4	22 – 1 = 21
A_5	15 – 15 = 0	14 – 6 = 8	14 – 7 = 7	22 – 14 = 8

$$C_1 = \max_j (7; 2; 0; 17) = 17,$$
$$C_2 = \max_j (6; 4; 3; 12) = 12,$$
$$C_3 = \max_j (13; 10; 5; 0) = 13,$$
$$C_4 = \max_j (3; 2; 4; 21) = 21,$$
$$C_5 = \max_j (0; 8; 7; 8) = 8.$$

В данном случае оптимальная стратегия A_2 ($C_2 = 12$).

5) Критерий Гурвица.

Предположим, для рассматриваемого примера игрок A уверен в успехе на 70%, следовательно p = 0,7.

$$H_1 = 0{,}7 \cdot \max_j (8; 12; 14; 5) + (1 - 0{,}7) \cdot \min_j (8; 12; 14; 5) = 0{,}7 \cdot 14 + 0{,}3 \cdot 5 = 11{,}3,$$

$$H_2 = 0{,}7 \cdot \max_j(9;10;11;10) + (1-0{,}7) \cdot \min_j(9;10;11;10) = 0{,}7 \cdot 11 + 0{,}3 \cdot 9 = 10{,}4$$

,

$$H_3 = 0{,}7 \cdot \max_j(2;4;9;22) + (1-0{,}7) \cdot \min_j(2;4;9;22) = 0{,}7 \cdot 22 + 0{,}3 \cdot 2 = 16,$$

$$H_4 = 0{,}7 \cdot \max_j(12;14;10;1) + (1-0{,}7) \cdot \min_j(12;14;10;1) = 0{,}7 \cdot 14 + 0{,}3 \cdot 1 = 10{,}1$$

,

$$H_5 = 0{,}7 \cdot \max_j(15;6;7;14) + (1-0{,}7) \cdot \min_j(15;6;7;14) = 0{,}7 \cdot 15 + 0{,}3 \cdot 6 = 12{,}3$$

.

Функция полезности максимальна для стратеги A_3 ($H_3 = 16$), следовательно рациональнее принять ее.

8. ВОЗМОЖНОСТИ ПАКЕТА *MS EXCEL* ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящее время одним из перспективных и распространенных способов численного решения задач линейного программирования является использование надстройки «Поиск решения» электронных таблиц *Microsoft Excel*. В частности, «Поиск решения» (рис. 12) предоставляет возможность:

– использования планов большой размерности (т.е. с большим количеством варьируемых переменных);

– задания ограничений сложного вида;

– отыскания оптимального из допустимых решений;

– генерирования множества различных решений, сохраняемых в дальнейшем в виде сценариев;

– автоматического создания отчета по решению задачи.

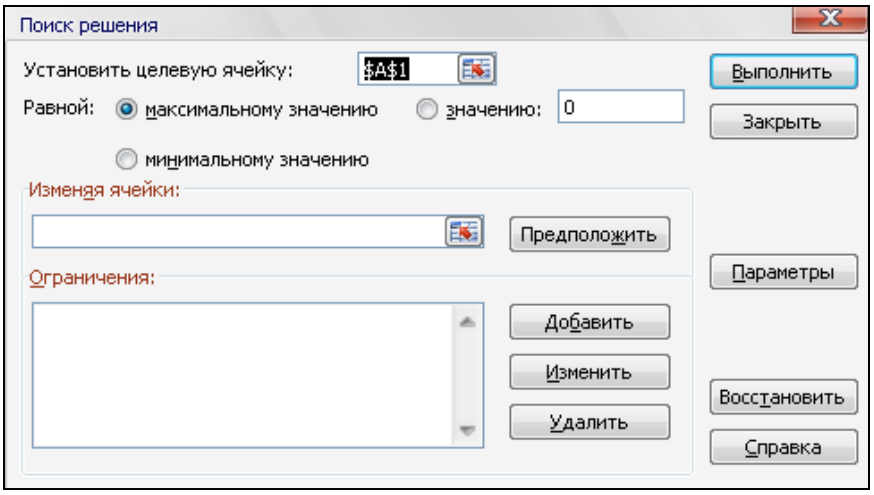

Рис. 12. Надстройка «Поиск решения» электронных таблиц *MS Excel*

Теоретической основой надстройки «Поиск решения» является симплекс-метод, позволяющий находить оптимальное решение задачи планирования с помощью итерационного процесса перехода к улучшающимся планам. «Поиск решения» является дополнением *Excel*, т.е. может не входить в стандартный вариант установки электронных таблиц. Для подключения (до первого использования):

1) в *MS Excel* 2003 выбрать команду Сервис → Надстройки → Поиск решения;

2) в *MS Excel* 2007 выбрать кнопку *Office* (левый верхний угол окна программы) → Параметры *Excel* (внизу окна меню) → Надстройки → Перейти (внизу окна Параметры *Excel*) → Поиск решения.

После этого команда Поиск решения будет включена в меню Сервис в *MS Excel* 2003 и появится во вкладке Данные в *MS Excel* 2007.

Пример 23.

Решим в *MS Excel* задачу линейного программирования**.**

Для откорма животных на ферме в их ежедневный рацион необходимо включить не менее 33 единиц питательного вещества А, 23 единиц вещества В и 12 единиц вещества С. Для откорма используется 3 вида кормов. Данные о содержании питательных веществ и стоимости весовой единицы каждого корма даны в таблице 53.

Таблица 53

	А, усл. ед.	В, усл. ед.	С, усл. ед.	Стоимость, руб.
Весовая единица корма I	4	3	2	20
Весовая единица корма II	3	2	1	20
Весовая единица корма III	2	1	2	10

Требуется составить наиболее дешевый рацион, при котором каждое животное получило бы необходимые количества питательных веществ А, В и С.

Математическая постановка задачи. Пусть x_1, x_2, x_3 – количества кормов I, II, III видов, включаемые в ежедневный рацион ($x_i \geq 0$, где $i = 1, 2, 3$). Тогда должно быть:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12. \end{cases}$$

При этом целевая функция (стоимость рациона)

$$F(x) = 20x_1 + 20x_2 + 10x_3 \to \min$$

1. Создадим область переменных (рис. 13). Ячейки **B2:B4** будут играть роль переменных (пока они пусты)

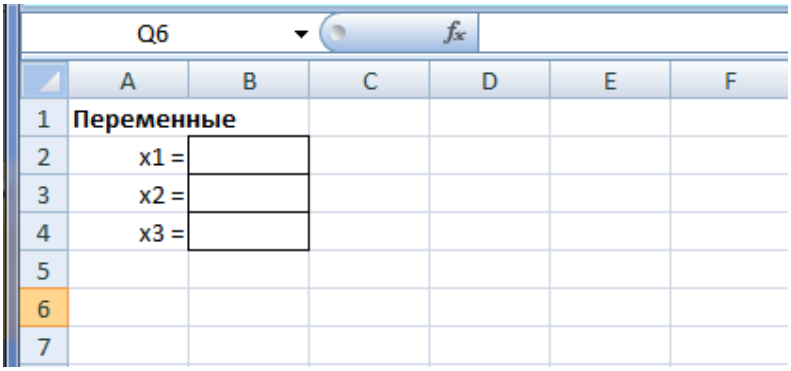

Рис. 13. Область переменных задачи

2. Введем формулу вычисления значений целевой функции, например, в ячейку **A7** (рис. 14).

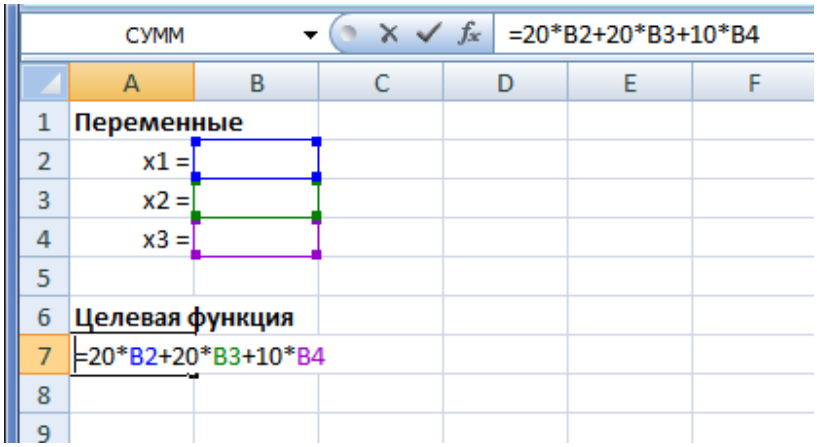

Рис. 14. Ввод целевой функции

3. Создадим область ограничений (рис. 15 – 17). В ячейках **A11:A13** будем вычислять левые части ограничений системы. В ячейках **B11:B13** введем правые части (свободные члены) ограничений системы.

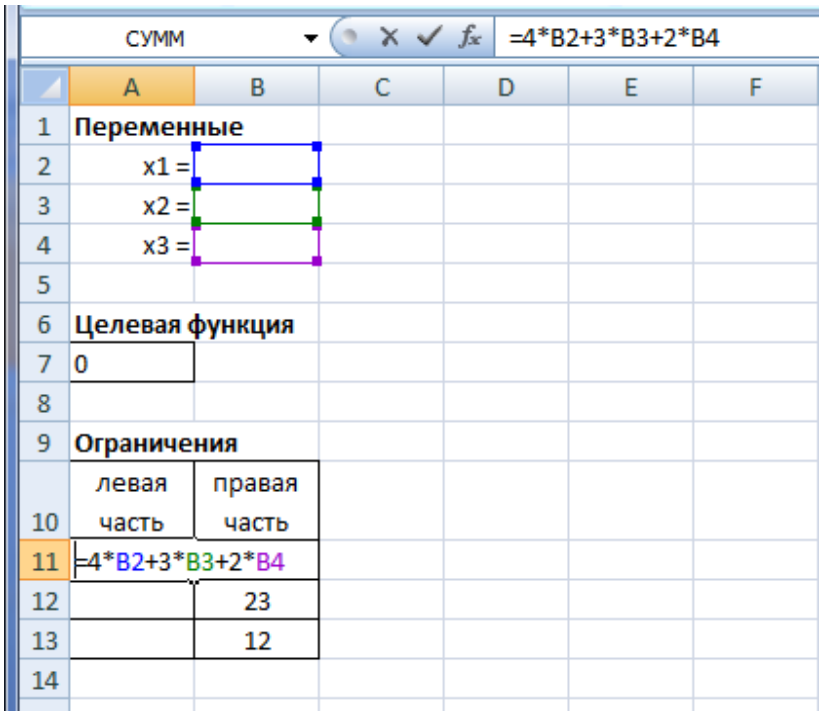

Рис. 15. Ввод первого ограничения системы

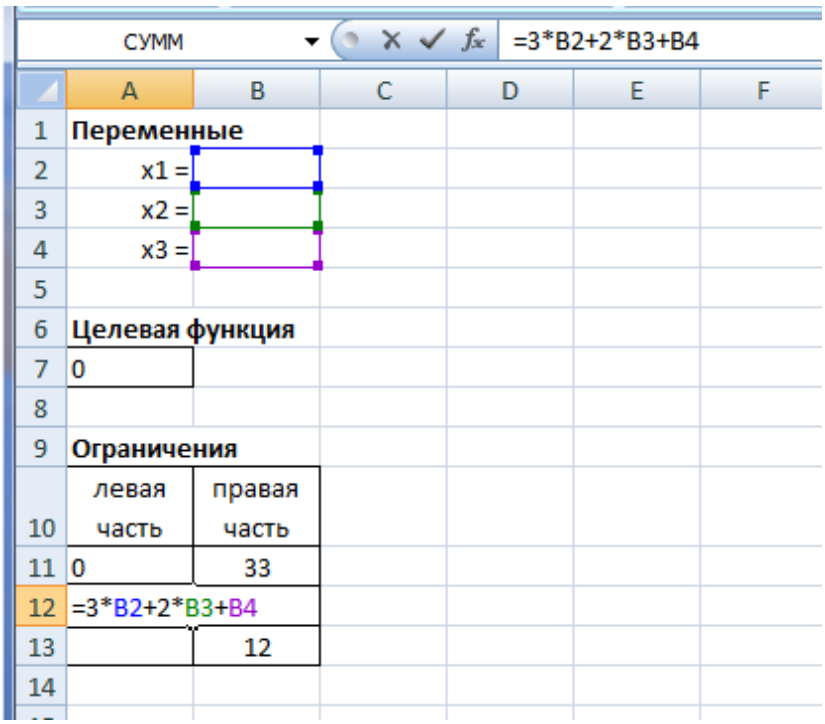

Рис. 16. Ввод второго ограничения системы

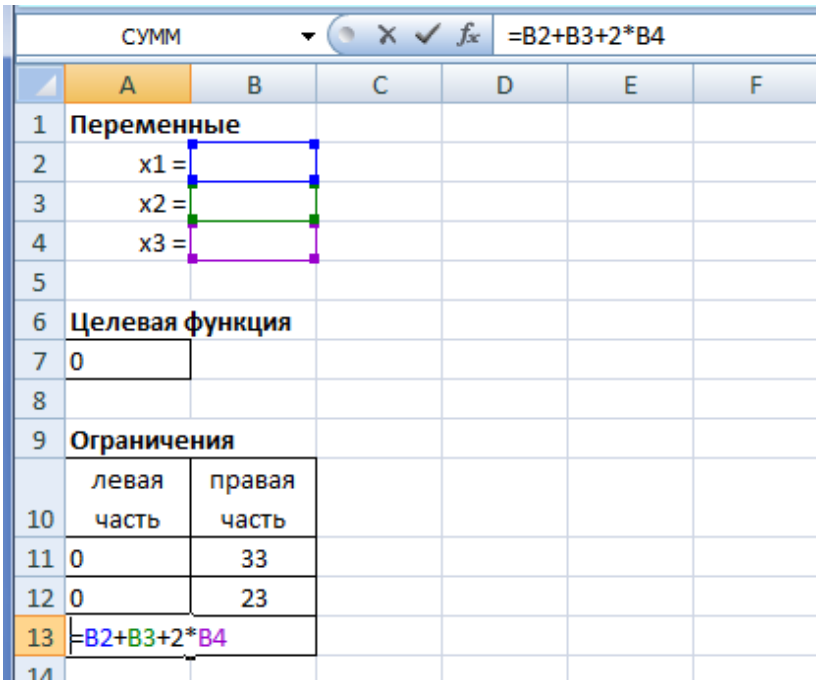

Рис. 17. Ввод третьего ограничения системы

4. Вызовем окно диалога «Поиск решения», при этом удобно, если активной ячейкой является ячейка со значением целевой функции (рис. 18).

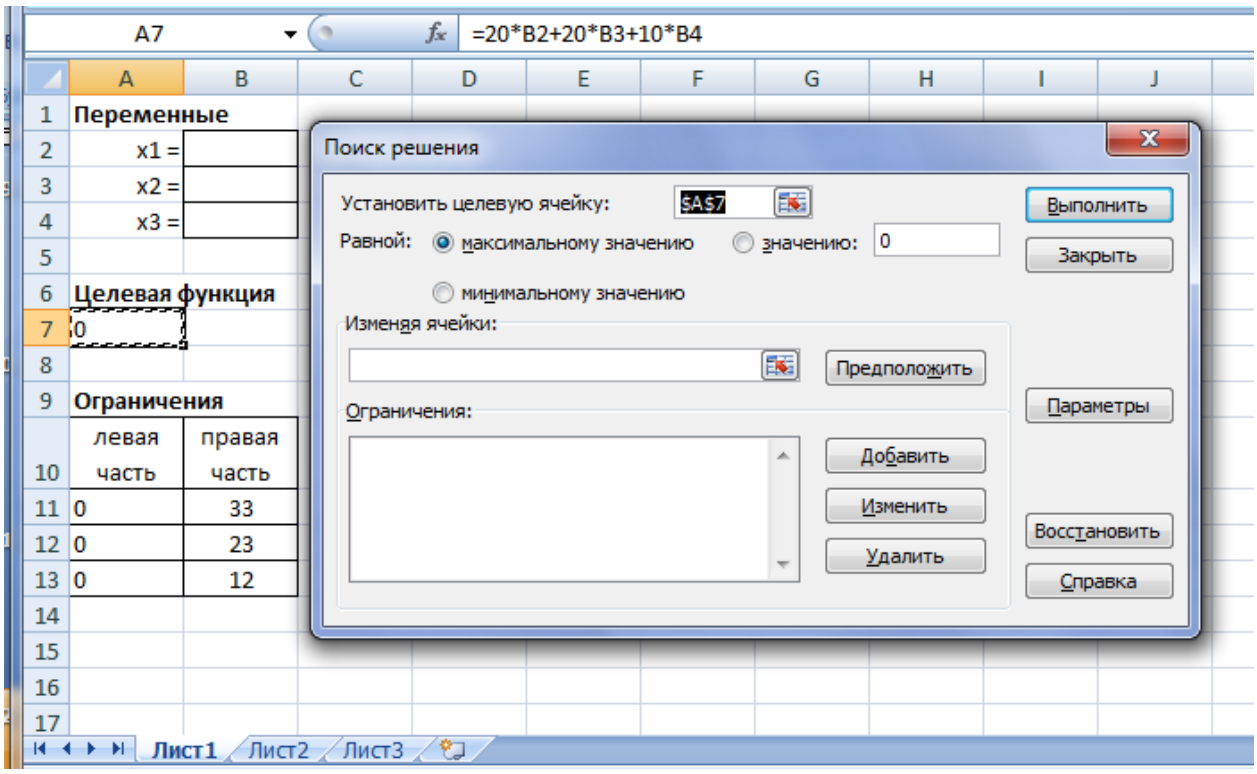

Рис. 18. Окно диалога «Поиск решения»

a) устанавливаем целевую ячейку **A7** (там, где вычисляется значение целевой функции;

b) указываем направление оптимизации – минимизация (по условию);

c) в поле «Изменяя ячейки» указываем ячейки переменных **B2:B4**;

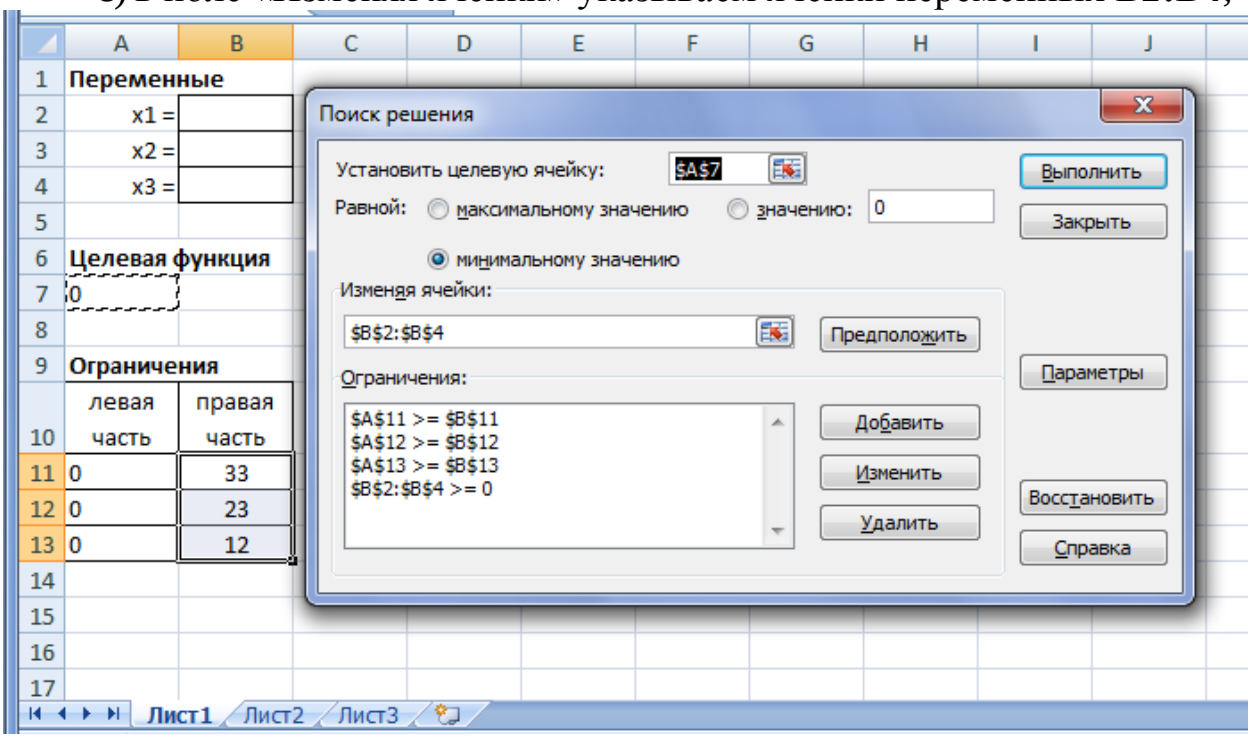

Рис. 19. Пример заполнения полей окна диалога «Поиск решения»

d) нажимаем кнопку «Добавить», после чего появляется окно «Добавление ограничения», где вводим ограничения (левые части ограничений, знаки неравенств и правые части ограничений);

e) после нажатия кнопки «Добавить», укажем ограничение неотрицательности переменных.

5. Нажимаем кнопку «Выполнить» для запуска процесса подбора значений x_1, x_2 и x_3. Результаты вычисления показаны на рисунке 20.

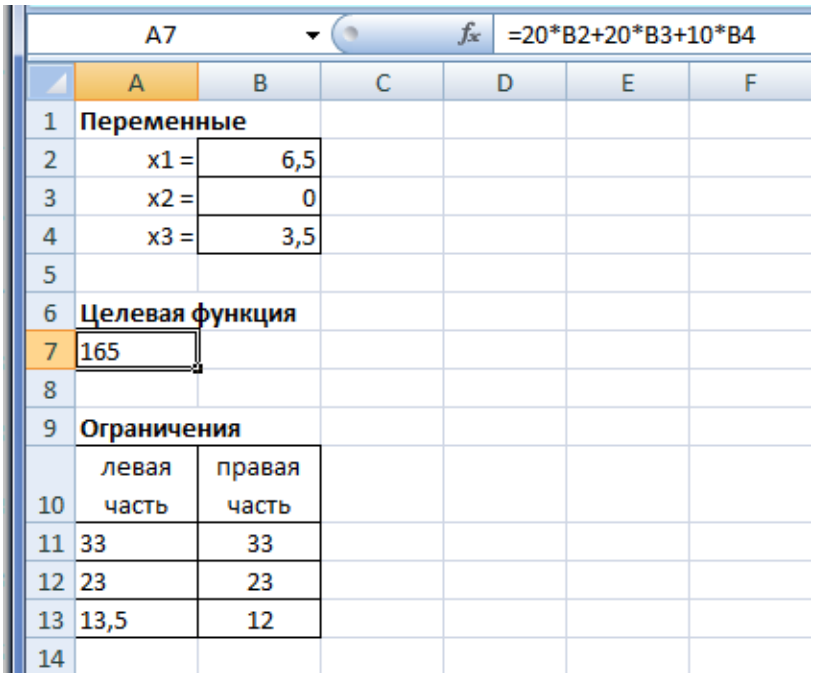

Рис. 20. Результаты вычисления, полученные с помощью надстройки «Поиск решения»

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Практическая работа 1
Сущность оптимизационных методов

В соответствии с номером варианта составить математическую модель задачи линейного программирования, дав экономическую интерпретацию переменным, целевой функции и системе ограничений. Записать модель в стандартной и канонической формах.

Вариант 1. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, цены изделий и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице 54.

Таблица 54

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
древесина первый вид, $м^3$	0,3	0,5	40
древесина второй вид, $м^3$	0,1	0,4	55
трудоемкость, чел.-час	1,2	1,6	480
Цена одного изделия, тыс. руб.	6,5	9,4	

Считая, что сбыт готовой продукции обеспечен, определить сколько столов и шкафов следует изготовить фабрике, чтобы доход от их реализации был максимальным.

Вариант 2. Составьте дешевый вариант 1 т кормовой смеси в соответствии с требованиями, представленными в таблице 55.

Таблица 55

Питательные вещества	Требования, % от веса	Содержание питательных веществ в кормах, %			
		люцерновая мука	сухая барда	рыбная мука	соевый шрот
белок	Не менее 35	17	25	60	45
жиры	Не менее 1,5	2	5	7	0,5
клетчатка	Не более 8	25	3	1	6,5
Вес	1 т	1	1	1	1
Стоимость, руб. за 1 кг		70	90	150	100

Вариант 3. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся во фруктах, в количествах, указанных в таблице 56.

Таблица 56

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, г
	клубника	яблоки	смородина	
p1	3	2	1	30
p2	1	3	4	70
p3	0	0	5	40
p4	1	0	1	50
Цена, руб. за 1 кг	1,0	0,5	0,8	

Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача с минимальными расходами.

Вариант 4. Сформируйте вариант образования бензина АИ-80 и АИ-95, который обеспечивает максимальный доход от продажи, если имеется 5 т смеси 1-го сорта и 30 т смеси 2-го сорта. На изготовление бензина АИ-80 идет 60% смеси 1-го сорта и 40% смеси 2-го сорта, на изготовление бензина АИ-95 идет 80% смеси 1-го сорта и 20% смеси 2-го сорта. Реализуется 1 т бензина АИ-80 за 5000 руб., а 1 т АИ-95 – за 6000 руб.

Вариант 5. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка «Колокольчик» и «Буратино». Для производства 1 л «Колокольчика» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для «Буратино» – 0,04 ч, а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг специального ингредиента и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи 1 л «Колокольчика» составляет 0,25 руб., а «Буратино» – 0,35 руб. Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

Вариант 6. Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа В – 2 чел.-ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной де-

тали типа В – 4 кг полимерного материала и 3 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала по 10 000 кг. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 1,1 руб. и 1,5 руб.

Вариант 7. Брокеру биржи клиент поручил разместить 100 000 долл. США на фондовом рынке, сформировать портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные годовые проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций – акций А, В, С, Д, которые позволяют получить доход в размерах соответственно 6%, 8%, 10% и 9% годовых от вложенной суммы. При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции А и В. С целью обеспечения ликвидности не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в акции Д. Учитывая прогноз на изменение ситуации в будущем, в акции С можно вложить не более 20% капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции А не менее 30% капитала. Определите распределение инвестиций капитала, обеспечивающего максимальный годовой процентный доход.

Вариант 8. Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице 57.

Таблица 57

	Судно	
	I	II
Пассажировместимость, чел.	2000	1000
Горючее, т	12000	7000
Экипаж, чел.	250	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 700 человек. Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн. руб., а II типа – 10 млн. руб. в месяц.

Вариант 9. В институте проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному студенту дано следующее поручение:

− купить акварельной краски по цене 30 д.е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д.е. за коробку, линейки по цене 12 д.е., блокноты по цене 10 д.е.;

− красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов – столько,
сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупки выделяется не более 300 д.е.

В каком количестве студент должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

Вариант 10. Планируется нанесение удара по некоторому объекту тремя различными видами оружия: оружием А – в течение 3 мин., оружием Б – в течение 5 мин., оружием В – в течение 4 мин. Возможности средств обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия А в течение 3 мин., оружия Б в течение 2 мин., оружия В в течение 4 мин. общее количество залпов не должно превышать 15. При применении оружия А в течение 2 мин. и оружия В в течение 3 мин. общее количество залпов не должно превышать 8 ед. Кроме того, для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов оружием В за 1 мин. было больше, чем 5 ед. Рассчитайте темп стрельбы (количество залпов в 1 мин.) всеми видами оружия, при котором общее количество залпов в ударе будет наибольшим.

Вариант 11. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Данные об организации перевозок представлены в таблице 58.

Таблица 58

Поезда	Количество вагонов в поезде				
	багажный	почтовый	плацкарт	купейный	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	–	8	4	1
число пассажиров	–	–	58	40	32
парк вагонов	12	8	81	70	26

Сколько должно быть сформировано скорых и пассажирских поездов, чтобы перевезти наибольшее количество пассажиров?

Вариант 12. При откорме каждое животное фермы должно получать не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в таблице 59.

Таблица 59

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	корма I	корма II
белки	3	1
углеводы	1	2
протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е. Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Вариант 13. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 12 ед., тяга – 80 ед. хозяйство производит четыре вида продукции П1, П2, П3 и П4. Организация производства характеризуется таблицей 60.

Таблица 60

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
П1	2	2	2	1
П2	3	1	3	4
П3	4	2	1	3
П4	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Вариант 14. Для производства двух сортов мороженого (сливочного и молочного) комбинат использует сахар и сливки. Нормы затрат этих продуктов, суточные запасы, а также цена реализации по каждому виду мороженого приведены в таблице 61.

Таблица 61

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на 1 кг мороженого		Общий запас продуктов
	молочное	сливочное	
сливки, кг	0,2	0,2	150
сахар, кг	0,3	0,4	280
трудоемкость, чел.-час	3	4	2100
Цена 1 кг мороженого, руб.	75	82	

Считая, что сбыт мороженого полностью обеспечен, определить, сколько сливочного и молочного мороженого должен выпустить в сутки комбинат, чтобы доход от реализации был максимальным.

Вариант 15. Исходя из специализации и своих технологических возможностей, предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества продукции обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице 62.

Таблица 62

Ресурсы	Виды продукции				Объем ресурсов
	П1	П2	П3	П4	
трудовые ресурсы, чел.-ч.	4	2	2	8	4800
полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2400
станочное оборудование, станко-ч.	1	0	20	1	1500
Цена ед. продукции, руб.	65	70	60	120	

Найти ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий предприятию максимум реализации.

Вариант 16. Цех выпускает изделия двух видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 часа, одной втулки – 2,4 часа. Валы предприятие реализует по цене 800 руб. за штуку, втулки – по цене 720 руб. Известно, что в сутки можно реализовать не более 250 валов и не более 340 втулок.

Определить суточную производственную программу цеха, обеспечивающую наибольший доход при условии, если фонд рабочего времени производственных рабочих составляет 900 чел.-час.

Вариант 17. Малое предприятие выпускает детали А, В и С. Для этого оно использует токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в таблице 63. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 63

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часы) на обработку одного изделия каждого вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (часы)
	А	В	С	
фрезерное	2	4	5	120
токарное	1	8	6	280
сварочное	7	4	5	240
шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Вариант 18. Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часов. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 часов. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений. Определить, в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу продукцию, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

Вариант 19. Для выпуска двух сортов теста кондитерская фабрика использует сахар, муку и яйца. Затраты этих ресурсов, а также затраты труда, общее количество имеющихся ресурсов и цены за 1 кг теста каждого сорта приведены в таблице 64.

Таблица 64

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на 1 кг теста		Общий запас ресурсов
	1-й сорт	2-й сорт	
яйца, шт.	5	3	1250
сахар, кг	0,4	0,38	86
мука, кг	0,8	1,2	875
трудоемкость, чел.-час	0,36	0,55	234
Цена 1 кг теста, руб.	62	54	

Считая, что сбыт полностью обеспечен, определить, сколько теста каждого сорта нужно производить кондитерской фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным.

Вариант 20. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя для этого телевидение, радио и газеты. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены суммой 8000 грн. в месяц. Опыт прошлых лет показал, что 1 грн., потраченная на телерекламу, дает фирме прибыль в размере 10 грн., а потраченная на рекламу по радио и в газетах – соответственно 4 и 8 грн. Фирма намерена затратить на теле- и радиорекламу не более 70% рекламного бюджета, а затраты на газетную рекламу не должны больше чем вдвое превышать затраты на радиорекламу. Определить такой вариант распределения рекламного бюджета по разным направлениям рекламы, который дает фирме наибольшую прибыль от рекламы своей продукции.

Вариант 21. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа – 5 тонн, проволоки – 28 тонн. На один трансформатор первого вида расходуются 5,4 кг железа и 3,1 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 4,3 кг железа и 1,2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 37 д.е., второго – 45 д.е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 22. Для производства «любительской» и «ливерной» колбас закуплены мясо, сало, ливер. Данные о запасах сырья, компонентах, необходимых для производства 10 кг колбасы каждого вида, прибыли от продажи приведены в таблице 65.

Таблица 65

Сырье	Запас сырья	Количество сырья, необходимое для производства 10 кг колбасы каждого вида	
		«любительская»	«ливерная»
мясо, кг	360	6	1
сало, кг	300	3	2
ливер, кг	100	1	7
Прибыль руб. на 10 кг		120	70

Определить план выпуска колбас, приносящий максимальную прибыль.

Вариант 23. Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок (I и II). Для производства кирпича применяется глина трех видов (A, B, C). По месячному плану завод должен выпустить 10 условных единиц кирпича марки I и 15 условных единиц кирпича марки II. В таблице 66 указаны расход различных видов глины для производства одной условной единицы кирпича каждой марки и месячный запас глины.

Сколько условных единиц кирпича различных марок должен выпустить завод сверх плана, чтобы обеспечить наибольшую прибыль, если известно, что от реализации 1 условной единицы кирпича марки I завод получает прибыль, равную 4 у.е., а от реализации кирпича марки II – 7 у.е.?

Таблица 66

Марка	Количество глины, необходимое для производства 1 условной единицы кирпича		
	A	B	C
I	1	0	1
II	0	2	2
Запас глины	15	36	47

Вариант 24. Компания извлекает из двух типов руды минералы А, В, С. Необходимо произвести не менее 3 тонн минерала А, не более 2 тонн минерала В и ровно 1 тонну минерала С. Данные о количестве минералов, извлекаемых из руды каждого типа, и стоимость руды приведены в таблице 67.

Таблица 67

Сырье	Количество руды, необходимое для производства	
	руда 1	руда 2
минерал А	100	200
минерал В	120	50
минерал С	200	100
Цена руб. за 1 кг	50	60

Сколько тонн руды каждого типа надо закупить, чтобы затраты оказались минимальными?

Вариант 25. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее 1 кг белка, не менее 100 г кальция и ровно 80 г фосфора. Данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и о себестоимости этих продуктов приведены в таблице 68.

Таблица 68

Сырье	Количество сырья, необходимое для производства	
	сено	силос
белок, г/кг	40	10
кальций, г/кг	1,25	2,5
фосфор, г/кг	2	1
Себестоимость руб. за 1 кг	1,2	0,8

Определить оптимальный рацион кормления при условии минимальной себестоимости.

Вариант 26. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10000 клеток. В одной клетке могут быть либо 2 лисицы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лис и 6000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма – 7 ед., а каждому песцу – 8 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200000 единиц корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 300 д.е., а от реализации одной шкурки песца – 250 д.е.

Какое количество лисиц и песцов нужно держать не ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

Вариант 27. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красители. В таблице 69 указаны мощности станков (тыс. станко-ч), ресурсы пряжи и красителей (тыс. кг), производительность станков по каждому виду ткани (м/ч), нормы расхода пряжи и краски (кг на 1000 м) и цена (у. е.) 1 м ткани.

Таблица 69

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и норма расхода ткани		
		первого	второго	третьего
Станки I типа	30	20	10	25
Станки II типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена		15	15	20

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 м ткани составляет соответственно 3, 5 и 15 у.е.

Вариант 28. Фирма изготовляет два вида красок для внутренних (В) и наружных (Н) работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в таблице 70.

Таблица 70

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 т краски		Суточный запас, т
	краска В	краска Н	
пигмент	3	2	57
олифа	5	7	82

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных и внутренних работ никогда не превышает 4 т в сутки. Цена продажи 1 т краски для наружных работ – 2 ден. ед., для внутренних работ – 8 ден. ед. Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Вариант 29. В производстве пользующихся спросом двух изделий, А и В, принимают участие 3 цеха фирмы. На изготовление одного изделия А 1-й цех затрачивает 10 ч, 2-й цех – 9 ч, 3-й цех – 3 ч. На изготовление одного изделия В 1-й цех затрачивает 18 ч, 2-й цех – 15 ч, 3-й цех – 1 ч. На производство обоих изделий 1-й цех может затратить не более 1238 ч, 2-й цех – не более 118 ч, 3-й цех – не более 523 ч. От реализации одного изделия А фирма получает доход 121 р., изделия В – 153 р. Определить максимальный доход от реализации всех изделий А и В.

Вариант 30. Научно-производственное объединение «Стрела» занимается изготовлением комплектующих изделий для предприятий военно-промышленного комплекса. При изготовлении изделий типа А и типа В используется сталь и цветные металлы. Технологический процесс также включает обработку изделий на токарных и фрезерных станках. По технологическим нормам на производство одного изделия типа А и одного изделия типа В требуется определенное количество сырья и некоторый объем станко-часов для обработки на станках в цеху. Технологические данные производственного процесса приведены в таблице 71.

Таблица 71

	Сырье, кг		Работа в цеху, станко-час	
	Цветные металлы	Сталь	Токарные работы	Фрезерные работы
Изделие А	10	20	70	150
Изделие В	60	50	40	200
Ресурсы	6000	5700	10500	30000

В течение месяца НПО «Стрела» располагает ограниченными ресурсами по сырью и по времени работы в производственных цехах. Прибыль от реализации одного изделия типа А составляет 60 руб., а от единицы изделия типа В – 160 руб.

Найти оптимальный план производства для НПО «Стрела» (количество изделий типа А и типа В), дающий наибольшую прибыль.

Практическая работа 2
Основы линейного программирования (каноническая форма)

Привести к канонической форме задачу линейного программирования. Данные по вариантам для решения задачи представлены в таблице 72.

Таблица 72

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
1	$F(x)=3x_1+x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=7\\x_1-x_2+2x_3\le 1\\2x_1+x_2-2x_3\ge 5\\x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\end{cases}$	11	$F(x)=2x_1+x_2-x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_2-x_3\le 5\\x_1+x_2-x_3\ge -1\\2x_1-x_2\le -3\\x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\end{cases}$
2	$F(x)=3x_1-2x_2-5x_4+x_5\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_3-x_4+x_5\le 2\\x_1+x_4-5x_5\ge 8\\x_1\le 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0\end{cases}$	12	$F(x)=x_1+6x_2+4x_4+2x_5\to\min$ $\begin{cases}x_1-5x_3-2x_4+x_5\le 8\\x_1+4x_2+4x_3-7x_5\ge 8\\x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\le 0,\ x_5\ge 0\end{cases}$
3	$F(x)=x_1-x_2+3x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3\le 5\\x_1+2x_3=8\\-x_1-2x_2\ge 1\\x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0\end{cases}$	13	$F(x)=-2x_1+2x_2-3x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4\ge 8\\3x_1-2x_2+x_3+3x_4\le 11\\-x_1+3x_2+4x_3-3x_4=12\\x_1\le 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\le 0\end{cases}$
4	$F(x)=x_1+x_2+4x_3+x_4+7x_5\to\max$ $\begin{cases}-x_1+5x_2+7x_3+x_4-2x_5\ge 16\\5x_1-7x_2-3x_3+2x_4+x_5=18\\x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0,\ x_4\le 0,\ x_5\ge 0\end{cases}$	14	$F(x)=x_1+2x_2+2x_4+x_5\to\max$ $\begin{cases}-3x_1+x_2+4x_3-2x_4\ge 6\\x_1-2x_2+3x_3+x_4+x_5=2\\x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0\end{cases}$
5	$F(x)=3x_1-7x_2-5x_4+2x_5\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_3+2x_4+x_5\le 3\\2x_2+x_3-x_4+2x_5\ge 6\\x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0\end{cases}$	15	$F(x)=2x_1-x_2+3x_3-2x_5\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4+x_5=5\\-2x_2+4x_3+4x_4\le 4\\x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\le 0,\ x_5\ge 0\end{cases}$
6	$F(x)=-x_1+2x_2-x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_4\le 6\\3x_1-x_2+2x_3+2x_4\le 10\\-x_1+3x_2+5x_3-3x_4=15\\x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0\end{cases}$	16	$F(x)=3x_1-2x_2-5x_4+x_5\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_3+x_4+x_5\le 2\\x_1-x_3+2x_4+x_5\le 3\\x_1-x_2+x_4-5x_5\ge 8\\x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\le 0\end{cases}$
7	$F(x)=2x_1-5x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3\ge 4\\2x_1-x_2+x_3\le 16\\3x_1+x_2+x_3\ge 18\\x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0\end{cases}$	17	$F(x)=-3x_1-5x_2-6x_3\to\min$ $\begin{cases}-4x_1+3x_2+8x_3\ge 15\\2x_1+5x_2-7x_3\le 12\\3x_1-2x_2+10x_3\le 17\\x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0\end{cases}$

Окончание табл. 72

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
8	$F(x)=2x_1+x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3\ge 4\\ x_1+x_2-3x_3\le 9\\ x_1+3x_2+2x_3=10\\ x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\end{cases}$	18	$F(x)=x_1-3x_2-5x_3+2x_5\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_3+x_4+x_5=2\\ x_3-x_4+2x_5\le 6\\ x_1-x_2+x_4-5x_5\ge 8\\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\le 0\end{cases}$
9	$F(x)=-2x_1+x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases}4x_1+2x_2+5x_3\le 12\\ 6x_1-3x_2+4x_3=18\\ 3x_1+3x_2-2x_3\ge 16\\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\le 0\end{cases}$	19	$F(x)=-2x_1-x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1-x_2+6x_3\le 12\\ 3x_1+5x_2-12x_3=14\\ -3x_1+6x_2+4x_3\le 18\\ x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\end{cases}$
10	$F(x)=-x_1+2x_2-x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_4\le 6\\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4\le 10\\ -x_1+3x_2+5x_3-3x_4=15\\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0\end{cases}$	20	$F(x)=-2x_1+6x_2-6x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4\ge 8\\ 2x_1+x_2+x_3-4x_4\le 10\\ -4x_1+x_2+2x_3-x_4=11\\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\le 0\end{cases}$

Практическая работа 3
Основы линейного программирования (графический метод)

Решить задачу линейного программирования графическим методом – найти наименьшее и наибольшее значения целевой функции. Составить двойственную задачу и решить ее графическим методом.

Целевая функция формируется по формуле:

$$F(x)=(10+a)x_1+(10+b)x_2$$

где a – первая цифра номера варианта;

b – вторая цифра номера варианта.

Ограничения представлены в таблице 73 по вариантам.

Таблица 73

№ варианта	Ограничения задачи	№ варианта	Ограничения задачи
1	$\begin{cases}13x_1+11x_2\le 156\\ 2x_1-x_2\le 12\\ x_1+2x_2\ge 4\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$	11	$\begin{cases}2x_1+5x_2\ge 10\\ 11x_1+9x_2\le 135\\ 2x_1-2x_2\le 5\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$

Продолжение табл. 73

№ варианта	Ограничения задачи	№ варианта	Ограничения задачи
2	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 9x_1 + 11x_2 \le 135 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 36 \\ 11x_1 + 14x_2 \le 143 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 36 \\ 10x_1 + 5x_2 \le 120 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 10x_1 - 12x_2 \le 124 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 36 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 52 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ 6x_1 - 5x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 24 \\ 6x_1 - 5x_2 \le 60 \\ x_1 + 5x_2 \le 80 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 25 \\ 8x_1 - 6x_2 \le 136 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 42 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 23 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 36 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 \le 35 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 7x_2 \le 75 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 8x_1 - 7x_2 \le 56 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 85 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \le 84 \\ x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 32 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \le 90 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 80 \\ x_1 + 2x_2 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 6x_1 + 11x_2 \le 156 \\ x_1 \ge 12 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 22 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 8x_1 + 11x_2 \le 144 \\ x_1 \ge 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le 121 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Окончание табл. 73

№ варианта	Ограничения задачи	№ варианта	Ограничения задачи
10	$\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le 121 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 13x_1 + 11x_2 \le 156 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Практическая работа 4
Симплекс-метод

Найти оптимальное значение целевой функции при имеющихся ограничениях (в соответствии с номером варианта) симплекс-методом.

Таблица 74

№ вари-ри-анта	Исходные данные	№ вари-ри-анта	Исходные данные
1	$F(x) = -11x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 9 \\ -2x_2 + 2x_4 \le 8 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 \le 15 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$	11	$F(x) = 90x_1 + 110x_2 + 150x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 36 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 25 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 22 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
2	$F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \le 16 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 18 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 24 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$	12	$F(x) = 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
3	$F(x) = 8x_1 + 7x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 12 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 \le 25 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$	13	$F(x) = x_1 + x_2 + 10x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 10x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 \le 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$

Продолжение табл. 74

№ вари-ри-анта	Исходные данные	№ вари-ри-анта	Исходные данные
4	$F(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 20 \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \le 25 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 \le 24 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$	14	$F(x) = 2x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
5	$F(x) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 34 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 28 \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le 24 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$	15	$F(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 20 \\ -2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
6	$F(x) = 4x_1 + x_2 - 6x_3 + 7x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 280 \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 80 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 250 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$	16	$F(x) = 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 \le 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 10 \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 50 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
7	$F(x) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 \le 12 \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 8 \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 49 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$	17	$F(x) = 11x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 9 \\ 2x_1 + 2x_4 \le 8 \\ -2x_3 - x_4 \le 15 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
8	$F(x) = 5x_1 + 10x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 40 \\ -2x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 100 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$	18	$F(x) = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \le 20 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$

Окончание табл. 74

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
9	$F(x) = -11x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 9 \\ 2x_1 + 2x_4 \le 8 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 \le 15 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$	19	$F(x) = 8x_1 + 9x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 \le 3 \\ 2x_2 - x_3 \le 9 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
10	$F(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$	20	$F(x) = 20x_1 + 15x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$

Практическая работа 5
Симплекс-метод (метод искусственного базиса)

Найти оптимальное значение целевой функции при имеющихся ограничениях (в соответствии с номером варианта) методом искусственного базиса с использованием симплекс-таблиц.

Таблица 75

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
1	$F(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$	11	$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 \ge 4 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
2	$F(x) = 8x_1 + 18x_2 + 6x_3 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 \le 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$	12	$F(x) = 3x_1 - x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 18 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$

Окончание табл. 75

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
3	$F(x)=6x_1+4x_2+20x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3\ge 3\\-3x_1+x_2+x_3\ge 5\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$	13	$F(x)=2x_1+2x_2-x_3-x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3\le 10\\x_1+x_2-x_3-x_4\ge 5\\4x_1+x_2-2x_4=8\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}\end{cases}$
4	$F(x)=3x_1+5x_2+4x_3\to\max$ $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3\le 10\\2x_1+5x_2+3x_3\le 8\\x_1+5x_2+4x_3\ge 7\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$	14	$F(x)=12x_1+27x_2+6x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3\ge 12\\x_1+5x_2+x_3\ge 15\\6x_1+4x_2+2x_3\le 24\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$
5	$F(x)=-x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+3x_2\ge 6\\-x_1+2x_2\le 1\\3x_1-x_2\ge 6\\x_1+x_2\le 5\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	15	$F(x)=3x_1-x_2\to\min$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 15\\4x_1-x_2\ge 20\\3x_1+x_2\ge 30\\x_1-2x_2\le 20\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
6	$F(x)=-3x_1+2x_2+2x_3-x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3-x_4\le 14\\x_1+4x_2-3x_3+2x_4=6\\x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 9\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}\end{cases}$	16	$F(x)=2x_1+x_2+3x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-2x_3\ge 9\\x_1+2x_2+4x_3+2x_4\ge 8\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}\end{cases}$
7	$F(x)=-6x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+x_2\ge 8\\-x_1+4x_2\le 10\\2x_1-7x_2\ge 3\\x_1+x_2\le 7\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	17	$F(x)=-6x_1+5x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1-7x_2\le 36\\x_1-x_2\ge 12\\5x_1+5x_2\ge 35\\x_1\le 14\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
8	$F(x)=-x_1+5x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3=15\\3x_1+3x_2+4x_3\le 45\\8x_2-6x_3\ge 24\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$	18	$F(x)=15x_1-10x_2+7x_3\to\min$ $\begin{cases}8x_1+2x_2+x_3\ge 3\\5x_1-7x_2\ge 1\\3x_1+7x_2+9x_3\le 36\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$

9	$F(x)=7x_1+5x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\ge 12\\3x_1+3x_2+5x_3\ge 15\\x_1+x_2-8x_3\ge 14\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$	19	$F(x)=2x_1+x_2+5x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+2x_2-2x_3\ge 8\\x_1+x_2+x_3+x_4\ge 5\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}\end{cases}$
10	$F(x)=-9x_1+8x_2-7x_3\to\max$ $\begin{cases}-4x_1+2x_2+5x_3\ge 20\\3x_1-5x_2+x_3\le 7\\2x_1+x_2=9\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$	20	$F(x)=x_1+3x_2-3x_3-4x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2-5x_3+x_4\le 15\\x_1+6x_2-8x_3-4x_4\ge 9\\4x_1-2x_2+x_3+8x_4=8\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}\end{cases}$

Практическая работа 6
Двойственность в линейном программировании

Решить задачу линейного программирования, используя составленную экономико-математическую модель, по варианту практической работы 1. Метод решения выбрать исходя из построенной экономико-математической модели. В процессе решения дать экономическую интерпретацию каждого шага.

Составить двойственную задачу. Используя теоремы двойственности, найти оптимальное решение двойственной задачи. Найдите интервалы устойчивости двойственных оценок.

Решить задачу с использованием надстройки «Поиск решения» электронных таблиц *Microsoft Excel*, сопроводив решение анализом полученного результата.

Практическая работа 7
Параметрическое программирование (параметр в целевой функции)

В соответствии с номером варианта решить задачу параметрического программирования с параметром в целевой функции, считая, что $-\infty<\lambda<\infty$.

Таблица 76

№ варианта	Исходные данные
1	$F(x)=6x_1+(4+\lambda)x_2+(12-\lambda)x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3\le 28\\-x_1+3x_2+x_3\le 20\\-0{,}5x_1+2x_2+x_3\le 24\\x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$

Продолжение табл. 76

№ варианта	Исходные данные
2	$F(x)=5x_1-(3+\lambda)x_2+(4+\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 \le 12 \\ 2x_1+x_2+x_3 \le 10 \\ 3x_1+2x_2+x_3 \le 24 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
3	$F(x)=-(1-\lambda)x_1+x_2-4x_3+(2-\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \le 2 \\ -2x_1+x_2-x_3 \le 1 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$
4	$F(x)=-2x_1+x_2-(2-\lambda)x_3+(2-\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} 7x_1+x_2+2x_3+x_4 \le 5 \\ -2x_1+2x_2-x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$
5	$F(x)=(6+\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 \le 18 \\ -x_1+3x_2+3x_3 \le 21 \\ -0{,}5x_1+2{,}5x_2+x_3 \le 25 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
6	$F(x)=5x_1-(3+\lambda)x_2+(5-\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3 \le 12 \\ 2x_1+x_2+5x_3 \le 15 \\ 3x_1+2x_2+4x_3 \le 22 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
7	$F(x)=2x_1+(6+\lambda)x_2+(10-\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3 \le 36 \\ -7x_1+3x_2+x_3 \le 27 \\ -5x_1+x_2+x_3 \le 14 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
8	$F(x)=-4x_1+(2-\lambda)x_2-x_3+(2+\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1+x_2+2x_3+2x_4 \le 5 \\ -2x_1+x_2-2x_3 \le 12 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$

9	$F(x) = -(2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 - x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
10	$F(x) = x_1 - 2x_2 - (4+\lambda)x_3 + (2+\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \le 52 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
11	$F(x) = (5-\lambda)x_1 + (3+\lambda)x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 18 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 12 \\ -0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \le 20 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
12	$F(x) = (3-\lambda)x_1 - x_2 + (6-\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 15 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 22 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 20 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
13	$F(x) = (1-\lambda)x_1 - (3+\lambda)x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 10 \\ 5x_1 + x_2 + 10x_3 \le 40 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 24 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
14	$F(x) = (1-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 + (2+\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 - x_4 \le 40 \\ -x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 24 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
15	$F(x) = -4x_1 + (5+\lambda)x_2 - x_3 + (5+\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - 52x_3 + x_4 \le 15 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$

Окончание табл. 76

№ варианта	Исходные данные
16	$F(x) = -x_1 - x_2 + (2+\lambda)x_3 - (1-\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_4 \le 9 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
17	$F(x) = -(2-\lambda)x_1 + (1+\lambda)x_2 - 4x_3 + (1+\lambda)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 12 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$
18	$F(x) = (2+\lambda)x_1 + (6+\lambda)x_2 + (4-\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 \le 35 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 9 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
19	$F(x) = -(5+\lambda)x_1 + (3+\lambda)x_2 + (3+\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 15 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 \le 25 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$
20	$F(x) = -(6-\lambda)x_1 + 6x_2 + (2-\lambda)x_3 \to \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + x_3 \le 52 \\ 6x_1 - 12x_2 - 2x_3 \le 64 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$

Практическая работа 8
Параметрическое программирование (параметр в правых частях ограничений)

В соответствии с номером варианта решить задачу параметрического программирования с параметром в правых частях ограничений, считая, что $-\infty < \lambda < \infty$.

Таблица 77

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
1	$F(x)=2x_1+5x_2\to\max$ $\begin{cases} x_1-2x_2\le 4+2\lambda \\ -2x_1+x_2\le 6+\lambda \\ 3x_1-x_2\le 8-3\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2} \end{cases}$	11	$F(x)=-2x_1+x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1-2\lambda \\ 2x_1-x_2\le 2+\lambda \\ 3x_1\le 3-\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
2	$F(x)=2x_1-4x_2\to\max$ $\begin{cases} x_1-x_2\le 12 \\ 2x_1+x_2\le 6+8\lambda \\ -x_1-2x_2\le 10+12\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2} \end{cases}$	12	$F(x)=2x_1-3x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 4+6\lambda \\ -x_1+3x_2\le 9-12\lambda \\ x_1-x_2\le 8+9\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
3	$F(x)=3x_1-2x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 12-\lambda \\ 2x_1-x_2\le 8+4\lambda \\ -2x_1+2x_2+x_3\le 10-6\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	13	$F(x)=3x_1-3x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\le 12-\lambda \\ x_1-x_2+2x_3\le 8+4\lambda \\ -2x_1+x_2\le 1-2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
4	$F(x)=3x_1+x_2+7x_3\to\min$ $\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3\le 1-\lambda \\ x_1+x_2-x_3\le 3-2\lambda \\ 3x_1+5x_2-4x_3\le 1+6\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	14	$F(x)=2x_1-x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3\le 9+2\lambda \\ 4x_1+x_2+4x_3\le 6+2\lambda \\ 5x_1+5x_2\le 2+2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
5	$F(x)=x_1+9x_2+3x_3\to\min$ $\begin{cases} 3x_1+3x_3\le 5-\lambda \\ x_2-x_3\le 1-\lambda \\ 9x_1+5x_2-3x_3\le 6+3\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	15	$F(x)=2x_1+x_2-4x_3\to\max$ $\begin{cases} 4x_1+x_2\le 10-2\lambda \\ 7x_1-7x_2+7x_3\le 14+4\lambda \\ -3x_1+x_3\le 6-2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
6	$F(x)=-x_1-5x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases} -x_1+5x_2\le 7+3\lambda \\ -8x_1+8x_2\le 4+3\lambda \\ 2x_1+x_3\le 1+\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	16	$F(x)=-x_1+6x_2-2x_3\to\min$ $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3\le 5-\lambda \\ x_1-8x_2+3x_3\le 3+5\lambda \\ -x_1+4x_3\le 1+2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$

Окончание табл. 77

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
7	$F(x)=5x_1-2x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases} x_2+x_3\le 2-\lambda \\ -x_1-x_2-x_3\le 8+\lambda \\ 4x_1+4x_2+2x_3\le 10-2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	17	$F(x)=-5x_1+2x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases} x_2-6x_3\le 6+2\lambda \\ 2x_1-2x_2+8x_3\le 6+4\lambda \\ -x_1+3x_2+3x_3\le 9-2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
8	$F(x)=-x_1+8x_2-8x_3\to\min$ $\begin{cases} -3x_1+3x_2+3x_3\le 9-3\lambda \\ x_1+2x_2+x_3\le -7+2\lambda \\ x_1+2x_3\le 10+2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	18	$F(x)=-x_1+2x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\le 4-\lambda \\ 3x_1-5x_2-x_3\le 5+\lambda \\ 5x_1+4x_2+10x_3\le 1+5\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
9	$F(x)=2x_1+9x_2-4x_3\to\max$ $\begin{cases} 2x_1+x_3\le 2-3\lambda \\ 8x_1+2x_2-x_3\le 8+4\lambda \\ -x_1-3x_2+x_3\le 6-\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	19	$F(x)=-x_1-x_2+7x_3\to\max$ $\begin{cases} 8x_1+2x_2+2x_3\le 2+\lambda \\ 2x_2+x_3\le 1-4\lambda \\ -2x_2+2x_3\le 1+2\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$
10	$F(x)=-x_1-7x_2+7x_3\to\min$ $\begin{cases} 2x_1+6x_2+x_3\le 1-2\lambda \\ x_1+3x_2-x_3\le 1+9\lambda \\ 2x_1-2x_2\le 12+6\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$	20	$F(x)=-x_1-x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases} -5x_1+5x_3\le 15-\lambda \\ 2x_1-7x_2+x_3\le 14-\lambda \\ 2x_1-4x_3\le 3+\lambda \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$

Практическая работа 9
Целочисленные задачи линейного программирования

Решить задачу целочисленного программирования (в соответствии с номером варианта) методом ветвей и границ.

Таблица 78

№ вари-анта	Исходные данные	№ вари-анта	Исходные данные
1	$F(x)=7x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}9x_1+4x_2\le 110\\11x_1-3x_2\le 24\\2x_1-7x_2\le 15\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	11	$F(x)=x_1-x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1-x_2\le 8\\-4x_1-2x_2\le 2\\3x_1\le 5\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
2	$F(x)=3x_1-x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_2\le 1\\4x_1+2x_2\le 4\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	12	$F(x)=x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+3x_2\le 1\\3x_1+x_2\le 4\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
3	$F(x)=2x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1+3x_2\le 6\\5x_1+x_2\le 9\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	13	$F(x)=15x_1+27x_2\to\max$ $\begin{cases}21x_1+40x_2\le 200\\x_1+x_2\le 38\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
4	$F(x)=3x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+3x_2\le 26\\7x_1+x_2\le 15\\2x_1-x_2\le 10\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	14	$F(x)=3x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}15x_1-7x_2\le 40\\3x_1+x_2\le 9\\3x_1+13x_2\le 7\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
5	$F(x)=21x_1+20x_2\to\max$ $\begin{cases}-25x_1+27x_2\ge 20\\x_1+x_2\le 38\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	15	$F(x)=7x_1-x_2\to\min$ $\begin{cases}5x_1+x_2\le 4\\5x_1-3x_2\le 6\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
6	$F(x)=2x_1\to\max$ $\begin{cases}3x_1+x_2\le 6\\5x_1-x_2\le 9\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	16	$F(x)=5x_1-3x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1-3x_2\le 2\\5x_1+x_2\le 6\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
7	$F(x)=3x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 8\\x_1+4x_2\le 10\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	17	$F(x)=2x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+7x_2\le 35\\4x_1+9x_2\le 36\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$

Окончание табл. 78

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
8	$F(x)=11x_1+5x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 11\\2x_1\le 5\\3x_1+3x_2\le 13\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	18	$F(x)=15x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}4x_1+5x_2\le 10\\x_1+2x_2\le 12\\3x_1+x_2\le 16\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
9	$F(x)=-4x_1-3x_2\to\min$ $\begin{cases}4x_1+x_2\le 44\\x_1-6x_2\le 22\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	19	$F(x)=6x_1+10x_2\to\max$ $\begin{cases}15x_1+8x_2\le 38\\2x_1+4x_2\le 36\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$
10	$F(x)=x_1+6x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+5x_2\le 15\\3x_1+3x_2\le 6\\2x_1+3x_2\le 18\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$	20	$F(x)=x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1-2x_2\ge 1\\2x_1+x_2\le 6\\2x_2+3x_3\le 12\\x_j\ge 0,\ x_j-\text{целые},\ j=\overline{1,2}\end{cases}$

Практическая работа 10
Динамическое программирование (оптимальная стратегия замены оборудования)

Решить задачу (в соответствии с номером варианта) методом динамического программирования.

Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: $P = 20$, $c(t) = 10$, $f(t) = r(t) - u(t)$, представленных в таблице 79.

Таблица 79

№ варианта	Исходные данные											
	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$f(t)$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
2	$f(t)$	12	10	9	8	6	5	4	3	2	1	0
3	$f(t)$	15	14	13	10	8	6	5	4	2	1	0
4	$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
5	$f(t)$	12	11	10	8	7	5	4	3	2	1	0
6	$f(t)$	11	10	9	8	7	6	5	4	2	0	0
7	$f(t)$	11	10	9	8	7	6	5	3	1	0	0
8	$f(t)$	10	9	8	7	5	4	3	2	1	0	0

Окончание табл. 79

№ варианта	Исходные данные											
	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	$f(t)$	15	14	11	9	7	6	5	4	2	1	0
10	$f(t)$	11	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
11	$f(t)$	16	14	12	10	8	6	4	2	1	1	0
12	$f(t)$	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0
13	$f(t)$	17	16	15	14	13	12	9	6	3	2	0
14	$f(t)$	16	15	14	13	10	7	4	3	2	1	0
15	$f(t)$	15	13	11	9	8	7	6	5	3	1	0
16	$f(t)$	15	14	13	11	9	6	3	2	1	0	0
17	$f(t)$	14	12	11	9	6	3	2	1	0	0	0
18	$f(t)$	14	13	12	11	10	8	6	4	2	1	0
19	$f(t)$	19	18	17	14	11	8	5	2	1	0	0
20	$f(t)$	18	16	15	14	12	10	7	4	1	0	0

Практическая работа 11
Динамическое программирование (оптимальное распределение ресурсов)

Решить задачу (в соответствии с номером варианта) методом динамического программирования.

Для увеличения объемов выпуска продукции, пользующейся повышенным спросом, изготовляемой предприятиями, выделены капитальные вложения в объеме S (инвестирование средств происходит в 5 этапов). Использование i-м предприятием x_i тыс. руб. из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемый значением функции $f_i(x_i)$. Составить оптимальный план распределения капиталовложений между четырьмя предприятиями при исходных данных, приведенных по вариантам в таблице 80.

Таблица 80

№ варианта	Исходные данные				
	Выделяемые средства, тыс. руб.	Прирост выпуска продукции, тыс. руб.			
		Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4
1	100	6	10	10	9
		12	20	20	21
		21	30	27	29
		30	38	38	37
		42	45	51	49

Продолжение табл. 80

№ варианта	Исходные данные				
	Выделяемые средства, тыс. руб.	Прирост выпуска продукции, тыс. руб.			
		Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4
2	150	8	8	10	9
		14	20	22	20
		23	32	27	30
		30	38	37	37
		44	46	53	50
3	120	6	8	9	11
		14	21	21	23
		25	32	25	27
		28	37	39	33
		40	43	50	48
4	110	9	9	11	9
		12	20	23	20
		25	32	27	31
		30	36	37	38
		44	44	53	51
5	140	8	9	10	8
		15	22	22	21
		24	32	28	31
		31	38	33	36
		46	49	50	46
6	130	8	9	10	9
		15	21	22	22
		22	33	29	33
		30	38	37	37
		43	46	54	48
7	160	7	9	11	10
		10	12	20	22
		20	25	29	26
		28	31	35	37
		35	41	44	53
8	200	8	9	10	10
		20	20	15	18
		32	30	24	25
		38	37	30	29
		46	50	48	41

Продолжение табл. 80

№ варианта	Исходные данные				
	Выделяемые средства, тыс. руб.	Прирост выпуска продукции, тыс. руб.			
		Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4
9	250	10	8	10	9
		22	20	20	22
		27	30	27	32
		37	36	38	38
		53	45	51	49
10	240	9	9	6	11
		14	20	12	23
		23	30	21	27
		30	37	30	33
		44	50	42	48
11	180	10	11	10	11
		22	23	21	21
		28	27	25	27
		33	37	39	31
		50	53	50	48
12	210	11	8	9	8
		23	15	12	21
		27	24	25	32
		37	31	30	37
		53	46	44	43
13	220	6	10	8	7
		12	22	20	10
		20	28	32	25
		30	31	37	29
		40	50	43	35
14	300	7	8	10	9
		20	20	23	15
		30	35	26	29
		38	40	38	37
		42	46	53	45
15	350	9	7	11	15
		14	20	22	24
		28	31	32	38
		37	38	40	45
		45	43	49	51

Окончание табл. 80

№ варианта	Исходные данные				
	Выделяемые средства, тыс. руб.	Прирост выпуска продукции, тыс. руб.			
		Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4
15	350	9	7	11	15
		14	20	22	24
		28	31	32	38
		37	38	40	45
		45	43	49	51
16	340	12	6	7	8
		25	19	19	18
		39	31	22	28
		46	43	30	34
		53	50	49	48
17	260	8	9	8	11
		18	20	15	20
		28	30	24	29
		34	37	31	35
		48	50	46	44
18	280	6	10	7	11
		12	15	19	23
		21	24	22	27
		30	30	30	37
		42	48	49	53
19	310	7	6	9	11
		10	19	12	23
		25	31	25	27
		29	43	31	33
		35	50	41	48
20	400	9	8	7	9
		14	20	20	15
		23	32	31	29
		30	37	38	37
		44	43	43	45

Практическая работа 12
Транспортные задачи (определение первоначального опорного плана)

Определить опорный план методами северо-западного угла и наименьшей стоимости. Вычислить значение целевой функции. Данные для расчетов представлены по вариантам в таблице 81.

Таблица 81

№ варианта	Запасы на трех складах, ед.	Потребности четырех потребителей, ед.	Тарифы перевозки за единицу продукции, д.е.			
1	150 130 190	120 80 150 120	7 4 9	8 5 10	1 6 8	1 8 6
2	160 120 200	120 100 160 100	7 4 9	8 5 10	1 6 8	1 8 6
3	250 350 310	80 210 340 280	7 4 9	8 5 10	1 6 8	1 8 6
4	150 130 190	120 80 150 120	7 4 9	8 6 8	1 9 9	2 8 6
5	250 350 310	80 210 340 280	7 4 9	8 6 8	1 9 9	2 8 6
6	240 230 150	30 50 280 260	7 4 9	8 6 8	1 9 9	2 8 6
7	250 350 310	80 210 340 280	7 4 9	8 6 8	1 9 6	1 8 6
8	240 230 150	30 50 280 260	7 4 9	8 6 8	1 9 6	1 8 6
9	250 200 130	40 60 250 230	7 4 9	8 6 8	1 9 6	1 8 6

Окончание табл. 81

№ варианта	Запасы на трех складах, ед.	Потребности четырех потребителей, ед.	Тарифы перевозки за единицу продукции, д.е.			
10	240 230 150	30 50 280 260	7 4 9	8 5 9	1 9 6	2 8 5
11	250 350 310	80 210 340 280	7 4 9	8 5 9	1 9 6	2 8 5
12	250 200 130	40 60 250 230	7 4 9	8 5 9	1 9 6	2 8 5
13	240 330 150	230 190 240 60	7 3 9	8 4 9	1 5 8	2 7 6
14	250 320 150	210 190 260 60	7 3 9	8 4 9	1 5 8	2 7 6
15	240 230 150	30 50 280 260	7 3 9	8 4 9	1 5 8	2 7 6
16	240 230 150	30 50 280 260	8 5 10	9 6 10	2 7 9	2 9 7
17	240 330 150	230 190 240 60	8 5 10	9 6 10	2 7 9	2 9 7
18	250 320 150	210 190 260 60	8 5 10	9 6 10	2 7 9	2 9 7
19	240 230 150	30 50 280 260	8 4 10	9 6 9	2 10 10	1 9 5
20	150 130 190	120 80 150 120	8 4 10	9 6 9	2 10 10	1 9 5

Практическая работа 13
Транспортные задачи (определение оптимального плана)

В соответствии с номером варианта решить транспортную задачу методом потенциалов и найти оптимальное значение целевой функции. Для расчета использовать первоначальный опорный план, составленный по методу северо-западного угла на основе данных практической работы 12.

Практическая работа 14
Использование MS Excel при решении задач линейного программирования

В соответствии с номером варианта найти оптимальное значение целевых функций, указанных в задачах практических работ 3, 4, 5, 9, 13, с использованием надстройки «Поиск решения» электронных таблиц *Microsoft Excel*.

Практическая работа 15
Элементы теории игр (игры в чистых стратегиях)

Матричная игра задана платежной матрицей. Определить нижнюю и верхнюю цены игры. Определить седловую точку, если она есть. Данные для расчетов представлены по вариантам в таблице 82.

Таблица 82

№ варианта	Платежная матрица	№ варианта	Платежная матрица
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & -5 \\ -1 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 11 & -5 \\ -1 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \\ 11 & 10 & 8 & 8 \\ -4 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 10 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \\ 11 & 10 & 7 & 7 \\ -4 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 9 \\ 7 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 3 & 10 \\ 5 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & 10 \\ 5 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 82

№ варианта	Платежная матрица	№ варианта	Платежная матрица
4	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -7 & 5 & 11 \\ -4 & 0 & 9 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 10 & 12 & 9 \\ 2 & 15 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -7 & 5 & 11 \\ -4 & 0 & 9 & 10 & 12 \\ 8 & 8 & 15 & 11 & 9 \\ 2 & 15 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & -9 & 8 \\ 8 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 13 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & -9 & 9 \\ 8 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 13 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 8 & 2 \\ -4 & 8 & 11 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 8 & 2 \\ -4 & 8 & 11 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & 2 \\ 8 & 9 & 11 & 11 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 20 & 4 \\ 11 & -9 & 9 & -9 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ -5 & 8 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 20 & 5 \\ 12 & -9 & 9 & -9 & 0 \\ 9 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ -5 & 8 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 14 & -8 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 6 \\ 9 & 17 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 15 & -8 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & 6 \\ 9 & 20 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 8 & 8 \\ 9 & 7 & 14 & -6 \\ 9 & 13 & 10 & 8 \\ -7 & 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 8 & 8 \\ 9 & 7 & 14 & -6 \\ 9 & 10 & 10 & 9 \\ -5 & 9 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & -5 \\ 3 & 7 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 12 & 4 & -5 \\ 3 & 7 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & -5 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

Практическая работа 16
Элементы теории игр (игры в игр в смешанных стратегиях)

Матричная игра задана платежной матрицей 2×2. Проверить матрицу на отсутствие седловой точки. Определить оптимальные смешанные стратегии обоих игроков и цену игры. Данные для расчетов представлены по вариантам в таблице 83.

Таблица 83

№ варианта	Платежная матрица	№ варианта	Платежная матрица
1	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

Практическая работа 17
Элементы теории игр (игры с природой)

Возможно строительство четырех типов электростанций: А1 (тепловых), А2 (приплотинных), А3 (безшлюзовых), А4 (шлюзовых). Состояния природы обозначим через Р1, Р2, Р3, Р4. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей по вариантам (таблица 84). Дать рекомендации, какую электростанцию строить согласно критериям: Вальда, Севиджа, Лапласа, Гурвица (при $\lambda = 0{,}5$).

Таблица 84

№ варианта	Платежная матрица	№ варианта	Платежная матрица
1	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 6 \\ 8 & 11 & 4 & 8 \\ 9 & 10 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 11 \\ 1 & 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 8 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 11 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 12 & 7 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 & 11 \\ 3 & 3 & 5 & 12 \\ 8 & 6 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 7 \\ 6 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 8 \\ 10 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 6 \\ 2 & 13 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 12 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 11 & 8 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 4 & 3 \\ 8 & 12 & 9 & 4 \\ 12 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 7 & 5 & 14 & 10 \\ 11 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 1 \\ 8 & 10 & 8 & 3 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 8 & 11 & 8 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & 12 & 9 & 8 \\ 4 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 12 & 3 \\ 11 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие оптимизационной задачи.
2. Параметры модели экстремальной задачи.
3. Что называется оптимальным решением задачи линейного программирования?
4. Какие случаи возможны при решении задачи линейного программирования?
5. Общий вид задачи линейного программирования.
6. Дайте определение для следующих понятий: опорный план, оптимальный план.
7. Каноническая форма задачи линейного программирования.
8. Чем отличается общая задача линейного программирования от канонической?
9. Правила приведения задачи линейного программирования к каноническому виду.
10. Как сводится задача минимизации целевой функции к задаче максимизации?
11. Какова геометрическая интерпретация решения линейных неравенств с одной, двумя, тремя переменными?
12. При каких условиях делается вывод о неограниченности целевой функции в задаче, решаемой графическим методом?
13. Что называется допустимым решением и областью допустимых решений задачи линейного программирования?
14. Какова геометрическая интерпретация решения системы линейных неравенств с двумя переменными?
15. Постройте линию уровня целевой функции, соответствующую выбранному значению.
16. Чем определяется направление скорейшего возрастания целевой функции?
17. В чем заключается идея симплекс-метода?
18. В каком виде должна быть записана модель задачи линейного программирования для решения симплекс-методом?
19. Базисные и свободные переменные в симплекс-методе.
20. Как построить первое базисное решение?
21. В каком случае оно будет опорным решением задачи линейного программирования?
22. Из каких этапов состоит переход от одного опорного решения к другому?
23. Как определить, какой из столбцов выбирается за ключевой в симплекс-преобразованиях?

24. Как определить, какая из строк выбирается за ключевую в симплекс-преобразованиях?

25. Какой элемент симплекс-таблицы называется «решающим»?

26. В чем заключается правило прямоугольников, используемое при переходе от одного опорного решения к другому?

27. Что является критерием оптимальности решения задачи линейного программирования в симплекс-методе?

28. Как определяется текущее значение целевой функции из таблицы?

29. В чем отличия метода искусственных переменных (М-метода) от стандартного симплекс-метода?

30. Понятие двойственности в линейном программировании.

31. Запишите математические модели пары двойственных задач линейного программирования.

32. Дайте экономическую интерпретацию пары двойственных задач.

33. Двойственная задача об использовании ресурсов.

34. Сформулируйте правила построения двойственной задачи к исходной.

35. Алгоритм составления двойственной задачи.

36. Сформулируйте первую теорему двойственности и дайте экономическую интерпретацию.

37. Сформулируйте и дайте экономическую интерпретацию второй теоремы двойственности.

38. Экономическая интерпретация двойственной задачи.

39. Свойства взаимно двойственных задач.

40. Перечислите свойства двойственных оценок. В чем заключается их экономический смысл?

41. Линейное программирование с параметром в целевой функции.

42. Линейное программирование с параметром в правых частях ограничений.

43. Понятие полностью целочисленной и частично-целочисленной задачи линейного программирования.

44. Математическая модель задачи целочисленного линейного программирования.

45. Графический метод решения целочисленных задач линейного программирования.

46. Метод ветвей и границ при решении линейных целочисленных задач.

47. Понятие динамического программирования.

48. Принцип оптимальности Беллмана.

49. Принцип вложения в динамическом программировании.

50. Особенности задач динамического программирования.

51. Оптимальная стратегия замены оборудования методом динамического программирования.

52. Оптимальное распределение ресурсов методом динамического программирования.

53. Транспортные задачи в линейном программировании, основные понятия.

54. Постановка транспортной задачи.

55. Закрытые и открытые транспортные задачи.

56. Математическая модель транспортной задачи.

57. Определение опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла.

58. Определение опорного плана транспортной задачи методом наименьшей стоимости.

59. Решение транспортной задачи методом потенциалов: вырожденный и невырожденный опорный план.

60. Решение транспортной задачи методом потенциалов: расчет потенциалов, проверка опорного плана на оптимальность.

61. Решение транспортной задачи методом потенциалов: контур перераспределения ресурсов, правила его построения.

62. Основные понятия теории игр: игра, партия, стратегия, оптимальная стратегия, ход.

63. Классификации видов игр.

64. Решение матричной игры в чистых стратегиях.

65. Понятие смешанных стратегий в матричной игре и условие их оптимальности.

66. Решение матричной игры в смешанных стратегиях.

67. Критерий принятия решений в условиях неопределенности Лапласа.

68. Минимаксный критерий принятия решений в условиях неопределенности.

69. Критерий принятия решений в условиях неопределенности Сэвиджа.

70. Критерий принятия решений в условиях неопределенности Гурвица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 5. С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани. Алгоритмы. Пер. с англ. под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2014. – 320 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 352с.
3. Аттетков А.В., Галкин С.В.; Зарубин В.С. Методы оптимизации. Учебник для ВУЗов под ред. Зарубина В.С. М.: МГТУ, 2001. – 440с.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. Учебное пособие. М.: Финансы и статистика, 2008. – 432с.
5. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование. Учебник под ред. проф. Б.А. Суслакова. Рекомендован УМО. М.: Дашков и К, 2008; 2010. – 424с.
6. Методы оптимальных решений в экономике и финансах. Учебник / Под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. М.: КНОРУС, 2014. – 809 с.
7. Минюк С. А. Математические методы и модели в экономике. Учебное пособие / Минюк С. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К. Мн.: Тетра-Системс, 2002. – 432с.
8. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие. Рекомендовано УМО. М.: Высшая школа, 2002. – 544с.
9. Пантелеев, А.В. Оптимальное управление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. М.: МАИ, 2012. - 212 с.
10. Пинегина М.В. Математические методы и модели в экономике. М.: Экзамен. 2002. – 128с.
11. Соловьев В. И. Методы оптимальных решений. Учебное пособие. М.: Финансовый университет, 2012. – 364с.
12. Сухарев А.Г., Тимохов А.В. Курс методов оптимизации. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2008. – 368с.
13. Фролькис В.А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. СПб.: Питер, 2002. – 320с.
14. Шелобаев С.И. Экономико-математические методы и модели. Учебное пособие. Рекомендовано МО РФ. М.: ЮНИТИ, 2005. – 287с.