

2МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Р.Е.  
АЛЕКСЕЕВА»  
АРЗАМАССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

по дисциплине

### **Основы электротехники**

Направление подготовки

11.03.03 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств

Направленность

Проектирование и технология радиоэлектронных средств

ФГОС ВО 3++ по направлению подготовки утвержден приказом  
Минобрнауки России от «19» сентября 2017 г. № 926

Квалификация (степень) «бакалавр»

Рассмотрено на заседании кафедры  
«Конструирование и технология  
радиоэлектронных средств»  
АПИ НГТУ  
«25» мая 2021 г.  
протокол №6

Арзамас 2021

## **ВВЕДЕНИЕ**

Настоящие «Методические указания для практических работ по курсу «Основы электротехники» предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Конструирование и технология электронных средств».

Подробно рассмотрены задачи на комплексный метод расчета разветвленных электрических цепей, на резонанс напряжений, на определение параметров четырехполюсника, на переходные процессы в цепях второго порядка.

# I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

## 1. Методы расчета сложных электрических цепей

Метод эквивалентного генератора применяется для определения тока в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи.

*Теорема об эквивалентном генераторе.*

По отношению к выделенной ветви  $ab$  вся остальная часть сложной электрической цепи (активный двухполюсник) может быть заменена эквивалентным генератором, Э.Д.С. которого равна напряжению на разомкнутых зажимах  $ab$  ( $\dot{U}_{abxx}$ ), а внутреннее сопротивление сопротивлению пассивного двухполюсника со стороны зажимов  $ab$  ( $Z_{вх}$ ) (рис. 1.1).

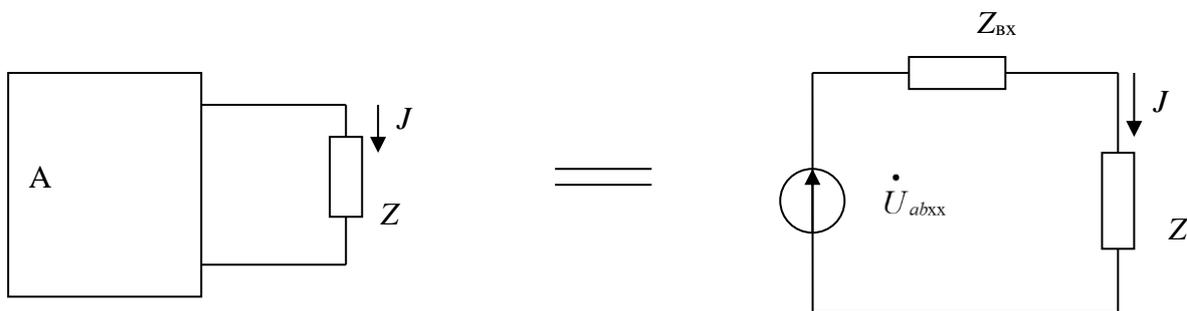


Рис. 1.1

Ток в искомой ветви, имеющей сопротивление  $Z$ , определяется по закону Ома:

$$\dot{J} = \frac{\dot{U}_{abxx}}{Z_{вх} + Z}$$

## 2. Последовательное соединение в цепях синусоидального тока

2.1. Мгновенное значение тока или напряжения, синусоидально и меняющихся с течением времени можно написать в виде:

$$u = U_{\max} \sin(\omega t + \psi_u), \quad i = J_{\max} \sin(\omega t + \psi_i)$$

или

$$u = U_{\max} \cos(\omega t + \psi_u), \quad i = J_{\max} \cos(\omega t + \psi_i),$$

где  $U_{\max}, J_{\max}$  – амплитуда (максимальное значение);

$\omega t + \psi$  – фаза колебаний;

$\psi$  – начальная фаза;

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота;

$\phi = \psi_u - \psi_i$  – сдвиг фаз (разность фаз, фазовый сдвиг), для любой цепи определяется как

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R},$$

где  $X$  – реактивное сопротивление цепи;

$R$  – активное.

2.2. Действующие значения синусоидально изменяющихся тока, Э.Д.С. и напряжения соответственно равны:

$$J = \frac{J_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{J_{\max}}{1,41} = 0,707 J_{\max}, \quad E = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

2.3. Второй закон Кирхгофа записывается для любого замкнутого контура цепи, для мгновенных или комплексных действующих значений токов и напряжений. При последовательном соединении  $R, L, C$ :

$$u = u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R \dot{J} + j\omega L \cdot \dot{J} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{J}.$$

2.4. Из последнего соотношения можно получить сопротивление цепи  $R, L, C$ :

$$\dot{U} = \dot{J} \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{J} \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{J} \cdot Z,$$

где  $Z = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX$  – комплексное сопротивление цепи.

Модуль комплексного сопротивления называется полным сопротивлением  $z = \sqrt{R^2 + X^2}$  и определяет величину, которая связывает действующие значения тока и напряжения в цепи:

$$J = \frac{U}{z}, \quad U = z \cdot J \text{ (закон Ома).}$$

Таким образом  $Z = z \cdot e^{j\varphi}$ .

2.5. Векторная диаграмма представляется как совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся величины одной частоты с учетом фазового сдвига.

Так как напряжение на сопротивление совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на угол  $\pi/2$ , а напряжение на емкости отстает по фазе от тока на угол  $\pi/2$ , то векторная диаграмма для последовательного соединения  $R, L, C$  будет:

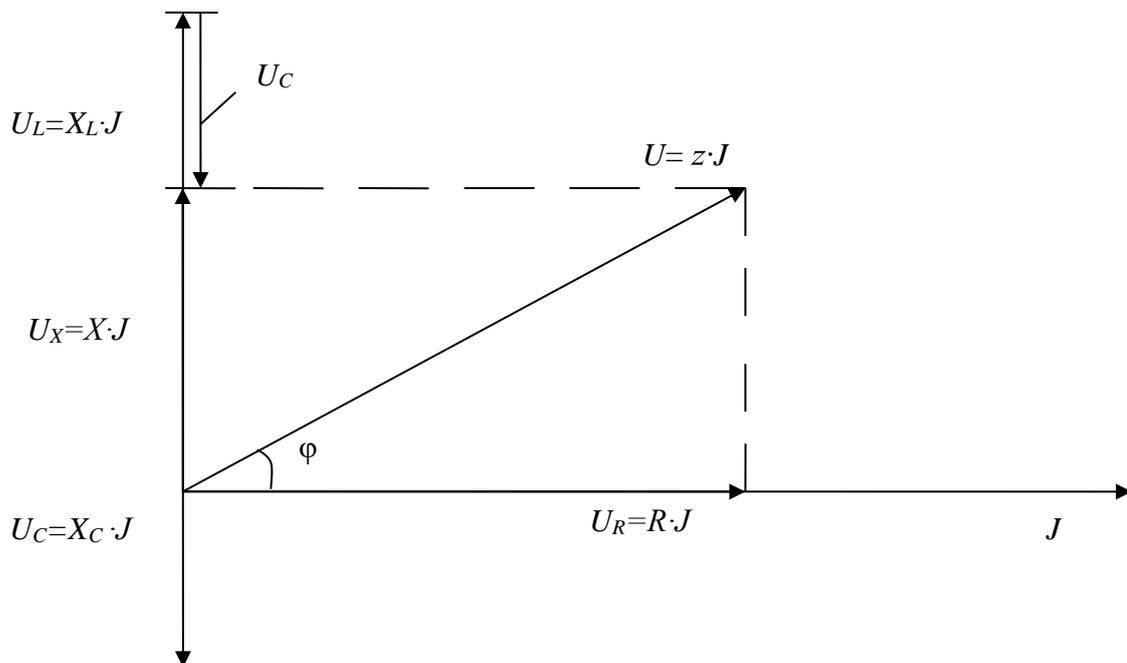


Рис. 2.1

После сокращения каждого вектора на ток  $J$  получим треугольник сопротивлений

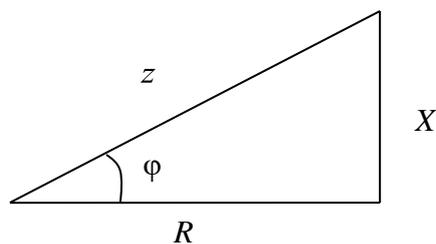


Рис. 2.2

2.6. Активная, реактивная и полная мощности определяются по следующим формулам:

$$P = RJ^2 = U \cdot J \cos \varphi, \text{ Вт};$$

$$Q = XJ^2 = U \cdot J \sin \varphi, \text{ ВАр};$$

$$S = zJ^2 = U \cdot J = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ ВА}.$$

2.7. Для любой цепи должен соблюдаться баланс мощностей: мощность (активная, реактивная), генерируемая источниками, равна мощности, потребляемой цепью:

$$\dot{S}_{\text{ист}} = \dot{U} J^* = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}},$$

$$P_{\text{потр}} = \sum_k R_k \cdot J_k^2, \quad Q_{\text{потр}} = \sum_k X_k \cdot J_k^2,$$

где  $J^*$  – ток, комплексно сопряженный исходному.

### 3. Параллельное соединение в цепях синусоидального тока

3.1. Для разветвленных цепей справедлив первый закон Кирхгофа, который записывается для мгновенных или комплексных действующих значений. Для параллельного соединения  $R, L, C$ :

$$i = i_R + i_L + i_C = g \cdot u + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + C \frac{du}{dt},$$

$$\dot{J} = \dot{J}_R + \dot{J}_L + \dot{J}_C = g \cdot \dot{U} + \frac{1}{j\omega L} \dot{U} + j\omega C \cdot \dot{U}.$$

3.2. Из 1-ого закона Кирхгофа в комплексной форме можно получить проводимость цепи  $R, L, C$ :

$$\dot{J} = \dot{U} \left( g + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U} \left[ g - j \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] = \dot{U} Y,$$

где  $Y = g - j \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = g - j(b_L - b_C) = g - jb$  – комплексная проводимость цепи.

Модуль комплексной проводимости является полной проводимостью цепи

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

То есть

$$Y = y \cdot e^{-j\varphi},$$

где  $\varphi = \arctg \frac{b}{g}$ .

3.3. Векторная диаграмма и треугольник проводимостей для параллельного соединения  $R, L, C$  представлены на рис. 3.1, а, б.

3.4. Комплексное сопротивление цепи при смешенном соединении элементов представлено на рис. 3.2.

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Здесь  $Z_1, Z_2, Z_3$  – комплексные сопротивления ветвей.

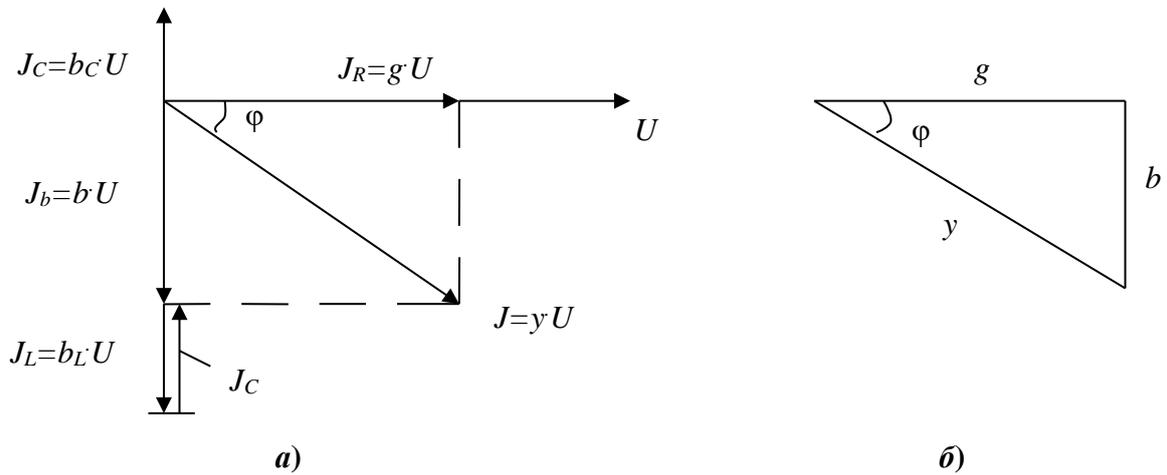


Рис. 3.1

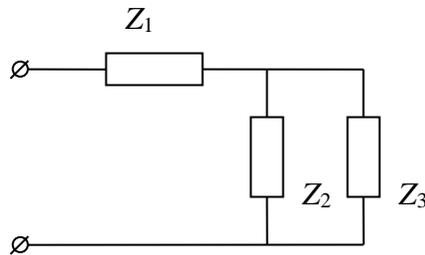


Рис. 3.2

3.5. Цепь при смешанном соединении можно рассчитать преобразованием параллельного соединения в эквивалентное последовательное по формулам:

$$R = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad X = \frac{b}{g^2 + b^2}.$$

При переходе от последовательной схемы к параллельной пользуются формулами:

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

#### 4. Расчет сложной электрической цепи синусоидального тока

4.1. Сложную электрическую цепь удобнее рассчитывать комплексным методом. Для смешанного соединения элементов суммарное (общее, входное, эквивалентное) комплексное сопротивление всей цепи:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

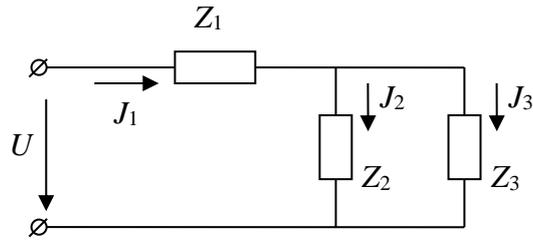


Рис. 4.1

4.2. Общий ток  $\dot{J}_1$  определяется по закону Ома

$$\dot{J}_1 = \frac{\dot{U}}{Z},$$

где  $\dot{U} = U \cdot e^{j\psi}$  – комплексное действующее значение ( $\psi$  – начальная фаза).

4.3. Токи в параллельных ветвях находятся по правилу: ток в одной из параллельных ветвей равен общему току, умноженному на сопротивление другой ветви и деленному на сумму сопротивлений обеих ветвей, т.е.

$$\dot{J}_2 = \dot{J}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}; \quad \dot{J}_3 = \dot{J}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}.$$

4.4. При расчете цепей переменного тока комплексным методом остаются справедливыми все методы расчета, применяемые для расчета цепей постоянного тока.

4.5. Явление резонанса наблюдается в цепи тогда, когда реактивная составляющая входного (общего) сопротивления цепи равна нулю, т.е. цепь носит чисто активный характер и, следовательно, напряжение и ток совпадают по фазе. Из вышесказанного следует простой способ определения резонансной частоты любой цепи: изменяя частоту генератора необходимо добиться равенства нулю сдвига фаз между током и напряжением на входе цепи (эллипс на экране осциллографа вырождается в прямую).

## 5. Последовательный колебательный контур (резонанс напряжений)

5.1. Резонанс напряжений наблюдается при последовательном соединении  $L$  и  $C$ . Условие резонанса  $X=0$ . При этом цепь носит чисто активный характер, т.е. напряжение и ток на входе цепи совпадают по фазе.

5.2. Резонансная частота, характеристическое сопротивление, добротность и полоса пропускания определяются по формулам:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{R}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

5.3. Абсолютная расстройка контура равна  $\omega - \omega_0$ ;

$$\text{относительная } \delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \text{ и}$$

$$\text{обобщенная } \xi = \frac{X}{R} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \delta Q \frac{\delta + 2}{\delta + 1}.$$

5.4. Уравнение резонансной кривой тока:

$$k_i = \frac{J}{J_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 Q^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}}.$$

5.5. Уравнение фазовой характеристики:

$$\varphi = \arctg \xi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \delta Q \frac{\delta + 2}{\delta + 1}.$$

5.6. Коэффициенты передачи по напряжению:

$$k_C = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad k_L = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Характеристики этих коэффициентов имеют максимумы при  $\omega_0$  при высокой добротности контура; при низкой добротности максимумы расходятся и их частоты определяются по формулам:

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}, \quad \omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

5.7. Для нагруженного контура ( $R_H$  подключено параллельно емкости):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_H^2}}; \quad Q = \frac{\rho}{R + R_{вн}} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_H}}.$$

## 6. Параллельный колебательный контур (резонанс токов)

6.1. Резонанс токов наблюдается при параллельном соединении  $L$  и  $C$ . Условие резонанса  $B=0$ . При этом цепь носит чисто активный характер и сдвиг фаз между током и напряжением на входе цепи равен нулю.

6.2. Для идеального контура (рис. 6.1, а) резонансная частота и добротность определяется по следующим формулам:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{R}{\rho}.$$

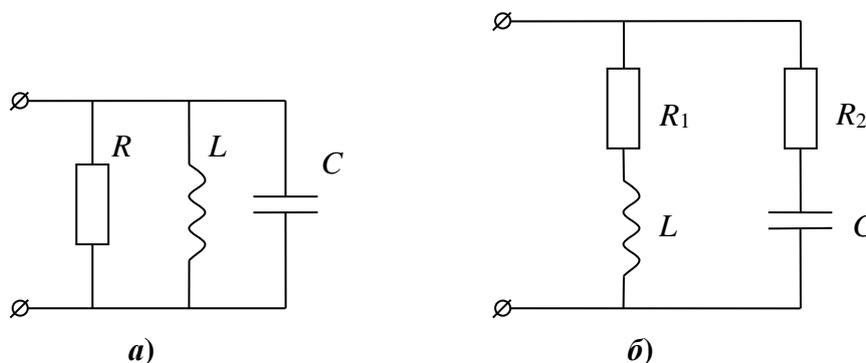


Рис. 6.1

Для контура 1-ого вида (рис. 6.1, б):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}, \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_1 + R_2 \omega_0^2 LC}, \quad g_0 = \frac{R_1 + R_2 \omega_0^2 LC}{R_1^2 + \omega_0^2 L^2}.$$

6.3. Уравнение резонансной кривой для идеального контура

$$J/J_0 = \sqrt{1 + \delta^2 Q^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}$$

представляет собой обратную зависимость резонансной кривой для резонанса напряжений.

6.4. Если параллельный колебательный контур питается от источника тока с большим внутренним сопротивлением, то в зависимости от изменения частоты будет изменяться напряжение на контуре.

При этом

$$U/U_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 Q^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}},$$

т.е. резонансная кривая для параллельного колебательного контура совпадает с резонансной кривой для последовательного колебательного контура.

6.5. Чем меньше внутренне сопротивление источника тока, тем ниже добротность и шире полоса пропускания параллельного колебательного контура, поэтому для такого контура более выгоден источник тока с большим внутренним сопротивлением.

## 7. Частотные характеристики напряжения параллельного колебательного контура

7.1. Резонанс токов наблюдается при параллельном соединении  $L$  и  $C$ .  
Условие резонанса  $B=0$ .

7.2. Для идеального контура (рис.7.1.):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$Q = \frac{R}{\rho}.$$

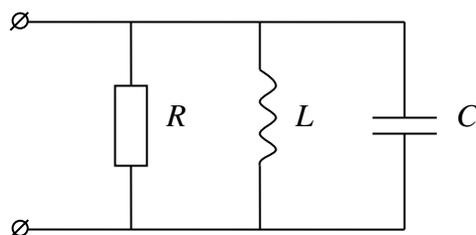


Рис. 7.1

7.3. Если параллельный колебательный контур питается от источника тока с большим внутренним сопротивлением, то в зависимости от изменения частоты будет изменяться напряжение на контуре:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 Q^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}}.$$

7.4. Для реального колебательного контура (рис. 7.2.):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2}{\rho^2}};$$

$$Q = \frac{R_0}{\rho},$$

где  $R_0$  – сопротивление контура при резонансе.

С учетом внутреннего сопротивления источника эквивалентная добротность

$$Q_{\text{Э}} = \frac{R_{\text{Э}}}{\rho} = \frac{g_i + g_0}{\rho} = \frac{R_0}{\rho \left(1 + \frac{R_0}{R_i}\right)}.$$

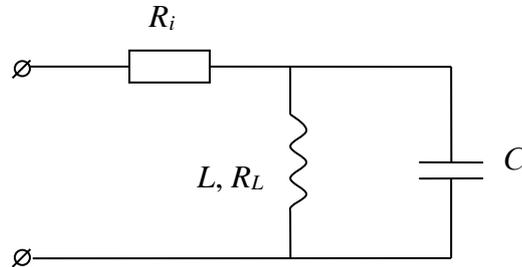


Рис. 7.2

С уменьшением внутреннего сопротивления эквивалентная добротность уменьшается. Т.е. применение параллельного колебательного контура целесообразно с точки зрения избирательности в том случае, когда внутреннее сопротивление источника достаточно велико ( $R_i \gg R_{\text{Э}}$ ). При этом следует иметь в виду, что с увеличением внутреннего сопротивления источника напряжение на контуре уменьшается.

## 8. Определение параметров пассивного четырехполюсника

8.1. Форма  $\|A\|$  записи уравнений четырехполюсника применяется при прямой передаче энергии и связывает входные величины с выходными:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{J}_2, \\ \dot{J}_1 = A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{J}_2. \end{cases}$$

При обратной передаче энергии используется форма  $\|B\|$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = A_{22} \dot{U}_1 + A_{12} \dot{J}'_1, \\ \dot{J}'_2 = A_{21} \dot{U}_2 + A_{11} \dot{J}'_1. \end{cases}$$

8.2.  $A$  – параметры четырехполюсника определяются методом холостого хода (х.х.), когда  $Z_{\text{н}} = \infty$  и  $J_2 = 0$  и короткого замыкания (К.З.), когда  $Z_{\text{н}} = 0$  и  $U_2 = 0$

$$A_{11} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\text{хх}} ; A_{21} = \left( \frac{\dot{J}_1}{\dot{U}_1} \right)_{\text{хх}} ; A_{12} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_2} \right)_{\text{КЗ}} ; A_{22} = \left( \frac{\dot{J}_1}{\dot{J}_2} \right)_{\text{КЗ}} .$$

Т.к. ток  $\dot{J}_2$  в режиме короткого замыкания не измеряется, то для определения  $A_{12}$  и  $A_{22}$  используются обратная передача энергии, откуда

$$A_{22} = \left( \frac{\dot{U}_2}{U_1} \right)_{\text{xx}} ; A_{21} = \left( \frac{\dot{J}'_2}{U_1} \right)_{\text{xx}} ; A_{12} = \left( \frac{\dot{U}_2}{\dot{J}'_1} \right)_{\text{КЗ}} ; A_{11} = \left( \frac{\dot{J}'_2}{\dot{J}'_1} \right)_{\text{КЗ}} .$$

8.3. Свойство обратимости пассивного четырехполюсника:

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

8.4. К характеристическим параметрам четырехполюсника относятся согласованная нагрузка  $Z_{1C}$  и  $Z_{2C}$  и мера передачи  $g = a + jb$  ( $a$  – коэффициент затухания,  $b$  – коэффициент фазы).

$$Z_{1C} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}} ; Z_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}} ; g = \ln(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}).$$

8.5. Параметры  $A$  и характеристические параметры четырехполюсника можно определить через сопротивления холостого хода и короткого замыкания

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1\text{xx}}}{Z_{2\text{xx}} - Z_{2\text{КЗ}}}} ; A_{12} = A_{11} \cdot Z_{2\text{КЗ}} ; A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1\text{xx}}} ; A_{22} = A_{11} \frac{Z_{2\text{xx}}}{Z_{1\text{xx}}} ;$$

$$Z_{1C} = \sqrt{Z_{1\text{xx}} \cdot Z_{1\text{КЗ}}} ; Z_{2C} = \sqrt{Z_{2\text{xx}} \cdot Z_{2\text{КЗ}}} ,$$

$$\text{где } Z_{1\text{xx}} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} \right)_{\text{xx}} ; Z_{2\text{xx}} = \left( \frac{\dot{U}_2}{\dot{J}'_2} \right)_{\text{xx}} ; Z_{1\text{КЗ}} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} \right)_{\text{КЗ}} ; Z_{2\text{КЗ}} = \left( \frac{\dot{U}_2}{\dot{J}'_2} \right)_{\text{КЗ}} .$$

## 9. Частотные характеристики пассивного четырехполюсника

9.1. Передаточная функция (коэффициент передачи) четырехполюсника (цепи) определяет реакцию цепи на внешнее воздействие и равна отношению выходной величины (напряжение, ток) к входной величине (напряжение, ток), выраженных в комплексной форме.

9.2. Передаточная функция четырехполюсника (цепи) по напряжению:

$$K_u(j\omega) = U_{\text{вых}}(j\omega) / U_{\text{вх}}(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} .$$

9.3. Зависимость модуля передаточной функции  $K(\omega)$  от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), зависимость аргумента передаточной функции  $\varphi(\omega)$  фазочастотной характеристикой (ФЧХ).

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}; \quad \varphi(\omega) = \psi_{U_{\text{ВЫХ}}} - \psi_{U_{\text{ВХ}}}.$$

Для того чтобы снять АЧХ и ФЧХ четырехполюсника, его нужно присоединить к источнику синусоидальных сигналов (генератору) и, изменяя частоту сигналов, измерить напряжение на входе  $U_1$  и выходе  $U_2$ , а также сдвиг фаз между ними. По полученным данным можно построить АЧХ и ФЧХ.

## 10. Расчет переходных процессов в линейных цепях

10.1. Переходные процессы, происходящие при коммутациях (включение, отключение цепи от источников, измерение параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$  цепи), возможны лишь в цепях содержащих энергоемкие (реактивные) элементы. Энергия электромагнитного поля в реактивных элементах не может изменяться мгновенно, а значит и величины, определяющие эту энергию (ток в индуктивности, напряжение на емкости), также не могут изменяться скачком.

10.2. Ток или напряжение на любом элементе цепи, содержащей реактивные элементы, представляет собой сумму вынужденной и свободных составляющих

$$i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} \quad \text{или} \quad U = U_{\text{вын}} + U_{\text{св}}.$$

Вынужденная составляющая тока или напряжения есть ток или напряжение в установившемся режиме.

Свободная составляющая представляется в виде суммы экспоненциально изменяющихся величин:

$$i_{\text{св}} = \sum_k A_k \cdot e^{\alpha_k t},$$

где  $\alpha_k$  – корни характеристического уравнения;

$A_k$  – постоянные интегрирования.

Для того чтобы записать характеристическое уравнение, необходимо относительно разрыва любой ветви (лучше, где есть  $L$  или  $C$ ) записать комплексное сопротивление, и заменить на  $L$  и приравнять полученное нулю.

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий с применением законов коммутации, что сводится к определению токов или напряжений в цепи в момент  $t = +0$ . В момент  $t = +0$  индуктивность при нулевых начальных условиях эквивалентна разрыву, а индуктивность с током – источнику тока. Емкость при  $t = +0$  эквивалентна короткому замыканию (не заряженная) и источнику Э.Д.С., если до коммутации на ней было напряжение (величина Э.Д.С. равна этому напряжению).

10.3. Постоянная времени цепей  $RC$  и  $RL$ :

$$\tau = R \cdot C; \quad \tau = \frac{L}{R},$$

где  $\tau = -\frac{1}{\alpha}$ .

Экспериментально постоянная времени определяется величиной подкасательной к кривым тока или напряжения в любой их точке.

10.4. Для цепей содержащих два реактивных элемента, например, для последовательного соединения  $R$ ,  $L$ ,  $C$  свободная составляющая имеет два слагаемых

$$i = i_{\text{вын}} + A_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 t},$$

где  $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ;

$$\delta = \frac{R}{2L};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Вынужденный ток определяется приложенным напряжением, а характер свободной составляющей зависит от корней характеристического уравнения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Если корни вещественные, т.е.  $\delta > \omega_0$  или  $R > 2\rho$  то переходный процесс имеет аperiodический характер.

Если корни комплексные, что возможно при  $R < 2\rho$ , то в цепи будет наблюдаться колебательный затухающий процесс с частотой свободных (собственных) колебаний

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

О быстроте затухания колебательного процесса судят по декременту колебания

$$\Delta = e^{\delta T_{\text{св}}},$$

который практически определяется как отношение соседних амплитуд колебаний тока или напряжения.

## II. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### ЗАДАНИЕ 1

#### Расчет разветвленных электрических цепей комплексным методом

Дана цепь, схема которой приведена на рис.1.

Параметры цепи:

$$R_1 = 5 \text{ Ом},$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом},$$

$$R_3 = 10 \text{ Ом},$$

$$C_1 = 10 \text{ мкФ},$$

$$C_3 = 5 \text{ мкФ},$$

$$L_1 = 2,5 \text{ мГн},$$

$$L_2 = 1 \text{ мГн},$$

приложенное

напряжение 50 В,

частота  $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

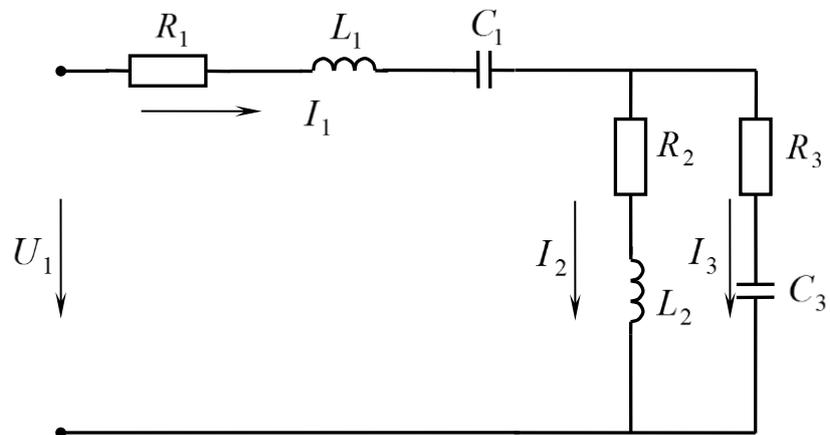


Рис. 1

Определить действующие значения токов в цепи и напряжений на каждом элементе. Записать полученные значения в мгновенной форме. Вычислить мощности  $P, Q, S$  и проверить баланс мощностей.

**Решение:**

#### 1. Реактивные сопротивления элементов

$$x_{L1} = \omega L_1 = 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 25 \text{ Ом};$$

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом};$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом};$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом}.$$

#### 2. Комплексное сопротивление цепи

$$Z = R_1 + jx_{L1} - jx_{C1} + \frac{(R_2 + jx_{L2})(R_3 - jx_{C3})}{R_2 + R_3 + jx_{L2} - jx_{C3}} = 5 + j25 - j10 +$$

$$+ \frac{(20 + j10)(10 - j20)}{30 - j10} = 5 + j15 + \frac{(400 - j300)(30 + j10)}{1000} =$$

$$= 5 + j15 + 15 - j5 = 20 + j10 \text{ Ом}.$$

### 3. Токи в цепи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{50}{20 + j10} = \frac{50(20 - j10)}{500} = 2 - j \text{ А};$$

$$I_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,23 \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{(R_3 - jx_{C3})}{R_2 + R_3 + jx_{L2} - jx_{C3}} = \frac{(2 - j)(10 - j20)}{30 - j10} = \frac{-j5(3 + j)}{10} = 0,5 - j1,5 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{0,5^2 + 1,5^2} = 1,58 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{(R_3 + jx_{L2})}{R_2 + R_3 + jx_{L2} - jx_{C3}} = \frac{(2 - j)(20 + j10)}{30 - j10} = \frac{5(3 + j)}{10} = 1,5 + j0,5 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{1,5^2 + 0,5^2} = 1,58 \text{ А}.$$

Проверка  $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 1,5 + j0,5 + 0,5 - j1,5 = 2 - j = \dot{I}_1$ .

### 4. Мгновенные значения токов

$$i_1 = 2,23 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - \arctg \frac{1}{2}) = 2,23 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - 26^{\circ}34') \text{ А};$$

$$i_2 = 1,58 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - \arctg \frac{1,5}{0,5}) = 1,58 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - 71^{\circ}34') \text{ А};$$

$$i_3 = 1,58 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t + \arctg \frac{0,5}{1,5}) = 1,58 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t + 18^{\circ}26') \text{ А}.$$

### 5. Напряжения

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot z_1 = (2 - j)(5 + j15) = 25 + j25 \text{ В};$$

$$U_1 = \sqrt{25^2 + 25^2} = 35,25 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{25}{25} = 45^{\circ};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{I}_2 z_2 = \dot{I}_3 z_3 = (0,5 - j1,5)(20 + j10) = 25 - j25 \text{ В};$$

$$U_2 = \sqrt{25^2 + 25^2} = 35,25 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = -45^{\circ};$$

$$\dot{U}_{R1} = \dot{I}_1 R_1 = (2 - j)5 = 10 - j5 \text{ B};$$

$$U_{R1} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 \text{ B};$$

$$\varphi_{R1} = \arctg \frac{-5}{10} = -26^{\circ}34';$$

$$\dot{U}_{L1} = \dot{I}_{L1} jx_{L1} = (2 - j)j25 = 25 + j50 \text{ B};$$

$$U_{L1} = \sqrt{25^2 + 50^2} = 55,72 \text{ B};$$

$$\varphi_{L1} = \arctg \frac{50}{25} = 63^{\circ}26';$$

$$\dot{U}_{C1} = \dot{I}_1 (-jx_{C1}) = (2 - j)(-j10) = -10 - j20 \text{ B};$$

$$U_{C1} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,36 \text{ B};$$

$$\varphi_{C1} = -180^{\circ} + \arctg \frac{20}{10} = -180^{\circ} + 63^{\circ}26' = -116^{\circ}34';$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2 \cdot R_2 = (0,5 - j1,5)20 = 10 - j30 \text{ B};$$

$$U_{R2} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 31,62 \text{ B};$$

$$\varphi_{R2} = \arctg \frac{-30}{10} = -71^{\circ}34';$$

$$\dot{U}_{L2} = \dot{I}_2 \cdot jx_{L2} = (0,5 - j1,5)j10 = 15 + j5 \text{ B};$$

$$U_{L2} = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15,8 \text{ B};$$

$$\varphi_{L2} = \arctg \frac{5}{15} = 18^{\circ}26';$$

$$\dot{U}_{R3} = \dot{I}_3 R_3 = (1,5 + j0,5)10 = 15 + j5 \text{ B};$$

$$U_{R3} = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15,8 \text{ B};$$

$$\varphi_{R3} = \arctg \frac{5}{15} = 18^{\circ}26';$$

$$\dot{U}_{C3} = \dot{I}_3 \cdot (-jx_{C3}) = (1,5 + j0,5)(-j20) = 10 - j30 \text{ B};$$

$$U_{C3} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 31,62 \text{ B};$$

$$\varphi_{C3} = \arctg \frac{-30}{10} = -71^{\circ}34'.$$

## 6. Мгновенные значения напряжений

$$u_1 = 35,25 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t + 45^\circ) \text{ В};$$

$$u_2 = 35,25 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - 45^\circ) \text{ В};$$

$$u_{R1} = 11,18 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - 26^\circ 34') \text{ В};$$

$$u_{L1} = 55,72 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t + 63^\circ 26') \text{ В};$$

$$u_{R2} = 31,62 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - 71^\circ 34') \text{ В};$$

$$u_{L2} = 31,8 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t + 18^\circ 26') \text{ В};$$

$$u_{R3} = 15,8 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t + 18^\circ 26') \text{ В};$$

$$u_{C3} = 31,62 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 t - 71^\circ 34') \text{ В}.$$

## 7. Мощности

$$\dot{S} = \dot{U} I_1^* = 50(2 + j) = 100 + j50 = P + jQ;$$

$$P = 100 \text{ Вт};$$

$$Q = 50 \text{ ВАр};$$

$$S = UI_1 = 50 \cdot 2,23 = 111,5 \text{ ВА}.$$

## 8. Баланс мощностей

Мощность источника

$$P_{\text{ист}} = 100 \text{ Вт},$$

$$Q_{\text{ист}} = 50 \text{ ВАр}.$$

Потребляемая мощность

$$P_{\text{потр}} = \sum_i R_i I_i^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 5 \cdot 5 + 20 \cdot 2,5 + 10 \cdot 2,5 = 100 \text{ Вт},$$

$$Q_{\text{потр}} = \sum_i x_i I_i^2 = (x_{L1} - x_{C1}) I_1^2 + x_{L2} I_2^2 - x_{C3} I_3^2 = 15 \cdot 5 + 10 \cdot 2,5 - 20 \cdot 2,5 =$$

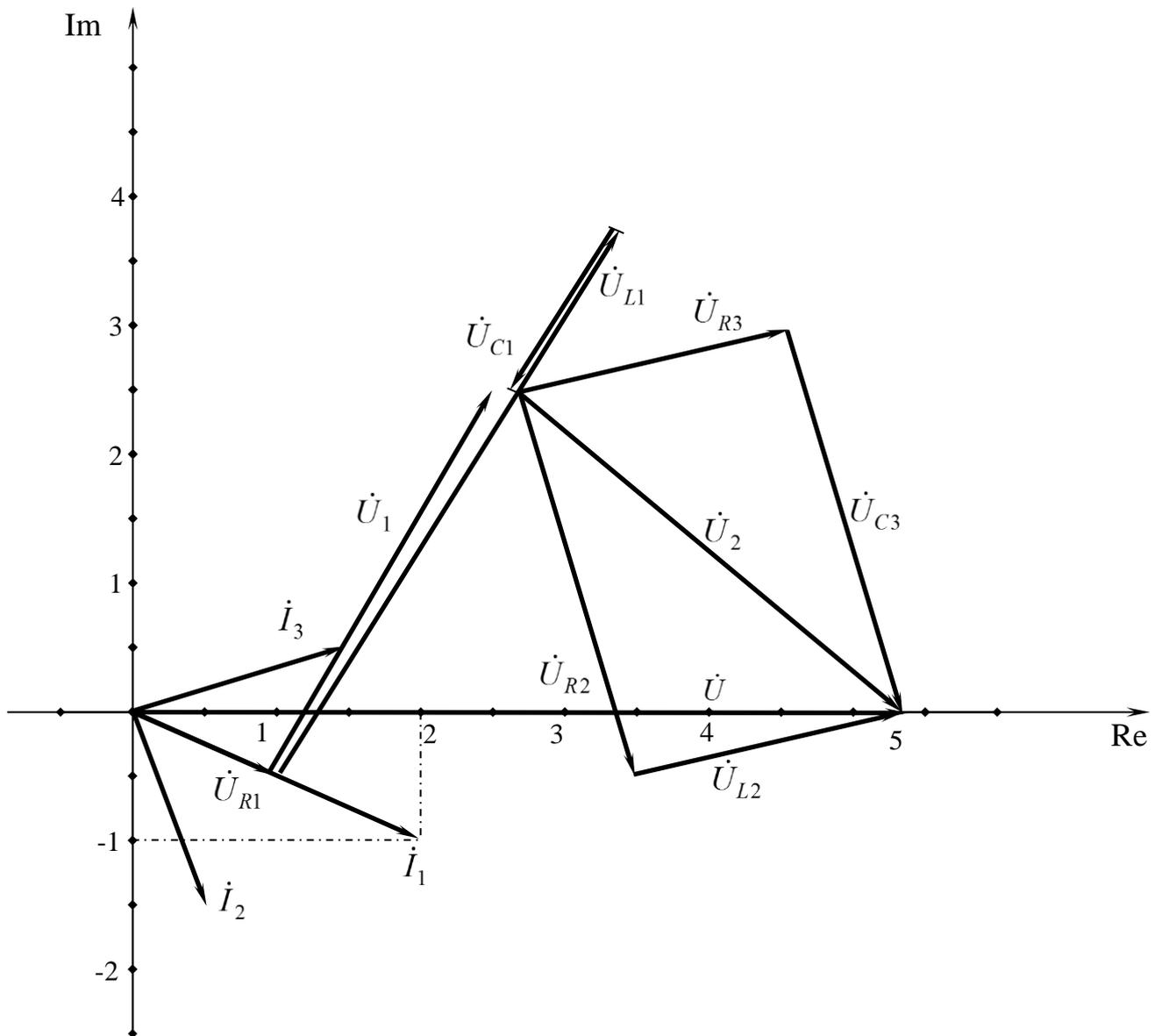
$$= 50 \text{ ВАр}.$$

Как видно баланс мощностей выполняется

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}};$$

$$Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}}.$$

### 9. Векторная диаграмма



Масштаб: 10 В/ деление;  
1 А/ деление.

Рис. 2

## ЗАДАНИЕ 2

### Резонанс в электрических цепях

Дана схема электрической цепи с параметрами (рис.3)

$$u = U_m \sin \omega t$$

$$U = 208 \text{ В}$$

$$R_1 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом}$$

$$L_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$L_2 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

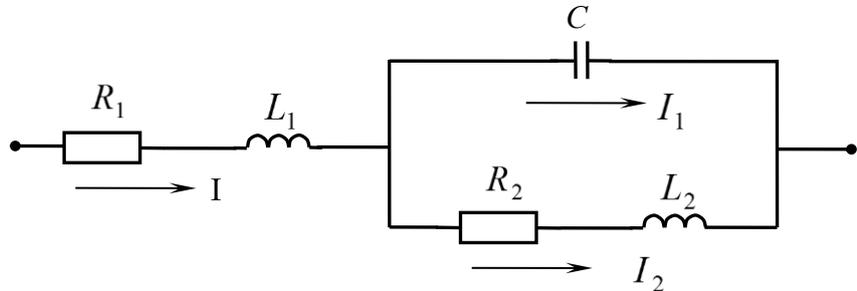


Рис. 3

Определить резонансные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , значения тока при этих частотах и для одной из частот построить векторную диаграмму.

### Решение

#### 1. Определение резонансных частот

Резонансные частоты определим через комплексное сопротивление:

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{(R_2 + j\omega L_2) - j \cdot \frac{1}{\omega C}}{R_2 + j\omega L_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C}} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega L_2 - jR_2}{R_2\omega C + j\omega^2 L_2 C - j} = \\ &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega L_2 - jR_2)(R_2\omega C - j(\omega^2 L_2 C - 1))}{R_2^2\omega^2 C^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} = R_1 + \frac{R_2}{R_2^2\omega^2 C + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} + \\ &+ j \left[ \frac{\omega L_2 - \omega^3 L_2^2 C - R_2^2 \omega C}{R_2^2\omega^2 C + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} + \omega L_1 \right] = R + jX; \end{aligned}$$

Отсюда

$$X = \frac{\omega L_2 - \omega^3 L_2^2 C - R_2^2 \omega C}{R_2^2\omega^2 C + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} + \omega L_1 = 0.$$

Подставив данные для расчета задачи, получим:

$$\frac{20 \cdot 10^{-3} - 400 \cdot 10^{-11} \omega^3 - 900 \cdot 10^{-5} \omega}{900 \cdot 10^{-10} \omega^2 + (20 \cdot 10^{-8} \omega^2 - 1)^2} + 4 \cdot 10^{-3} \omega = 0,$$

или

$$1,6 \cdot 10^{-6} \omega^4 - 524 \cdot 10^{-11} \omega^2 + 15 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Решаем биквадратное уравнение

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{524 \cdot 10^{-11} \pm \sqrt{524^2 \cdot 10^{-22} - 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16} \cdot 15 \cdot 10^{-3}}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}} =$$

$$= \frac{524 \cdot 10^{-11} \pm 4,226 \cdot 10^{-9}}{3,2 \cdot 10^{-16}};$$

$$\omega_1 = 1780,25 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$\omega_2 = 5438,81 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

## 2. Значения токов при резонансных частотах

$$Z_{\Sigma} = Z_1 + Z_2, \quad Z_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad Z_2 = \frac{(R_2 + j\omega L_2)(-\frac{j}{\omega C})}{R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C}}.$$

а)  $\omega = \omega_1 = 1780 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$

$$Z_1 = 5 + j \cdot 1780 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = (5 + 7,12j) \text{ Ом};$$

$$Z_2 = \frac{(30 + j \cdot 1780 \cdot 20 \cdot 10^{-3})(-\frac{j}{1780 \cdot 10^{-5}})}{30 + j \cdot 1780 \cdot 20 \cdot 10^{-3} - \frac{j}{1780 \cdot 10^{-5}}} = (71,54 - j7,10) \text{ Ом};$$

$$Z_{\Sigma} = 5 + 7,12j + 71,54 - 7,10j \approx 71,68 = 71,68 \cdot e^{j0^\circ} \text{ Ом};$$

$$I = \frac{208}{71,68} = 2,7 \text{ А}; \quad \varphi = 0^\circ.$$

б)  $\omega = \omega_2 = 5439 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$

$$Z_1 = 5 + j \cdot 5439 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = (5 + 21,75j) \text{ Ом};$$

$$Z_2 = \frac{(30 + j \cdot 5439 \cdot 20 \cdot 10^{-3})(-\frac{j}{5439 \cdot 10^{-5}})}{30 + j \cdot 5439 \cdot 20 \cdot 10^{-3} - \frac{j}{5439 \cdot 10^{-5}}} = (1,1 - 21,87j) \text{ Ом};$$

$$Z_{\Sigma} = 5 + 21,75j + 1,1 - 21,87j = 6,1 = 6,1 \cdot e^{j0^\circ} \text{ Ом};$$

$$I = \frac{208}{6,1} = 34,1 \text{ А}; \quad \varphi = 0^\circ.$$

### 3. Расчет значений для векторной диаграммы

$$\omega = 5439 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\dot{I} = I = 34,1 \text{ А};$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C}} = 34,1 \frac{30 + j108,78}{30 + j108,78 - j18,38} = 40,27 + j2,37 =$$

$$= 40,31 \cdot e^{3^\circ 22'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I} \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C}} = 34,1 \frac{-j18,38}{30 + j108,78 - j18,38} = -6,25 - j2,05 =$$

$$= 6,58 \cdot e^{-j161^\circ 40'} \text{ А};$$

$$\dot{U}_d = j108,78(-6,25 - j2,07) = 225,17 - j679,86 = 716,18 \cdot e^{-j71^\circ 41'} \text{ В};$$

$$\dot{U}_e = \dot{U}_d + R_2 \dot{I}_2 = 225,17 - j679,86 + 30(-6,25 - j2,07) =$$

$$37,67 - j741,0 = 742,0 \cdot e^{-j87^\circ 24'} \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = -\frac{j}{\omega C} \cdot \dot{I}_1 = -j18,38(40,24 + j2,05) = 37,68 - j740,0 =$$

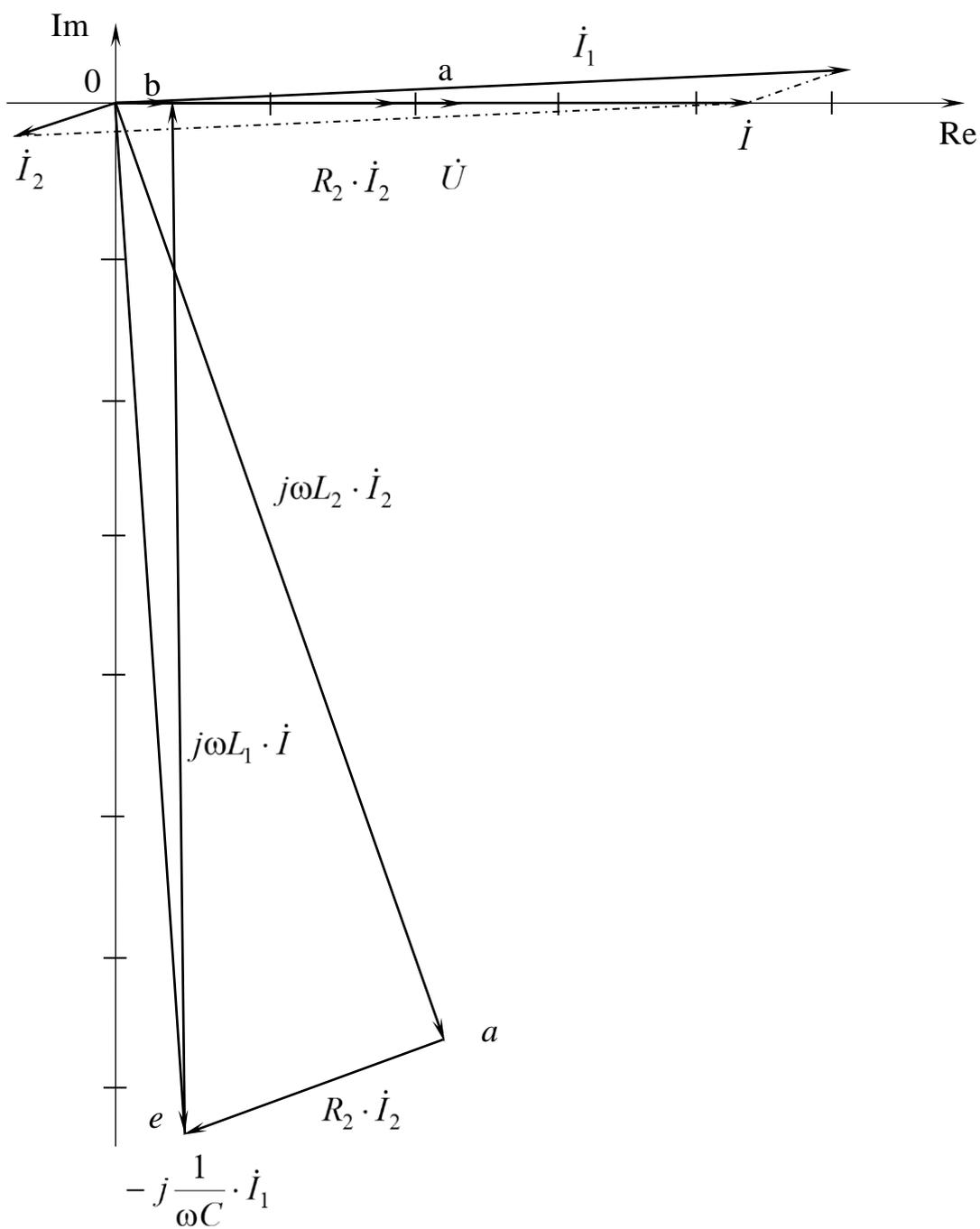
$$= 741,0 \cdot e^{-j87^\circ 5'} \text{ В};$$

$$\dot{U}_g = \dot{U}_e + j\omega L_1 \cdot \dot{I} = 37,67 - j741,0 + j21,75 \cdot 34,1 =$$

$$= 37,67 - j741,0 + j741,67 \approx 37,67 \text{ В};$$

$$\dot{U}_a = \dot{U}_g + R_1 \dot{I} = 37,67 + 170,5 \approx 208 \text{ В}.$$

4. Векторная диаграмма для  $\omega_2 = 5439 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$



Масштаб: 100 В/ деление;  
8 А/ деление.

Рис. 4

### ЗАДАНИЕ 3 Четырехполюсники

#### А) Т – образная схема

Дана схема пассивного четырехполюсника (рис. 5) с параметрами:

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \text{ Ом}, \\ R_2 &= 20 \text{ Ом}, \\ R_3 &= 5 \text{ Ом}, \\ x_{C3} &= 10 \text{ Ом}, \\ x_{L1} &= 10 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

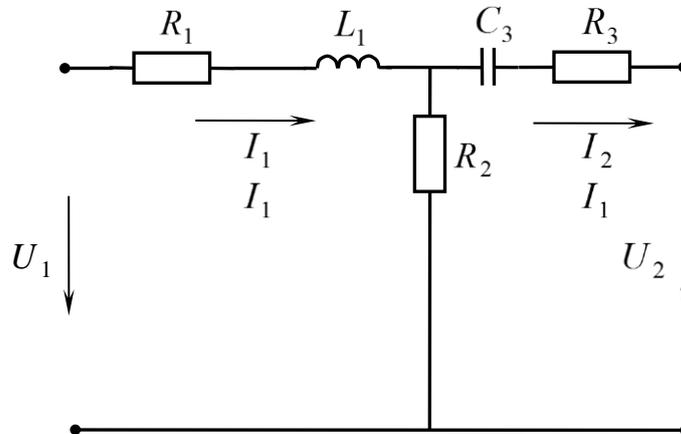


Рис. 5

Определить для данного четырехполюсника  $A$  – параметры, характеристические параметры  $z_{1C}$ ,  $z_{2C}$ ,  $q$  и вычислить коэффициенты передачи по напряжению  $K_U(j\omega)$  четырехполюсника нагруженного согласованно  $z_H = z_{2C}$ .

**Решение:**

#### 1. $A$ – форма записи уравнений четырехполюсника

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

Рассматривая режимы холостого хода и короткого замыкания, можно определить  $A$  – параметры:

$$A_{11} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\text{хх}} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{R_1 + jx_{L1} + R_2} \cdot R_2} = \frac{30 + j10}{20} = 1,5 + j0,5 = 1,58e^{j18^\circ 26'};$$

$$A_{21} = \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\text{хх}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1 R_2} = \frac{1}{20} = 0,05 \frac{1}{\text{Ом}};$$

$$A_{12} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right)_{K3} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{R_1 + jx_{L1} + \frac{R_2(R_3 - jx_{C3})}{R_2 + R_3 - jx_{C3}}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 - jx_{C3}}} =$$

$$= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + x_{L1} x_{C3} + j(x_{L1} - x_{C3}) R_2 - jx_{C3} R_1 + jx_{L1} R_3}{R_2} =$$

$$= \frac{450 - j50}{20} = 22,5 - j2,5 = 22,64 e^{-j6^{\circ}20'};$$

$$A_{22} = \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 - jx_{C3}}} = \frac{R_2 + R_3 - jx_{C3}}{R_2} = 1,25 - j0,5 = 1,3 e^{-j21^{\circ}48'}.$$

Проверка:

$$|A| = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = (1,5 + j0,5)(1,25 - j0,5) - (22,5 - j2,5) \cdot 0,05 = 1,875 +$$

$$+ 0,25 + j0,625 - j0,75 - 1,125 + j0,125 = 2,125 - j0,125 - 1,125 + j0,125 = 1.$$

## 2. Характеристические параметры четырёхполюсника

$$Z_{1C} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{21} A_{22}}} = \sqrt{\frac{1,58 e^{j18^{\circ}26'} \cdot 22,64 e^{-j6^{\circ}20'}}{0,05 \cdot 1,35 e^{-j21^{\circ}48'}}} = 23,02 e^{j16^{\circ}57'} = 22,01 + j6,71 \text{ Ом};$$

$$Z_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}} = \sqrt{\frac{1,35 e^{-j21^{\circ}48'} \cdot 22,64 e^{-j6^{\circ}20'}}{0,05 \cdot 1,58 e^{j18^{\circ}26'}}} = 19,67 e^{-j28^{\circ}17'} = 17,32 - j9,32 \text{ Ом};$$

$$g = \ln(\sqrt{A_{11} A_{22}} + \sqrt{A_{12} A_{21}}) = \ln(\sqrt{1,58 e^{j18^{\circ}26'} \cdot 1,35 e^{-j21^{\circ}48'}} + \sqrt{22,64 e^{-j6^{\circ}20'} \cdot 0,05}) =$$

$$= \ln(1,46 e^{-j1^{\circ}41'} + 1,06 e^{-j3^{\circ}10'}) = \ln(1,454 - j0,043 + 1,058 - j0,058) =$$

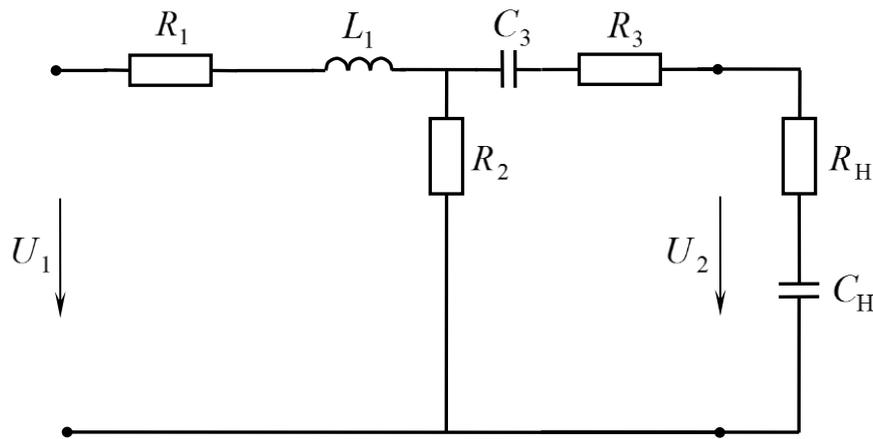
$$= \ln(2,512 - j0,101) = \ln 2,514 e^{-j2^{\circ}18'} = 0,93 - j0,04;$$

$$a = 0,93 \text{ нп};$$

$$b = -0,04 \text{ рад};$$

$$a_{\text{дб}} = 8,68 \cdot a_{\text{нп}} = 8,07 \text{ дб}.$$

**3. Коэффициент передачи четырехполюсника, нагруженного характеристическим сопротивлением (рис. 6)**



**Рис. 6**

$$z_H = z_{2C} = R_H - jx_{CH} = 17,32 - j9,32 \text{ Ом};$$

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1};$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + jx_{L1} + \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_H - jx_{C3} - jx_{CH})}{R_2 + R_3 + R_H - jx_{C3} - jx_{CH}}} \cdot \frac{R_2 \cdot (R_H - jx_{CH})}{R_2 + R_3 + R_H - jx_{C3} - jx_{CH}}.$$

Следовательно:

$$K(j\omega) = \frac{R_2(R_H - jx_{CH})}{(R_1 + jx_L)(R_2 + R_3 + R_H - jx_{C3} - jx_H) + R_2(R_3 + R_H - jx_{C3} - jx_{CH})} =$$

$$= \frac{346,4 - j186,4}{1062,8 - j156,4} = \frac{393,36 \cdot e^{-j28^\circ 17'}}{1074,24 \cdot e^{-j8^\circ 22'}} = 0,36 \cdot e^{-j19^\circ 55'}.$$

**4. Входное сопротивление при данной нагрузке**

$$z_{1BX} = R_1 + jx_{L1} + \frac{R_2(R_3 + R_H - jx_3 - jx_{CH})}{R_2 + R_3 + R_H - jx_{C3} - jx_{CH}} = 10 + j10 + \frac{20 \cdot (22,32 - j19,32)}{42,32 - j19,32} =$$

$$= 10 + j10 + \frac{22,32 - j19,32}{2,116 - j0,966} = 10 + j10 + \frac{(22,32 - j19,32)(2,116 - j0,966)}{5,41} =$$

$$= 10 + j10 + 12,17 - j3,57 = 22,17 + j6,43 \text{ Ом}.$$

С учетом погрешностей и округлений при вычислениях  $z_{1BX}$  равно  $z_{1C}$

$$22,17 + j6,43 \approx 22,07 + j6,71.$$

## Б) П – образная схема

Даны параметры П – образной схемы четырехполюсника (рис. 7):

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \text{ Ом}, \\ R_3 &= 20 \text{ Ом}, \\ x_{C2} &= 20 \text{ Ом}, \\ x_{L1} &= 20 \text{ Ом}, \\ x_{L3} &= 10 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

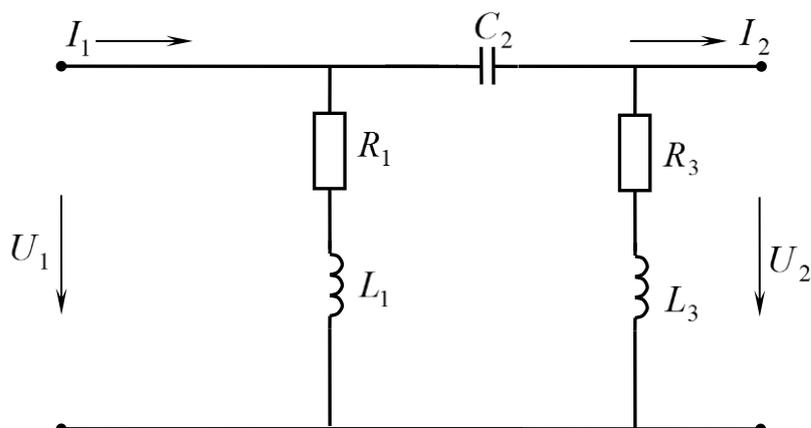


Рис. 7

Определить  $A$  – параметры,  $z_{1C}$ ,  $z_{2C}$ ,  $q$ ,  $K(j\omega)$ ,  $z_{1BX}$ .

**Решение:**

### 1. $A$ – параметры

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\text{xx}} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1(R_3 + jx_{L3})}{-jx_{C2} + R_3 + jx_{L3}}} = \frac{R_3 + j(x_{L3} - x_{C2})}{R_3 + jx_{L3}} = \\ &= \frac{20 - j10}{20 + j10} = \frac{(2 - j)(2 - j)}{5} = 0,6 - j0,8 = 1 \cdot e^{-j53^\circ 8'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\text{xx}} = \frac{\dot{I}_1}{\frac{\dot{I}_1(R_1 + jx_{L1})(R_3 + jx_{L3})}{R_1 + jx_{L1} - jx_{C2} + R_3 + jx_{L3}}} = \frac{R_1 + R_3 + j(x_{L3} + x_{L1} - x_{C2})}{(R_1 + jx_{L1})(R_3 + jx_{L3})} = \\ &= \frac{30 + j10}{(10 + j20)(20 + j10)} = \frac{(3 + j)}{j50} = 0,02 - j0,06 = 0,0632 \cdot e^{-j71^\circ 34'} \frac{1}{\text{Ом}}; \end{aligned}$$

$$A_{12} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\text{кз}} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{-jx_{C2}}} = -jx_{C2} = -j20 = 20 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$A_{22} = \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\text{кз}} = \frac{\dot{I}_1}{\frac{\dot{I}_1(R_1 + jx_{L1})}{-jx_{C2} + R_1 + jx_{L1}}} = \frac{R_1 + j(x_{L1} - x_{C2})}{R_1 + jx_{L1}} = \frac{10}{10 + j20} = \frac{1 - j2}{5} =$$

$$= 0,2 - j0,4 = 0,447 \cdot e^{-j63^\circ 28'}$$

Проверка

$$|A| = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = (0,6 - j0,8)(0,2 - j0,4) + (0,02 - j0,06) \cdot j20 =$$

$$= 0,12 - 0,32 - j0,16 - j0,24 + j0,4 + 1,2 = 1.$$

## 2. Характеристические параметры

$$Z_{1C} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = \sqrt{\frac{e^{-j53^\circ 08'} \cdot 20e^{-j90^\circ}}{0,0632e^{-j71^\circ 34'} \cdot 0,447e^{-j63^\circ 28'}}} = 26,60e^{-j4^\circ 03'} = 26,54 - j1,88 \text{ Ом};$$

$$Z_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} = \sqrt{\frac{0,447e^{-j63^\circ 28'} \cdot 20e^{-j90^\circ}}{0,0632e^{-j71^\circ 34'} \cdot e^{-j53^\circ 08'}}} = 11,89e^{-j14^\circ 23'} = 11,52 - j2,95 \text{ Ом};$$

$$g = \ln(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}) = \ln(\sqrt{e^{-j53^\circ 08'} \cdot 0,447e^{-j63^\circ 28'}} +$$

$$+ \sqrt{20e^{-j90^\circ} \cdot 0,0632e^{-j71^\circ 34'}}) = \ln(0,668e^{-j58^\circ 18'} + 1,124e^{-j80^\circ 47'}) =$$

$$= \ln(0,351 - j0,568 + 0,180 - j1,109) = \ln(0,531 - j1,677) =$$

$$= \ln(1,759e^{-j72^\circ 20'}) = 0,57 - j1,26;$$

$$a = 0,57 \text{ нп}; \quad a_{\text{дб}} = 8,68 \cdot a_{\text{нп}} = 4,95 \text{ дб};$$

$$b = -1,26 \text{ рад.}$$

## 3. Коэффициент передачи по напряжению четырёхполюсника, нагруженного характеристическим сопротивлением

$$Z_{2C} = Z_H = R_H - jx_{CH} = 11,52 - j2,95 \text{ Ом (рис. 8);}$$

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1};$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{-jx_{C2} + \frac{(R_3 + jx_{L3})(R_H - jx_{CH})}{R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}}} \cdot \frac{(R_3 + jx_{L3}) \cdot (R_H - jx_{CH})}{R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
K_U(j\omega) &= \frac{(R_3 + jx_{L3})(R_H - jx_{CH})}{-jx_{C2}(R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}) + (R_3R_H + x_{L3}x_{CH} + jx_{L3}R_H - jx_{CH}R_3)} = \\
&= \frac{(20 + j10)(11,52 - j2,95)}{-j20(31,52 + j7,05) + 259,9 + j56,2} = \frac{259,9 + j56,2}{400,9 - j547,2} = \frac{265,9e^{j12^\circ 12'}}{700,30e^{-j55^\circ 04'}} = \\
&= 0,38 \cdot e^{-j42^\circ 52'}.
\end{aligned}$$

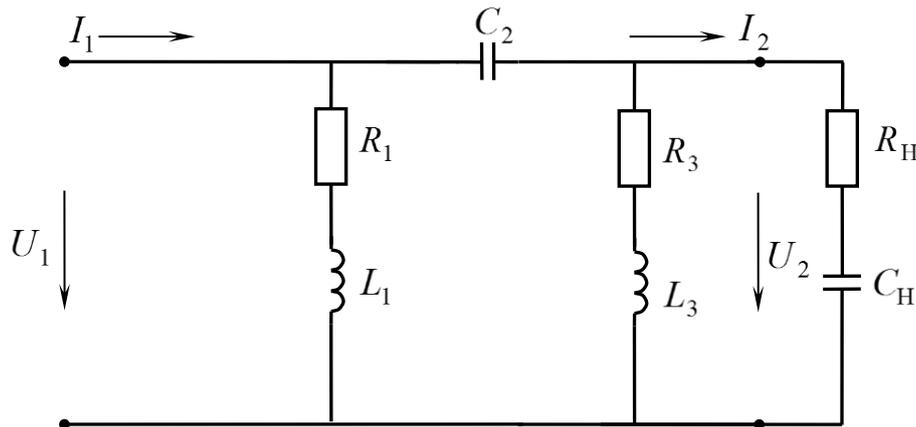


Рис. 8

#### 4. Входное сопротивление при данной нагрузке

$$\begin{aligned}
z_{1BX} &= \frac{(R_1 + jx_{L1}) \left( -jx_{C2} + \frac{(R_3 + jx_{L3})(R_H - jx_{CH})}{R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}} \right)}{R_1 + jx_{L1} - jx_{C2} + \frac{(R_3 + jx_{L3})(R_H - jx_{CH})}{R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}}} = \\
&= \frac{(R_1 + jx_{L1}) \left[ -jx_{C2}(R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}) + R_3R_H + x_{L3}x_{CH} + jx_{L3}R_H - jx_{CH}R_3 \right]}{(R_1 + jx_{L1} - jx_{C2})(R_3 + jx_{L3} + R_H - jx_{CH}) + R_3R_H + x_{L3}x_{CH} + jx_{L3}R_H - jx_{CH}R_3} = \\
&= \frac{(10 + j20)(400,9 - j574,2)}{10(31,52 + j7,05) + 259,9 + j56,2} = \frac{15493 + j2276}{575,1 + j126,7} = \frac{92271,755 - j6278,275}{3467,93} = \\
&= 26,52 - j1,88.
\end{aligned}$$

С учетом погрешностей вычислений  $z_{1BX} \approx z_{1C}$ .

## ЗАДАНИЕ 4

### Переходные процессы в линейных электрических цепях

Дана схема электрической цепи (рис. 9) с параметрами:

$$\begin{aligned} R &= 30 \text{ Ом}, \\ R_1 &= 10 \text{ Ом}, \\ R_2 &= 20 \text{ Ом}, \\ R_3 &= 20 \text{ Ом}, \\ C &= 100 \text{ мкФ}, \\ L &= 10 \text{ мГн}, \\ E &= 50 \text{ В}. \end{aligned}$$

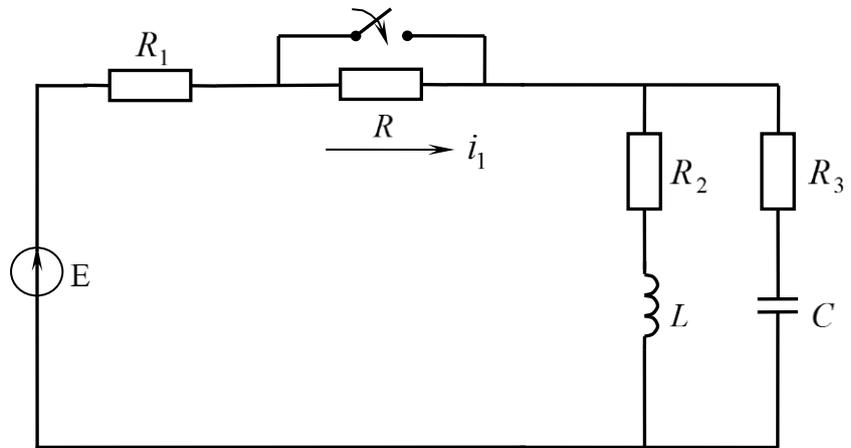


Рис. 9

В цепи происходит коммутация: резистор  $R$  отключается.

#### Требуется:

1. Определить ток  $i_L$  и напряжение  $U_C$  после коммутации классическим методом.
2. Определить ток  $i_L$  и напряжение  $U_C$  операторным методом и сравнить полученные результаты.

#### Решение:

1. Определяем ненулевые начальные условия, т.е.  $i_L(-0)$  и  $U_C(-0)$ .

$$i_L(-0) = \frac{E}{R + R_1 + R_2} = \frac{50}{10 + 30 + 20} = 1 \text{ А};$$

$$U_C(-0) = i_L(-0) \cdot R_2 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ В}.$$

2. Рассматриваем режим после коммутации

$$i_{L\text{вын}} = i_{L\text{уст}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{50}{10 + 20} = 2 \text{ А},$$

$$i_{L\text{вын}} = i_{L\text{уст}} = 2 \text{ А},$$

$$u_{C\text{уст}} = i_{L\text{уст}} \cdot R_2 = 40 \text{ В}.$$

### 3. Определяем корни характеристического уравнения

$$\frac{1}{pC} + R_3 + \frac{(R_2 + pL)R_1}{R_1 + R_2 + pL} = 0;$$

$$R_1 + R_2 + pL + R_3 \cdot pC(R_1 + R_2 + pL) + (R_2 + pL)R_1 \cdot pC = 0;$$

$$R_1 + R_2 + pL + R_3(R_1 + R_2)C \cdot p + R_3LCp^2 + R_1R_2Cp + R_1LCp^2 = 0;$$

$$(R_1 + R_3)LC \cdot p^2 + [(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C + L]p + R_1 + R_2 = 0;$$

$$30 \cdot 10^{-6} p^2 + (800 \cdot 10^{-4} + 10^{-2})p + 30 = 0;$$

$$3 \cdot 10^{-5} p^2 + 9 \cdot 10^{-2} p + 30 = 0;$$

$$p^2 + 3 \cdot 10^3 p + 10^6 = 0;$$

$$p_{1,2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \pm \sqrt{9 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \pm 2,236 \cdot 10^3}{2};$$

$$p_1 = \frac{-3 \cdot 10^3 + 2,236 \cdot 10^3}{2} = -382 c^{-1};$$

$$p_2 = \frac{-3 \cdot 10^3 - 2,236 \cdot 10^3}{2} = -2618 c^{-1}.$$

### 4. Определяем ток $i_L$

$$i_L = 2 + A_1 e^{-382t} + A_2 e^{-2618t}.$$

При  $t = +0$

$$i_L(+0) = 2 + A_1 + A_2,$$

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 1 \text{ A, откуда } A_1 + A_2 = -1.$$

Для определения  $A_1$  и  $A_2$  необходимо еще одно уравнение

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=+0} = -382A_1 - 2618A_2.$$

Для определения  $\frac{di_L}{dt}$  запишем второй закон Кирхгофа

$$E(+0) = R_1 i_1(+0) + R_2 i_L(+0) + L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=+0}.$$

Токи для момента  $t = +0$  найдем из послекоммутационной схемы для  $t=+0$ , когда индуктивность эквивалентна источнику тока, а ёмкость – источнику Э.Д.С. (рис. 10)

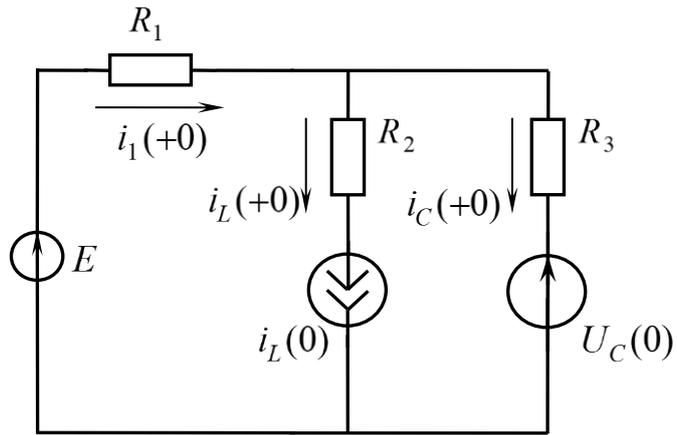


Рис. 10

Воспользовавшись методом наложения, получаем

$$i_1(+0) = \frac{E}{R_1 + R_3} + i_L(0) \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{u_C(0)}{R_1 + R_3} = \frac{60 + 20 - 20}{30} = 2(\text{A});$$

$$i_C(+0) = \frac{E}{R_1 + R_3} - i_L(0) \frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{u_C(0)}{R_1 + R_3} = \frac{60 - 10 - 20}{30} = 1(\text{A}).$$

Определив  $i_1(+0)$  находим  $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=+0}$ .

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=+0} = \frac{E(0) - R_1 i_1(+0) - R_2 i_2(+0)}{L} = \frac{60 - 20 - 20}{10^{-2}} = 2 \cdot 10^3 (\text{A}/\text{c}).$$

Таким образом, имеем два уравнения для определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -1 \\ -382A_1 - 2618A_2 = 2000. \end{cases}$$

Из первого уравнения  $A_2 = -1 - A_1$ , подставляем во второе

$$-382A_1 - 2618(-1 - A_1) = 2000;$$

$$A_1 = -0,275; A_2 = -0,725.$$

Весь ток

$$i_1 = 2 - 0,275e^{-382t} - 0,725e^{-2618t} (\text{A}).$$

### 5. Определим напряжение $u_C$

$$u_C = 40 + A_3 e^{-382t} + A_4 e^{-2618t}.$$

При  $t = +0$

$$u_C(+0) = 40 + A_3 + A_4;$$

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 20(\text{В}).$$

Откуда  $A_3 + A_4 = -20 \text{ В}$ .

Второе уравнение получим, взяв производную от решения

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=+0} = -382A_3 - 2618A_4.$$

Для определения  $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=+0}$  запишем первый закон Кирхгофа

$$i_1 = i_L + i_C = i_L + C \frac{du_C}{dt}, \text{ откуда } \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=+0} = \frac{i_1(0) - i_L(0)}{C} = 10^4 \frac{\text{В}}{\text{С}}$$

Таким образом, для определения  $A_3$  и  $A_4$  имеем уравнения

$$\begin{cases} A_3 + A_4 = -20 \\ -382A_3 - 2618A_4 = 10000. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$A_3 = -18,90;$$

$$A_4 = -1,10.$$

Всё напряжение

$$u_C = 40 - 18,90 e^{-382t} - 1,1 e^{-2618t} \text{ В.}$$

**6. Определяем  $i_L$  операторным методом, используя операторную схему (рис. 11)**

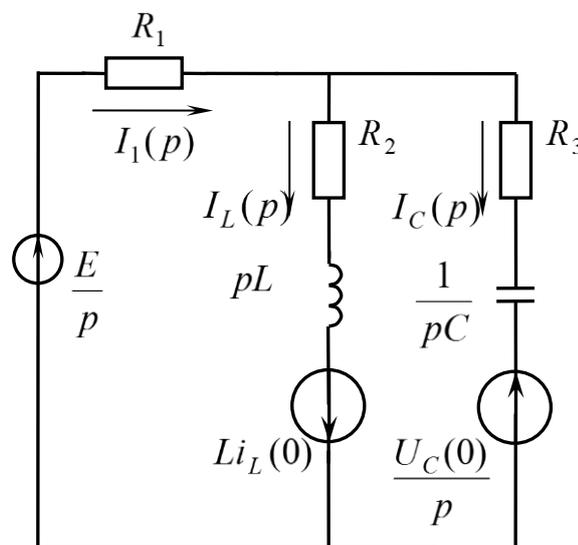


Рис. 11

$$\begin{aligned}
I_L(p) &= \frac{E/p}{R_1 + \frac{(R_2 + pL)(R_3 + \frac{1}{pC})}{R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}}} \cdot \frac{R_3 + \frac{1}{pC}}{R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}} + \frac{Li_L(0)}{pL + R_2 + \frac{R_1(R_3 + \frac{1}{pC})}{R_1 + R_3 + \frac{1}{pC}}} + \\
&+ \frac{U_C(0)/p}{R_3 + \frac{1}{pC} + \frac{R_1(R_2 + pL)}{R_1 + R_2 + pL}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + pL} = \\
&= \frac{E(R_3 + \frac{1}{pC})}{p \left[ R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + (R_1 + R_3) pL + \frac{R_1 + R_2}{pC} + \frac{L}{C} \right]} + \\
&+ \frac{Li_L(0)(R_1 + R_3 + \frac{1}{pC})}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + (R_1 + R_3) pL + \frac{R_1 + R_2}{pC} + \frac{L}{C}} + \\
&+ \frac{U_C(0) \cdot R_1}{p \left[ R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + (R_1 + R_3) pL + \frac{R_1 + R_2}{pC} + \frac{L}{C} \right]} = \\
&= \frac{E(R_3 pC + 1) + Li_L(0)[(R_1 + R_3) pC + 1] p + U_C(0) R_1 \cdot pC}{p \left\{ [(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) C + L] p + (R_1 + R_3) LC p^2 + R_1 + R_2 \right\}} = \\
&= \frac{60 + 15 \cdot 10^{-2} p + 3 \cdot 10^{-5} p^2}{p(3 \cdot 10^{-5} p^2 + 9 \cdot 10^{-2} p + 30)} = \frac{p^2 + 5 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 3 \cdot 10^3 p + 10^6)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.
\end{aligned}$$

Чтобы перейти от изображения к оригиналу, применим теорему разложения

$$i(t) = \sum_k \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

где  $p_k$  - корни уравнения  $F_2(p) = 0$ , т.е. уравнения

$$p(p^2 + 3 \cdot 10^3 p + 10^6) = 0.$$

Видно, что это уравнение совпадает с характеристическим уравнением классического метода.

Таким образом, корни:

$$p_1 = 0;$$

$$p_2 = -382 \text{ с}^{-1};$$

$$p_3 = -2618 \text{ с}^{-1}.$$

Находим  $F_1(p_k)$  и  $F_2'(p_k)$

$$F_1(p_1) = 2 \cdot 10^6; F_1(p_2) = 235924; F_1(p_3) = -4236076;$$

$$F_2' = 3p^2 + 6 \cdot 10^3 p + 10^6; F_2'(p_1) = 10^6; F_2'(p_2) = -854228; F_2'(p_3) = 5853772.$$

Подставляем эти значения в теорему разложения

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{2 \cdot 10^6}{10^6} e^{0t} + \frac{235924}{-854228} e^{0t} + \frac{-4236076}{5853772} e^{0t} = \\ &= 2 - 0,267 e^{-382t} - 0,724 e^{-2618t} \text{ А.} \end{aligned}$$

С учётом погрешностей вычислений, значения тока  $i_L$  рассчитанные классическим и операторным методами совпадают.

## 7. Аналогично определяем $u_C$ операторным методом.

Из схемы рис. 11 имеем

$$\begin{aligned} U_C(p) &= \frac{E/p}{R_1 + \frac{(R_2 + pL)(R_3 + 1/pC)}{R_2 + R_3 + pL + 1/pC}} \cdot \frac{R_2 + pL}{R_2 + R_3 + pL + 1/pC} \cdot \frac{1}{pC} - \\ &- \frac{Li_L(0)}{R_2 + pL + \frac{R_1(R_3 + 1/pC)}{R_1 + R_3 + 1/pC}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3 + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{1}{pC} - \frac{U_C(0)/p}{R_3 + 1/pC + \frac{R_1(R_2 + pL)}{R_1 + R_2 + pL}} \times \\ &\times \frac{1}{pC} + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{E(R_2 + pL) - Li_L(0)R_1 \cdot p - U_C(0)(R_1 + R_2 + pL)}{p\{[(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C + L]p + (R_1 + R_3)LCp^2 + R_1 + R_2\}} + \\ &+ \frac{U_C(0)}{p} = \frac{600 + 3 \cdot 10^{-1} p}{p(3 \cdot 10^{-5} p^2 + 9 \cdot 10^{-2} p + 30)} + \frac{20}{p} = \frac{10^4 p + 2 \cdot 10^7}{p(p^2 + 3 \cdot 10^3 p + 10^6)} + \frac{20}{p} = \\ &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)} + \frac{20}{p}. \end{aligned}$$

Корни  $F_2(p) = 0$  будут такими же, т.е.

$$p_1 = 0; p_2 = -382 \text{ c}^{-1}; p_3 = -2618 \text{ c}^{-1};$$

$$F_1(p_1) = 2 \cdot 10^7; F_1(p_2) = 16,18 \cdot 10^6; F_1(p_3) = -6,18 \cdot 10^6;$$

$$F_2'(p_1) = 10^6; F_2'(p_2) = -854228; F_2'(p_3) = 5853772.$$

По теореме разложения

$$u_C(t) = \frac{2 \cdot 10^7}{10^5} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{16,18 \cdot 10^6}{-854228} \cdot e^{-382 \cdot t} + \frac{-6,18 \cdot 10^6}{5853772} \cdot e^{-2618 \cdot t} + 20 =$$

$$= 40 - 18,94 \cdot e^{-382 \cdot t} - 1,06 \cdot e^{-2618 \cdot t}.$$

С учётом погрешности вычислений результаты совпадают.