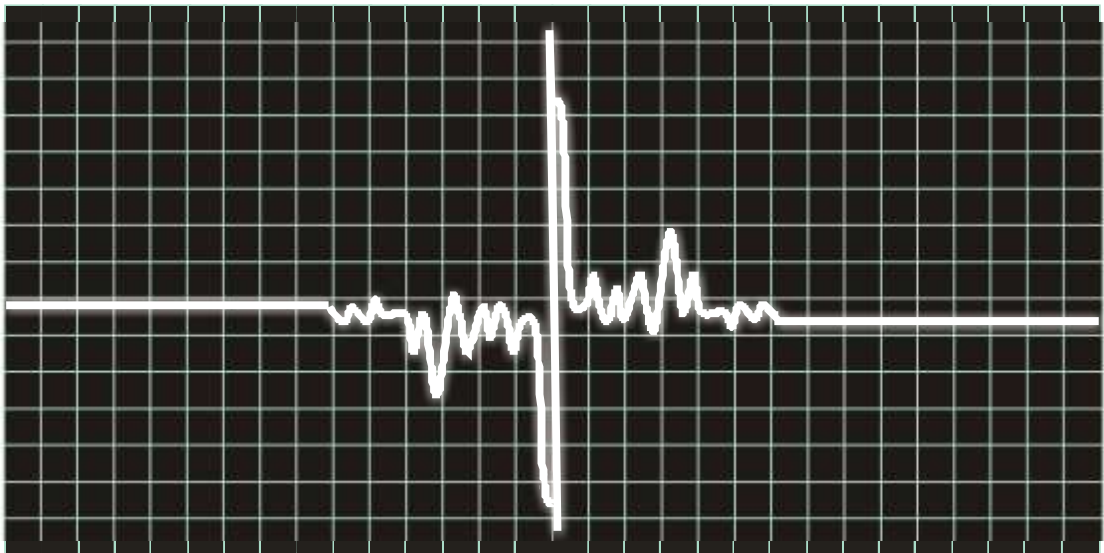


Р.В.СВЕРДЛОВ

**ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

ОСНОВЫ АНАЛИЗА, НАЧАЛА СИНТЕЗА



Нижний Новгород 2021

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА
Арзамасский политехнический институт
(филиал НГТУ им. Р.Е. Алексева)

Р.В.СВЕРДЛОВ

**ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
ОСНОВЫ АНАЛИЗА, НАЧАЛА СИНТЕЗА**

*Рекомендуется для студентов всех форм обучения направления 11.03.03
«Конструирование и технология электронных средств», а также может
использоваться аспирантами и инженерами*

Нижний Новгород 2021

УДК 62-50
ББК 32.965
С 242

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат технических наук, доцент кафедры «Микроэлектроника
и технология радиоаппаратуры»
СПбГЭТУ (ЛЭТИ) *В.В. Румянцев*;
профессор кафедры «Микроэлектроника и технология
радиоаппаратуры» СПбГЭТУ (ЛЭТИ) *В.Ю. Суходольский*

Свердлов Р.В.

С242 **Линейные системы автоматического управления. Основы
анализа, начала синтеза:** учеб. пособие. Изд. 2-е перераб. и доп./ Р.В.
Свердлов; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Нижний Новгород, 2021. – 159 с.
ISBN

Приведены теоретические сведения по разделам дисциплины «Основы автоматизации и системы автоматического управления». Рассмотрены основные задачи анализа и синтеза САУ, статические и динамические свойства линейных элементов и систем, применение преобразования Лапласа и Фурье для анализа динамики систем. Описаны основные соединения элементов и методы преобразования структурных схем, построение частотных и временных характеристик, методы их расчета. Материал каждой главы иллюстрирован достаточным для понимания числом примеров. В конце каждой главы приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы.

Рекомендуется для студентов всех форм обучения направления 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств», а также может использоваться аспирантами и инженерами.

Рис. 115. Табл. 4. Библиогр.: 10 назв.

УДК 62-50
ББК 32.965
С 242

ISBN

© Нижегородский государственный
технический университет
им. Р.Е. Алексеева, 2021
© Свердлов Р.В., 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	8
1.1. Основные понятия и определения	8
1.2. Основные принципы автоматического управления	12
1.3. Виды обратных связей	17
1.4. Элементы САУ	18
1.5. Классификация САУ	20
1.6. Основные законы управления	23
1.7. Анализ линейных непрерывных стационарных систем с сосредоточенными параметрами. Линеаризация	25
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	30
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	32
2.1. Методы решения линейных дифференциальных уравнений	32
2.2. Классический метод	32
2.3. Метод пространства состояний	34
2.4. Преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений	38
2.5. Динамические характеристики систем	41
2.6. Фундаментальные матрицы	44
2.7. Преобразования Лапласа в матричной форме	45
2.8. Определение фундаментальных матриц для линейных стационарных систем	47
2.9. Передаточные функции	49
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	54
3. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ, ИХ ЗВЕНЬЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ	56
3.1. Частотные характеристики систем	56
3.2. Логарифмические частотные характеристики	60
3.3. Понятие статической характеристики	61
3.4. Типовые динамические звенья	62
3.5. Характеристики динамических звеньев	64
3.6. Конструирование статических звеньев на операционных усилителях	70
3.7. Конструирование динамических звеньев на операционных усилителях.....	73
3.8. Структурная схема и ее преобразования	81

3.9. Структурные преобразования	84
3.10. Правила построения асимптотической ЛАХ	86
3.11. Передаточные функции для режима стабилизации и управления	87
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	89
4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ	92
4.1. Управляемость и наблюдаемость систем	92
4.2. Устойчивость систем.....	93
4.3. Определение устойчивости в малом по Ляпунову	94
4.4. Теорема Ляпунова об устойчивости в малом	95
4.5. Критерий устойчивости Гурвица	96
4.6. Критерий Михайлова	98
4.7. Критерий Найквиста	101
4.8. Логарифмический вариант критерия Найквиста	104
4.9. Запасы устойчивости	106
4.10. Построение областей устойчивости	107
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	112
5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА СИСТЕМ.....	115
5.1. Способы задания качества.....	115
5.2. Частотные методы анализа качества	118
5.3. Метод трапеций	122
5.4. Корневые методы оценки качества.....	125
5.5. Точность систем. Астатические системы	130
5.6. Особенности передаточных функций астатических систем	130
5.7. Динамическая точность	132
5.8. Метод коэффициентов ошибок и связь его с порядком астатизма	133
5.9. Понятие интегральных оценок качества	135
5.10. Виды интегральных оценок	136
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	138
6. ОСНОВЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ.....	141
6.1. Синтез САУ: постановка задачи	141
6.2. Методы синтеза корректирующих устройств.....	142
6.3. Метод желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики	143
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	151
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	152
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	153

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АПЧ	– автоматическая подстройка частоты
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика
ВЧХ	– вещественная частотная характеристика
Г	– гетеродин
ДЗ	– динамическое звено
ДС	– дифференциальная схема
ДУ	– дифференциальное уравнение
ЗВ	– задающий вал
ИУ	– измерительное устройство
ИПХ	– импульсно-переходная характеристика
К	– коэффициент передачи
КУ	– корректирующее устройство
КЧХ	– комплексная частотная характеристика
ЛАХ	– логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
ЛФХ	– логарифмическая фазочастотная характеристика
МЧХ	– мнимая частотная характеристика
НУ	– начальные условия
ОС	– обратная связь
ОУ	– объект управления
ОпУ	– операционный усилитель
ПФ	– передаточная функция
ПХ	– переходная характеристика
САУ	– система автоматического управления
СВ	– следящий вал
ТАУ	– теория автоматического управления
ТГ	– тахогенератор
УУ	– устройство управления
ФНЧ	– фильтр низких частот
ФЧХ	– фазочастотная характеристика
ХУ	– характеристическое уравнение
ЧД	– частотный дискриминатор
ЧЭ	– чувствительный элемент
ЧХ	– частотная характеристика

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном пособии изложены основные разделы теории автоматического управления, приведены методы анализа линейных непрерывных систем автоматического управления, проиллюстрированные соответствующими примерами; изложены основные аспекты синтеза систем.

Настоящее учебное пособие состоит из шести глав.

Первая глава содержит основные понятия и определения теории автоматического управления, знакомит студентов с терминологией, применяющейся далее, фундаментальными принципами управления, различными алгоритмами функционирования автоматических систем.

Вторая глава посвящена математическому описанию систем автоматического управления с помощью дифференциальных уравнений, передаточных функций, временных характеристик и фундаментальных матриц.

Третья глава знакомит читателя с частотными характеристиками систем, построениями их в линейном и логарифмическом масштабах, их использованием, преобразованием структурных схем, характеристиками звеньев систем автоматического управления. Отдельный параграф данной главы посвящен конструированию динамических звеньев с требуемыми параметрами с помощью радиотехнических элементов.

В четвертой главе рассмотрены вопросы управляемости, наблюдаемости, устойчивости систем, применение критериев устойчивости.

Пятая глава посвящена анализу качества систем. Рассмотрены частотные методы анализа качества, в частности, метод трапеций. Сделан обзор корневых методов оценки качества, интегральных оценок. Рассмотрено понятие *точности систем* автоматического управления, статизма и астатизма систем, приведен анализ передаточных функций астатических систем.

Шестая глава посвящена вопросам синтеза систем. Приведены виды корректирующих устройств, способы их включения, рассмотрен синтез

корректирующих устройств методом желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики.

Для облегчения восприятия материала студентами каждая глава содержит вопросы для самопроверки, примеры решения задач по тематике данной главы.

Приложение включает таблицы с указанием основных характеристик динамических звеньев систем и принципиальные схемы каскадов на операционных усилителях, реализующих функции динамических звеньев, с указанием их передаточных характеристик. Данная информация была предоставлена доктором технических наук Е.А. Никулиным.

Автор выражает благодарность доктору технических наук, профессору П.В. Пакшину, доктору технических наук, профессору Н.П. Ямпурину (Арзамасский политехнический институт (филиал НГТУ им. Р.Е. Алексеева)), доктору технических наук, профессору О.Ш. Даутову (Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева) за помощь, оказанную при написании данного учебного пособия.

1.ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Теория автоматического управления (ТАУ) изучает процессы управления в динамических системах, или системах автоматического управления (САУ).

Система автоматического управления (САУ) – соединение различных физических устройств в единый объект, который выполняет конкретную техническую задачу. Представляет собой совокупность *управляемого объекта* и управляющего устройства, которые взаимодействуют между собой в соответствии с заданным алгоритмом управления.

Теория автоматического управления рассматривает системы с общих позиций, независимо от их физической природы и конкретной реализации, и имеет дело с математическими моделями физических систем. При этом физическая природа объекта, описываемого данной динамической системой, не важна. Важной является только математическая структура объекта управления.

Управление – целенаправленное воздействие на объект для достижения поставленной цели. Нецеленаправленное воздействие – *возмущение*, или *помеха*.

Цель управления: поддержание заданного набора параметров в границах, заранее предписанных условиями эксперимента, то есть изменение динамики поведения физической системы в соответствии с требованиями проектировщика системы. Данная задача включает в себя две составные части:

- 1) получение математического описания динамических свойств объекта, подлежащего управлению;

2) нахождение средств достижения желаемого поведения объекта.

Первая часть задачи относится к компетенции специалистов в той области, к которой принадлежит описываемый объект. Здесь необходимо предсказать динамику поведения объекта с помощью математической модели с точностью не меньшей, чем требуемая точность управления.

Для решения второй части задачи требуется математический результат, то есть необходимо получить математически выраженный закон управления.

Физическая реализация закона управления называется регулятором или **устройством управления (УУ)**.

Центральную роль в ТАУ играет принцип обратной связи. Согласно этому принципу, закон управления должен формироваться в зависимости от текущего состояния системы.

Пример САУ: следящая система (рис. 1.1).

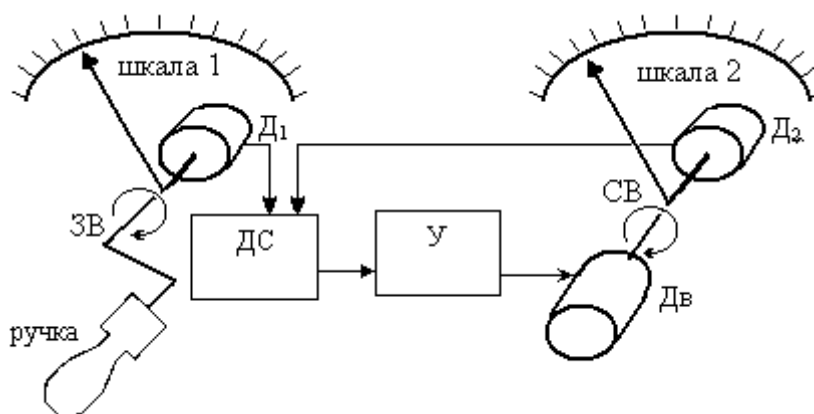


Рис. 1.1

Задача системы: следящий вал (СВ) должен повторять движение задающего вала (ЗВ). Входной параметр данной системы – угол поворота задающего вала, выходной параметр – угол поворота следящего вала, ЗВ вращается вручную, для поворота СВ используется двигатель (ДВ). Для измерения углов поворота СВ и ЗВ служат датчики (D_1 , D_2), преобразующие углы поворота в электрические сигналы. (Самым простым вариантом такого датчика может быть переменный резистор, сопротивление которого пропорционально углу поворота ручки его настройки).

Сигналы с датчиков D_1 и D_2 поступают на дифференциальную схему (ДС), то есть схему, выходной сигнал которой ε соответствует разности сигналов датчиков: $\varepsilon = U_{D1} - U_{D2}$.

Данный сигнал поступает на усилитель (У), преобразующий его в форму, пригодную для приведения в действие двигателя Дв, вращающего СВ. Таким образом, при равенстве сигналов D_1 и D_2 , то есть при совпадении положений СВ и ЗВ $U_{D1} = U_{D2}$, $\varepsilon = 0$ и двигатель не вращается. При разнице в положениях СВ и ЗВ $\varepsilon \neq 0$, и двигатель вращается до тех пор, пока не сведет эту разницу к нулю.

Состояние любой динамической системы может быть представлено множеством координат (переменных состояния), которые изменяются или остаются неизменными при действии или отсутствии возмущающих факторов.

Внутренние воздействия передаются от одной части системы к другой, обеспечивая желаемое качество протекающих в системе процессов. Они называются управляющими воздействиями.

Внешние воздействия разделяются на задающие и возмущающие (помехи).

Процесс управления заключается в целенаправленном воздействии на объект управления, приводящем к желаемому изменению управляемых координат. Качество управления определяется близостью текущих и заданных параметров системы.

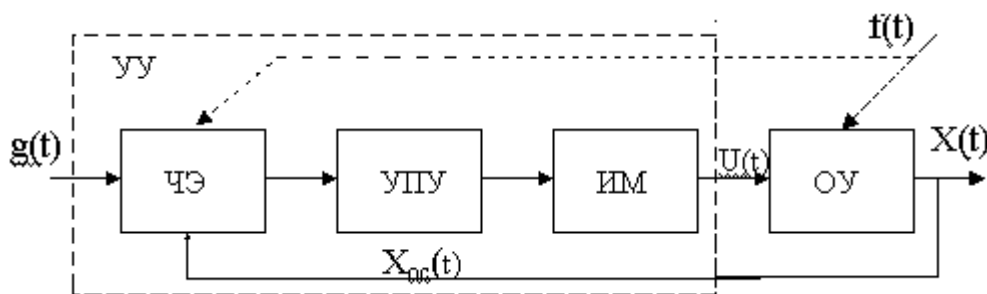


Рис. 1.2

На рис. 1.2 представлена функциональная схема одномерной САУ в общем виде.

Здесь: ЧЭ – чувствительный элемент (датчик). Предназначен для измерения задающего воздействия $g(t)$;

УПУ – усилительно-преобразующее устройство. Необходимо для формирования алгоритма управления: сравнения текущего и желаемого состояния объекта, выполнения операций по выработке управляющего воздействия ($U(t)$);

ИМ – исполняющий механизм. Приводит в действие управляющие органы, непосредственно воздействует на объект управления (ОУ);

$g(t)$ – задающее воздействие, $f(t)$ – возмущающее воздействие, $U(t)$ – управляющее воздействие, $X(t)$ – управляемая переменная или переменная состояния, $X_{oc}(t)$ – сигнал обратной связи.

В общем случае имеется множество этих воздействий, то есть вектора:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор состояния, размерностью } n,$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_k(t) \end{pmatrix} \text{ - вектор управления, размерностью } k.$$

Вводят также вектор измерений $Y(t)$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_r(t) \end{pmatrix}$$

Число компонент вектора измерений $r \leq n$. Здесь r – число измеряемых переменных состояния $X(t)$. Предполагается, что или все компоненты вектора $X(t)$ подлежат измерению, и тогда $r = n$, или некоторые компоненты вектора $X(t)$ нам не требуются, и тогда $r < n$. Функциональную схему в этом случае можно представить как на рис. 1.3.

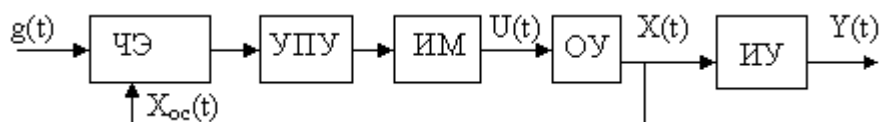


Рис. 1.3

Здесь ИУ – измерительное устройство.

На рис. 1.3 ЧЭ, УПУ, ИМ объединены в УУ – устройство управления. Таким образом, САУ является совокупностью УУ и ОУ.

Основными задачами теории автоматического управления являются: задача синтеза, задача анализа.

Задача синтеза: считаются известными функциональная схема САУ, объект управления и математическое описание процессов, протекающих в системе. Требуется определить качественные показатели процессов.

Задача анализа: считаются известными объект управления и показатели качества процесса управления. Требуется спроектировать управляющее устройство, т.е. задача состоит в составлении структурной схемы системы из функционально необходимых устройств и определения их параметров из условия получения системы с требуемыми параметрами и свойствами.

1.2. Основные принципы автоматического управления

1. Разомкнутый принцип управления

Алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования ОУ и не контролируется другими факторами: возмущениями, выходными координатами процесса и т.д. Здесь не имеется возможности компенсации возмущения в автоматическом режиме, не

обеспечивается стабилизация режимов. Функциональная схема приведена на рис. 1.4.

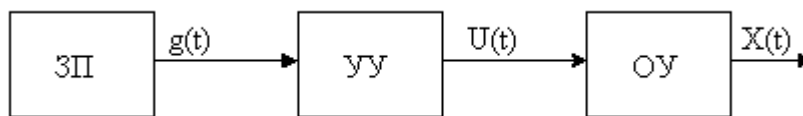


Рис. 1.4

Здесь ЗП – задатчик программы.

Примером такой системы могут являться часы.

Рассмотрим другой пример (см. рис. 1.5).

Пример 1.1

Система стабилизации скорости вращения

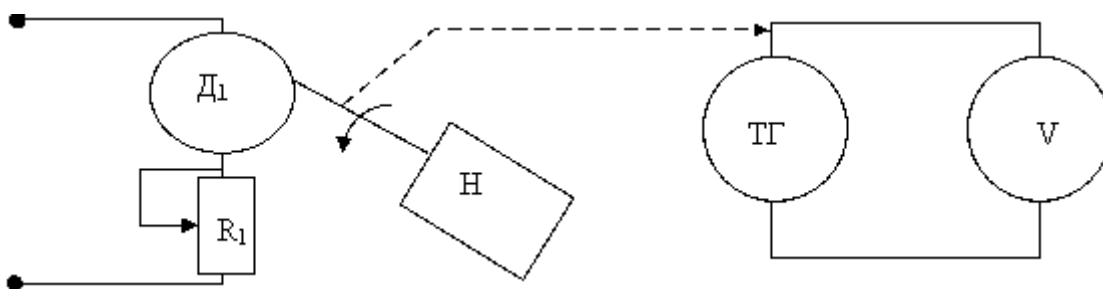


Рис. 1.5

Задача системы: двигатель D_1 должен вращать нагрузку с определенной постоянной скоростью (как, собственно, и в часах).

Для измерения скорости вращения используем тахогенератор ТГ (генератор, выходное напряжение которого пропорционально скорости его вращения). Напряжение с ТГ подаем на вольтметр V , проградуированный в единицах угловой скорости (например, в оборотах в минуту). Скорость вращения D_1 изменяем с помощью потенциометра R_1 , включенного в цепь питания D_1 . Чем нестабильнее параметры системы, чем больше возмущения, тем нестабильнее выходной параметр такой системы. Данный принцип применяется только при малых уровнях возмущающих факторов.

2. Замкнутый принцип, или принцип управления по отклонению

Управляющее воздействие $U(t)$, вырабатываемое УУ, является функцией разности задающего воздействия $g(t)$ и выходного параметра $X(t)$. Для создания этой разности применяется обратная связь, что показано на рис. 1.6.

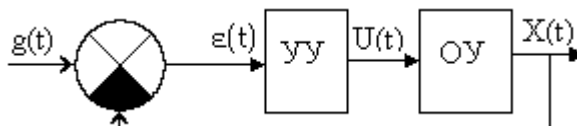


Рис. 1.6

Здесь $\varepsilon(t)$ – разностный сигнал, сигнал рассогласования, сигнал ошибки:

$$\varepsilon(t) = g(t) - X(t). \quad (1.1)$$

Здесь знаком \otimes обозначен сумматор, то есть устройство, выходной сигнал которого равен сумме входных. Знак \ominus показывает, что сигнал с контакта, обозначенного заштрихованным сектором, вычитается, и выходной сигнал равен разности входных.

Использование принципа обратной связи позволяет вычислять закон управления через текущее состояние системы, без информации о возмущающих сигналах.

Применим замкнутый принцип управления к приведенному ранее примеру, как показано на рис. 1.7. В данной схеме R_2 – задающий потенциометр.

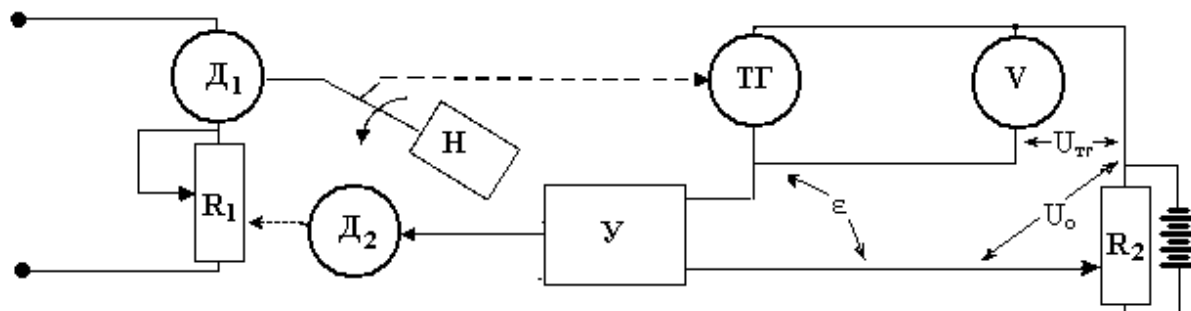


Рис. 1.7

Определенная скорость вращения нагрузки соответствует определенному напряжению на выходе тахогенератора ($U_{\text{тг}}$). Выставляем напряжение, соответствующее требуемой скорости вращения нагрузки, на R_2 (обозначим U_0). На входе усилителя $У$ будет формироваться разностное напряжение:

$$\varepsilon = U_0 - U_{\text{тг}}, \quad (1.2)$$

где $U_0 = \text{const}$ – соответствует нужной скорости вращения;

$U_{\text{тг}}$ – соответствует текущему значению скорости.

Это разностное напряжение усиливается с помощью $У$ и подается на двигатель $Д_2$, управляющий ручкой потенциометра R_1 . происходит изменение скорости вращения $Д_1$ до достижения равенства U_0 и $U_{\text{тг}}$, то есть $\varepsilon = 0$.

Таким образом, в разомкнутой системе управления (рис. 1.5) роль замыкающего звена выполняет регулировщик.

3. Принцип управления по возмущению

Обратная связь отсутствует, выход системы не связан со входом. Для управления контролируются сами возмущения. Функциональная схема таких систем показана на рис. 1.8.

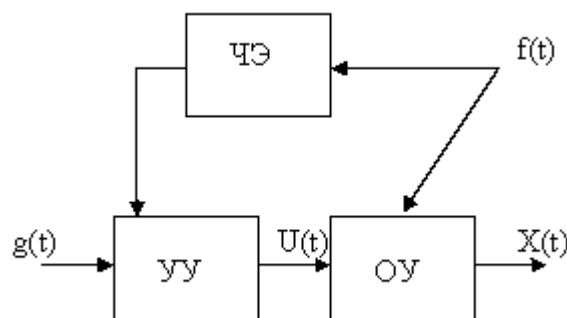


Рис. 1.8

Возмущающее воздействие измеряется датчиком (ЧЭ), реагирующим на те же помехи, что и ОУ. Управляющее воздействие является функцией помехи:

$$U(t) = F(f(t)). \quad (1.3)$$

Задача такой системы: компенсация влияния возмущающего действия на управляемую величину.

Управляющее устройство должно быть настроено так, чтобы сигнал управления зависел от сигнала, поступающего с ЧЭ, противоположно действию помехи. Например, если известно, что помеха уменьшает выходную величину системы, то сигнал $U(t)$ должен ее настолько же увеличивать. Построение такой системы возможно только при наличии точного знания характера возмущающего воздействия. При определенных условиях такие системы имеют существенно более высокую точность, чем управление по отклонению.

Точность компенсации зависит от точности знания характеристик объекта и точности измерения возмущающего воздействия. При этом возможна полная компенсация помех.

Недостатки данных систем:

1. Устраняются только основные возмущающие воздействия, по которым созданы компенсационные каналы;
2. Возможно появление отклонений при изменении характеристик ОУ и УУ в процессе эксплуатации;
3. Применимы только для объектов, характеристики помех которых точно известны.

4. Комбинированный принцип управления

Реализуются принципы управления и по отклонению, и по возмущению, как показано на рис. 1.9.

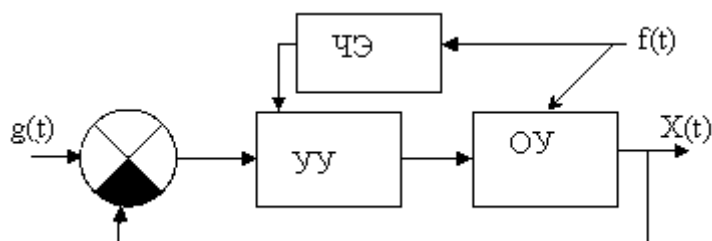


Рис. 1.9

Канал компенсации организуется для наиболее сильного возмущающего воздействия, природа которого известна. Остальные

возмущения компенсируются цепью обратной связи. Данный класс систем является наиболее совершенным, но и наиболее сложным.

1.3. Виды обратных связей

Отличительной чертой замкнутых САУ является наличие **обратных связей** (ОС). ОС представляет собой воздействие выходного сигнала какого-либо звена на его вход. Если воздействие совпадает по знаку с выходным сигналом – ОС называется **положительной**, если не совпадает – **отрицательной**. Отрицательная ОС осуществляет сравнение сигнала прямой цепи с сигналом обратной связи.

Жесткая обратная связь: передаваемый по ОС сигнал зависит только от выходной величины и не зависит от времени (например, зависит от расстояния до чего-либо и не зависит от скорости, то есть производной от него по времени).

Гибкая ОС реагирует на приращения воздействий.

Пример приведен на рисунке 1.10.

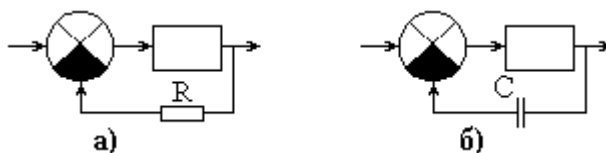


Рис. 1.10

На рис. 1.10, *а* показана жесткая ОС, осуществленная с помощью резистора R в цепи ОС. Выходная величина передается через R на вход звена. На рис. 1.10, *б* в цепи ОС находится конденсатор C , передающий на вход сигнал, не зависящий от уровня сигнала выхода, а зависящий от его изменения. Здесь существует гибкая ОС.

Главная ОС (внешняя) – охватывает всю систему, то есть передает сигнал выхода системы на ее вход.

Местная ОС – охватывает какую-либо ее часть, и предназначена для улучшения работы этой части.

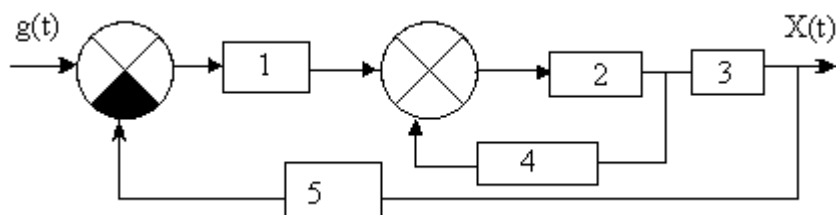


Рис. 1.11

На рис. 1.11 показаны: местная обратная связь (блоки 2 и 4), главная обратная связь (осуществлена с выхода системы, с сигнала $X(t)$, через блок 5, на ее вход).

Местные ОС могут быть как положительные, так и отрицательные. Главная ОС всегда отрицательная (иначе вместо системы автоматического управления получаем генератор, усиливающий любое случайное возмущение до предела, доступного данной системе).

1.4. Элементы САУ

Элементом САУ называется устройство, предназначенное для качественных и количественных преобразований физических величин и передачи преобразованного воздействия к последующему элементу. Их виды: исполнительные механизмы, корректирующие элементы, элементы настройки, датчики, элементы сравнения, усилители, защитные устройства, измерительные приборы.

Все элементы САУ обладают следующими характеристиками.

Статическая характеристика: зависимость выходной величины от входной в установившемся режиме, при постоянном входном воздействии:

$$X(t) = F(U(t)), \text{ при } dU(t) = 0. \quad (1.4)$$

Динамическая характеристика: зависимость выходной величины от входной в переходном режиме, когда входная и выходная величины меняются во времени:

$$X(t) = F(U(t)), \text{ при } dU(t) \neq 0. \quad (1.5)$$

Статический коэффициент передачи:

$$K_{\text{ст}} = X/U. \quad (1.6)$$

Динамический коэффициент передачи:

$$K_{\text{д}} = \frac{dx}{du} \approx \frac{\Delta x}{\Delta u}. \quad (1.7)$$

Погрешность: разность между текущим и номинальным (заданным) значением выходной величины.

Порог чувствительности: наименьшее изменение входной величины, способное вызвать появление изменения выходной величины (обусловленное, например, люфтом, трением, гистерезисом и т.д.).

Виды схем САУ: принципиальная, структурная, функциональная.

Принципиальная схема относится к той области техники, к которой принадлежит данная система: например, электрическая (ЭЗ), гидравлическая, и т.д.

Функциональная схема является условным изображением системы, которое отражает состав и порядок взаимодействия входящих в нее элементов.

Структурная схема: система представляется в виде эквивалентной цепи соединенных между собой звеньев, где каждое звено изображается в виде квадрата, с указанием передаточных функций, звеньев, связей между ними, направленности связей. На ней указываются входные и выходные величины звеньев. Элементы структурной схемы САУ должны обладать детектирующим свойством, то есть направленностью действия. Последующий элемент не оказывает влияния на предыдущий. При наличии такого влияния в системе его изображают с помощью обратных связей.

1.5. Классификация САУ

Системы автоматического управления по принципу управления подразделяются на следующие виды: разомкнутые, замкнутые, комбинированные (см. п. 1.2).

Замкнутые системы, в зависимости от входного (задающего) сигнала, делят на подвиды:

а. Системы стабилизации: $g = \text{const}$, цель управления – поддержание $X(t) = \text{const}$.

б. Системы программного управления: g – программа, закон. Цель: обеспечение изменения $X(t)$ по данному закону.

в. Следящие системы: $g(t)$ заранее не известно, цель – обеспечение $X(t) = g(t)$.

Как видим, во всех системах цель управления – обеспечение $X(t)=g(t)$. Строго говоря, это не так: входная и выходная величины могут даже измеряться в разных единицах. Необходимо обеспечить их пропорциональность: $X(t) \sim g(t)$.

В зависимости от способности приспосабливаться к изменяющимся условиям работы по мере накопления опыта САУ бывают адаптивными и неадаптивными.

В зависимости от количества управляемых (выходных) переменных: одномерные и многомерные. Одномерные САУ могут быть одноконтурными (без внутренних ОС) и многоконтурными (с внутренними ОС). Многомерные системы всегда многоконтурные.

Многомерные системы могут быть связанными и несвязанными, то есть осуществляется ли отдельное управление по каждой выходной переменной. Связанное управление применяется для обеспечения независимого управления по каждой координате и согласованию изменения управляемых переменных.

САУ делятся также в зависимости от математической модели.

Задача любой системы: каждому входному сигналу поставить в соответствие определенную функцию на выходе. Это соответствие между входными и выходными функциями устанавливается с помощью **математической модели**.

Таким образом, систему автоматического управления можно представить в виде, показанном на рис. 1.12.



Рис. 1.12

Здесь: $U(t)$ – входной сигнал,

$X(t)$ – выходной сигнал,

A – оператор, характеризующий систему.

Оператор A может быть функцией U , X , t , включать операции дифференцирования, интегрирования, может быть задан в вероятностной форме и т.д.

Таким образом,

$$X(t) = A[U(t)]. \quad (1.8)$$

По виду математической модели системы могут быть линейными и нелинейными.

Пусть $X_1(t)$, $X_2(t)$ - реакции системы на входные воздействия $U_1(t)$ и $U_2(t)$ соответственно:

$$A[U_1(t)] = X_1(t), \quad A[U_2(t)] = X_2(t). \quad (1.9)$$

Если входному сигналу $U(t) = C_1U_1(t) + C_2U_2(t)$, где C_1 , C_2 - постоянные коэффициенты, соответствует выходной сигнал $X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$ при всех значениях $U_1(t)$ и $U_2(t)$, система **линейна**:

$$A[C_1U_1(t) + C_2U_2(t)] = C_1AU_1(t) + C_2AU_2(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t). \quad (1.10)$$

Таким образом, в линейных системах осуществляется принцип суперпозиции. Если данный принцип выполняется только для определённых сигналов, то система является линейной только для них.

Обычно математической моделью САУ является система дифференциальных или интегрально-дифференциальных уравнений.

Линейные системы описываются с помощью системы линейных дифференциальных уравнений. (Дифференциальное уравнение называется линейным, если неизвестные и все их производные входят в него в первой степени и нет произведений неизвестных.)

Система, описываемая с помощью дифференциальных уравнений, называется *непрерывной*. В ней непрерывному изменению входных сигналов соответствует непрерывное изменение выходных сигналов.

Система, описываемая с помощью разностных уравнений, называется *дискретной*. К дискретным сигналам относятся релейные, импульсные, цифровые.

Стационарные системы: связь между входными и выходными сигналами не зависит от времени, то есть если ответом на входное воздействие $U(t)$ является сигнал $X(t)$, то ответом на $U(t + \tau)$, то есть такое же воздействие, задержанное на время τ , является $X(t + \tau)$ (такой же выходной сигнал, но пришедший позже на такое же τ). Вид выходного сигнала не зависит от момента приложения входного воздействия:

$$A[U(t + \tau)] = X(t + \tau). \quad (1.11)$$

Стационарные системы описываются с помощью дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если это условие не выполняется – система *нестационарная*, она описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

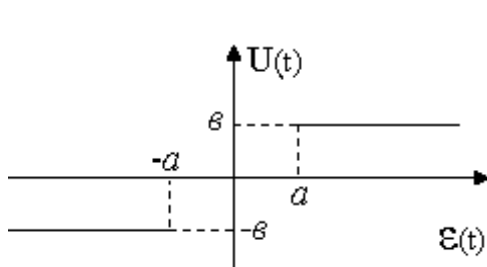
Система называется **детерминированной**, если каждому входному сигналу соответствует единственный выходной сигнал. В **недетерминированных** (стохастических) системах оператор связи между входом и выходом A носит вероятностный характер.

Статическая система: после окончания процесса, переходя из одного состояния в другое, система приходит в требуемое состояние с ошибкой, зависящей от величины входного воздействия и свойств самой системы. Если эта ошибка отсутствует – система **астатическая**.

1.6. Основные законы управления

Приведем зависимости управляющего сигнала $U(t)$, вырабатываемого УУ, от сигнала рассогласования $\varepsilon(t)$ (см. рис. 1.6)

1. Релейный закон:



$$U(t) = \begin{cases} v & \text{при } \varepsilon > a; \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| \leq a; \\ -v & \text{при } \varepsilon < -a \end{cases} \quad (1.12)$$

Область $\varepsilon = (-a \dots + a)$ называется зоной нечувствительности.

Рис. 1.13

2. Пропорциональный закон:

$$U(t) = K_0 \varepsilon(t). \quad (1.13)$$

3. Пропорционально-дифференциальный закон:

$$U(t) = K_0 \varepsilon(t) + K_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (1.14)$$

Составляющая $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ обеспечивает в законе управления опережающее воздействие.

4. Интегральный закон:

$$U(t) = K_2 \int_0^t \varepsilon(t) dt. \quad (1.15)$$

Закон обеспечивает в установившемся режиме, при $g(t)=\text{const}$, $X(\infty) = g$.

5. Пропорционально-интегральный закон.

$$U(t) = K_0 \cdot \varepsilon(t) + K_2 \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (1.16)$$

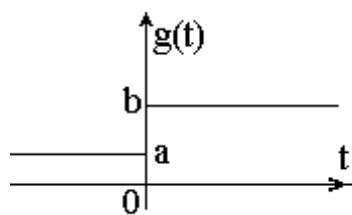
6. Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон:

$$U(t) = K_0 \varepsilon(t) + K_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_2 \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (1.17)$$

На САУ действуют два вида воздействий: задающее $g(t)$ и возмущающее $f(t)$. Задача системы: компенсировать $f(t)$ и как можно точнее реализовать $g(t)$.

Типовые воздействия на САУ:

1. Ступенчатое. График изображен на рис. 1.14:



$$g(t) = \{a, t \leq 0; b, t > 0\}. \quad (1.18)$$

Частный случай: единичная ступенчатая функция: $1(t)$.

Для неё $a = 0, b = 1$.

Рис. 1.14

2. Импульсное воздействие, или дельта-функция:

$$\delta(t) = \{0, t \neq 0; \infty, t = 0\}. \quad (1.19)$$

Является производной от ступенчатой функции:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (1.20)$$

Представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечно большой амплитудой. Площадь его равна 1.

3. Гармоническое воздействие:

$$g(t) = \begin{cases} A \cdot \sin \omega t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

4. Степенное воздействие.

$$g(t) = \begin{cases} C \cdot t^k, & k = 0, 1, 2, \dots \text{ при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

При $k = 0$ степенное воздействие вырождается в ступенчатое, при $k = 1$ в линейное.

1.7. Анализ линейных непрерывных стационарных систем с сосредоточенными параметрами. Линеаризация

Из предыдущего параграфа можно определить вид систем автоматического управления, подлежащих здесь анализу: непрерывные – описываются системой дифференциальных уравнений, линейные – дифференциальные уравнения линейные, стационарные – связь между входом и выходом не зависит от времени, с сосредоточенными параметрами – описание происходит с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, без частных производных. Уравнениями в частных производных в радиотехнике описывают СВЧ-системы, с распределёнными параметрами.

Работа всякой САУ может быть описана математическими уравнениями, связывающими входные и выходные координаты (*математической моделью*). Уравнения установившихся режимов (*уравнения статики*) обычно являются алгебраическими линейными уравнениями типа $X_{\text{вых}} = a + bX_{\text{вх}}$, то есть это уравнения прямых. Уравнения переходных процессов (*уравнения динамики*) обычно являются дифференциальными. У линейных систем уравнения динамики линейны.

Подавляющее большинство реально существующих в природе систем являются нелинейными. А общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не существует. Однако в большинстве случаев удается свести исследование нелинейной системы к исследованию линейной, т. е. заменить нелинейное дифференциальное уравнение приближенным линейным, решение которого с достаточной точностью соответствует исходному. Этот процесс называется *линеаризацией*.

Пример 1.2

Система автоматической подстройки частоты радиоприемника (АПЧ)

Функциональная схема системы АПЧ приведена на рис. 1.15.

Здесь: СМ – смеситель; УПЧ – усилитель промежуточной частоты; ЧД – частотный дискриминатор; ФНЧ – фильтр низких частот; Г – гетеродин.

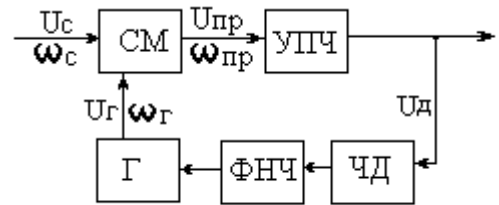


Рис. 1.15

Входной сигнал U_S с несущей частотой ω_c преобразуется в сигнал промежуточной частоты $U_{ПР}$ (частота $\omega_{ПР}$) и усиливается в УПЧ, настроенном на стабильную частоту $\omega_{ПР0}$. Частота сигнала, поступающего с Г, должна быть такой, чтобы частота на входе СМ $\omega_{ПР} = \omega_c - \omega_\Gamma$ была равна $\omega_{ПР0}$. Частота сигнала ω_c может отличаться от заданной (ω_{c0}) на $\Delta\omega_c$, вследствие неустойчивости. Частота гетеродина также может отличаться от номинальной на $\Delta\omega_\Gamma$, т. е. $\omega_\Gamma = \omega_{\Gamma0} + \Delta\omega_\Gamma$. Итак, промежуточная частота:

$$\omega_{ПР} = \omega_{ПР0} + \Delta\omega = \omega_c - \omega_\Gamma = \omega_{c0} + \Delta\omega_c - \omega_{\Gamma0} - \Delta\omega_\Gamma = \omega - \omega_{\Gamma0} + \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega = \Delta\omega_c - \Delta\omega_\Gamma$ - отклонение промежуточной частоты.

Частотный дискриминатор, входящий в состав АПЧ, описывается дискриминационной характеристикой, т. е. зависимостью выходного

напряжения от частотной расстройки: $U_{\text{чд}} = F(\Delta\omega)$. Ее график приведен на рис. 1.16.

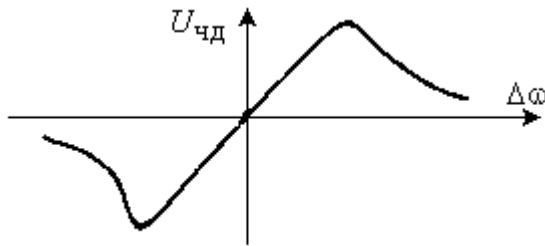


Рис. 1.16

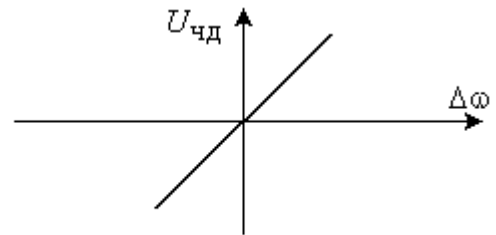


Рис. 1.17

Если $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{про}}$, то $\Delta\omega = 0$, и напряжение на выходе ЧД равно нулю, и система ОС не изменяет частоту Γ . Если $\omega_{\text{пр}} \neq \omega_{\text{про}}$, то на выходе ЧД появляется напряжение $U_{\text{чд}}$, величина и знак которого зависят от $\Delta\omega$. Дискриминационная характеристика является нелинейной. При использовании *первого способа линеаризации* нелинейная зависимость заменяется линейной по касательной к рабочей точке кривой (т.е. к точке, где отклонение отсутствует, у нас – где $\Delta\omega = 0$). При этом дифференциальные уравнения системы получаются линейными (см. рис. 1.17)

Это допущенные возможно только при условии достаточной малости отклонения переменных от установившегося значения. Однако это условие обычно выполняется: этого требует сама идея замкнутой САУ.

Дискриминационная характеристика при этом будет описываться следующей формулой:

$$U_{\text{чд}} = K_{\text{чд}} \Delta\omega, \quad (1.23)$$

где $K_{\text{чд}}$ - коэффициент передачи частотного дискриминатора.

Выходное напряжение ЧД прикладывается к управляющему элементу гетеродина (например, к варикапу, емкость которого пропорциональна напряжению, приложенному к нему). Изменение этого напряжения ведет к перестройке Γ , т. е. к изменению ω_{Γ} .

Итак, $\Delta\omega_{\Gamma} = K_{\Gamma} \cdot U_{\text{чд}}$, где K_{Γ} - коэффициент передачи гетеродина.

Схема описывается уравнениями:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_c - K_{\text{чд}} K_{\Gamma} \Delta\omega; \quad (1.24)$$

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\omega_c}{1 + K_{\text{чд}} K_{\Gamma}}. \quad (1.25)$$

Второй способ линеаризации

Пусть звено САУ описывается нелинейным дифференциальным уравнением произвольного вида, например:

$$F(X_1, X_2, X_2^{(1)}, X_3, X_3^{(1)}, X_3^{(2)}, X_3^{(3)}) = \varphi(U, U^{(1)}), \quad (1.26)$$

где X_1, X_2, X_3 – выходные переменные (то есть система многомерна);

U – входная переменная;

индексы(1), (2) и т.д. – порядок производной.

Установившийся процесс происходит при некоторых значениях:

$X_{10}, X_{20}, X_{30}, U_0$ (рабочая точка, смотреть предыдущий способ).

Уравнение установившегося состояния:

$$F(X_{10}, X_{20}, 0, X_{30}, 0, 0, 0) = \varphi(U_0, 0). \quad (1.27)$$

Процесс установился, значит, изменений нет, следовательно, производные равны нулю.

Обозначим отклонения от установившегося состояния:

$\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3$. Сами переменные теперь выглядят:

$$X_1 = X_{10} + \Delta X_1, X_2 = X_{20} + \Delta X_2, X_3 = X_{30} + \Delta X_3.$$

Разложим функцию F в ряд Тейлора по степеням указанных ранее отклонений. При этом все производные рассматриваем тоже как самостоятельные переменные:

$$\begin{aligned} & F(X_{10}, X_{20}, 0, X_{30}, 0, 0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \right)_0 \Delta X_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2^{(1)}} \right)_0 \Delta X_2^{(1)} + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3} \right)_0 \Delta X_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3^{(1)}} \right)_0 \Delta X_3^{(1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3^{(2)}} \right)_0 \Delta X_3^{(2)} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3^{(3)}} \right)_0 \Delta X_3^{(3)} + \end{aligned} \quad (1.28)$$

+ члены высшего порядка малости = $\varphi(U_0, U^{(1)})$,

где $\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)_0$ обозначена $\frac{\partial F}{\partial X_1}$, взятая в установившемся состоянии.

Следовательно, все частные производные здесь представляют собой постоянные коэффициенты. (Они будут переменными, только если функция F содержит t в явном виде или если установившийся процесс определяется переменными значениями X_{10}, X_{20}, X_{30}).

Члены высшего порядка малости состоят из произведений и степеней малых отклонений $\Delta X_1, \Delta X_2$ и т.д., поэтому они пренебрежимо малы.

Вычтя из полученной формулы уравнение установившегося состояния, получим линеаризованное уравнение динамики:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)_0 \Delta X_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)_0 \Delta X_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2^{(1)}}\right)_0 \Delta X_2^{(1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3}\right)_0 \Delta X_3 + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3^{(1)}}\right)_0 \Delta X_3^{(1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3^{(2)}}\right)_0 \Delta X_3^{(2)} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_3^{(3)}}\right)_0 \Delta X_3^{(3)} = \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$= \varphi(u, u^1) - \varphi(u_0, 0).$$

Зная частные производные, можно проанализировать процессы, происходящие в системе.

Отличия этого уравнения от исходного:

1. Уравнение приближённое, так как отброшены члены высшего порядка малости.

2. Неизвестными являются не X_1, X_2 и т.д., а их отклонения от установившихся значений: $\Delta X_1, \Delta X_2 \dots$

Такое равенство называется линеаризованным уравнением в отклонениях, или в вариациях.

Следует отметить, что существуют системы, не поддающиеся линеаризации: так называемые *существенно нелинейные* системы. К ним относятся дискретные системы, например, релейные. Выходной сигнал таких систем имеет разрыв производной.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется управлением?
2. Что называется автоматическим управлением?
3. Что является целью управления?
4. Каковы виды внешних воздействий?
5. Каковы должны быть действия системы автоматического управления по отношению к внешним воздействиям?
6. Что называется переменными состояния?
7. Чем отличается вектор состояния от вектора измерений?
8. В каких случаях возможно применение разомкнутого принципа управления?
9. За счет чего создается управляющее воздействие при замкнутом принципе управления?
10. Устройство, представленное на рис. 1.9, является разомкнутой или замкнутой системой?
11. Что называется обратной связью?
12. Чем гибкая обратная связь отличается от жесткой?
13. Какова должна быть главная обратная связь? С чем это связано?
14. Какими характеристиками обладают элементы САУ?
15. Чем структурная схема САУ отличается от функциональной?
16. Что называется математической моделью САУ?
17. Что является математической моделью линейной системы?
18. Что является математической моделью непрерывной системы?
19. Что является математической моделью дискретной системы?
20. Входной сигнал системы составляет 2 В, выходной 6 В. При подаче на вход 4 В выходной сигнал составил 10 В. Система является линейной или нелинейной? Почему?

21. Стационарной или нестационарной системой является радиоприемник, если входным сигналом считать:
- а) сигнал от радиовещательной станции,
 - б) управляющий сигнал от органов управления?
22. Что называется законом управления?
23. Как связаны функции $1(t)$ и $\delta(t)$?
24. Что называется линеаризацией? Для чего она применяется?
25. При каком условии возможна линеаризация?
26. Что называется линеаризованным уравнением в вариациях? Как его составить?
27. В каких случаях линеаризация невозможна?

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Методы решения линейных дифференциальных уравнений

Введём обозначения: $U(t)$ – входной (управляющий) сигнал САУ, $X(t)$ – выходной (управляющий) сигнал САУ (или входная и выходная переменные).

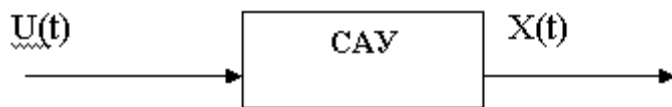


Рис. 2.1

Чтобы проанализировать поведение системы, оценить её качественные и количественные показатели, следует оценить, как

изменяется управляемая переменная при заданной структуре и параметрах, при заданном управляющем воздействии.

В общем виде САУ описывается уравнением:

$$a_0 X^{(n)}(t) + a_1 X^{(n-1)}(t) + \dots + a_n X(t) = b_0 U^{(m)}(t) + b_1 U^{(m-1)}(t) + \dots + b_m U(t), \quad (2.1)$$

где n, m – порядок производной, $X^{(n)}(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$.

Выходная переменная системы $X(t)$ неизвестна.

Методы решения данного дифференциального уравнения:

классический, преобразования Фурье, преобразования Лапласа, численные методы.

2.2. Классический метод

Операция дифференцирования записывается буквой p в степени, соответствующей порядку производной:

$$p = \frac{d\dots}{dt}, p^n = \frac{d^n \dots}{dt^n}, \frac{1}{p} = \int \dots dt \quad (2.2)$$

При этом p принято рассматривать как обычную алгебраическую величину, на которую распространяются обычные арифметические действия.

Теперь дифференциальное уравнение выглядит так:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) U(t). \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t), \quad (2.4)$$

где $x_{\text{св}}(t)$ - свободная составляющая (переходной режим);

$x_{\text{вын}}(t)$ – вынужденная составляющая (установившейся режим), она определяется видом входного воздействия $U(t)$.

Для типовых воздействий:

$$\text{при } U(t) = A \sin \omega_1 t \quad x_{\text{вын}}(t) = B \sin (\omega_1 t + \varphi). \quad (2.5)$$

Это справедливо, если $j\omega$ не является корнем характеристического уравнения, которое выглядит:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.6)$$

$$\text{Для } U(t) = P(t)e^{kt} \quad x_{\text{вын}}(t) = Q(t)e^{kt}. \quad (2.7)$$

Это справедливо, если k не является корнем характеристического уравнения.

В (2.7) $P(t)$, $Q(t)$ – полиномы. Их степени одинаковы, коэффициенты отличаются. Для их нахождения необходимо подставить корни уравнения в правую и левую части, из получаемого тождества составить систему уравнений, из которой и находятся коэффициенты полиномов.

Для $U(t) = \delta(t)$ $x_{\text{вын}}(t)$ определяют при входном сигнале $x(t) = 1(t)$, затем полученную функцию дифференцируют. Нахождению выходного сигнала для $U(t) = 1(t)$ будет посвящён п. 2.5.

Свободная составляющая $x_{\text{св}}(t)$ определяется корнями характеристического уравнения p_i :

$$x_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \exp(p_i t), \quad (2.8)$$

где p_i – корни характеристического уравнения (2.6);

C_i – постоянные интегрирования, находящиеся из начальных условий.

Поскольку система линейна, к ней применим принцип суперпозиции, поэтому возможно разделение переходного и установившегося процессов:

$$x(t) = x_{\text{вын}}(t) + x_{\text{св}}(t) = x_{\text{вын}}(t) + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (2.9)$$

Для нахождения постоянных C_i используются начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x(0) = x_0, x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (2.10)$$

Начальные условия накладываются из физических соображений или находятся из дифференциального уравнения. Дифференцируя уравнение (2.9) по времени $n-1$ раз и используя начальные условия, получают n алгебраических уравнений, куда входят n неизвестных постоянных интегрирования. Совместное решение этих уравнений позволяет определить коэффициенты C_i .

Если существуют комплексно-сопряжённые корни $p_i = \alpha \pm j\beta$, в решении им соответствуют слагаемые вида:

$$Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi). \quad (2.11)$$

Если p_i – действительный корень кратности k , ему соответствует слагаемое:

$$e^{p_i t} (C_{i0} + C_{i1}t + C_{i2}t^2 + \dots + C_{i2}t^2 + \dots + C_{i(k-1)}t^{k-1}). \quad (2.12)$$

В (2.11) и (2.12) A , φ , C_{ij} – постоянные интегрирования, которые также находятся из начальных условий.

2.3. Метод пространства состояний

Метод основан на понятии состояния системы.

Рассмотрим пример, представленный на рис. 2.2. Груз массой m подвешен на пружине с коэффициентом упругости C , движется в трубе с коэффициентом трения о стенки K . Запишем дифференциальное уравнение движения системы: уравнение равновесия сил, приложенных к грузу.

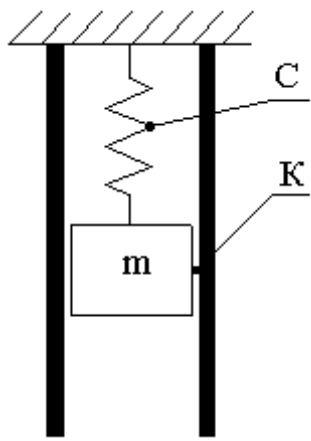


Рис. 2.2

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + K \frac{dx(t)}{dt} + Cx(t) = u(t) \quad (2.13)$$

В данном дифференциальном уравнении обозначено:

$x(t)$ – перемещение груза; $\frac{d\dot{x}(t)}{dt}$ – скорость движения

груза; $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ – его ускорение; $u(t)$ – вынуждающая

сила, выводящая груз из положения равновесия.

Данная система может характеризоваться перемещением ($x(t)$) и скоростью $\left(x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right)$.

Введём переменные состояния, количество которых должно быть равно порядку дифференциального уравнения:

$$x_1 = x(t), \quad x_2 = x'(t). \quad (2.14)$$

Составим систему уравнений, продифференцировав первую и вторую переменные:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -\frac{K}{m} x_2 - \frac{C}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t). \end{cases} \quad (2.15)$$

Получаем систему из двух уравнений первого порядка. Имея дифференциальное уравнение n -го порядка, мы можем получить систему из n уравнений первого порядка.

Таким же дифференциальным уравнением, и соответственно такой же системой, можно описать четырёхполюсник, представленный на рис. 2.3.

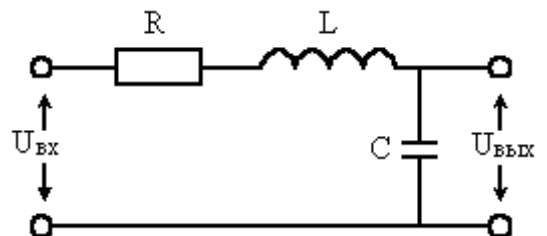


Рис. 2.3

Здесь входная величина $u(t) = U_{\text{вх}}$ (напряжение на входе схемы),
 выходная $x(t) = U_{\text{вых}}$ (напряжение на выходе).

Дифференциальное уравнение данной схемы выглядит так:

$$LCx''(t) + RCx'(t) + x(t) = u(t). \quad (2.16)$$

Таким образом, при учёте соответствия коэффициентов между уравнениями (2.13) и (2.16), данные расчеты справедливы для обеих схем.

Полученную систему уравнений запишем в матричной форме. Для этого введём вектор – столбец координат состояния:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Продифференцировав $X(t)$, получим матричную запись системы (2.15):

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t), \quad (2.18)$$

или

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (2.19)$$

Здесь A – **матрица состояния**, или матрица коэффициентов координат состояния. Составляющие матрицы A – коэффициенты правых частей уравнения. B – **матрица коэффициентов управляющих воздействий**.

Умножая первую строку A на вектор X , получаем первое уравнение системы (2.15), вторую – второе .

Матрица B имеет один столбец, так как $u(t)$ скалярная величина. Если бы в примере было u_1 и u_2 , матрица B также имела бы два столбца.

В математическую модель входит также **матрица состава измерений** C . Пусть измерению доступна только одна переменная, например, скорость $x'(t) = x_2$.

Вектор измерений $Y(t)$ будет определяться:

$$Y(t) = y_1(t) = x_2 = CX(t). \quad (2.20)$$

Отсюда видим:

$$C = [0 \ 1] \quad CX(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2. \quad (2.21)$$

При измерении двух координат (x_1 и x_2) имеем:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Вектор измерений может также включать в себя компоненты управляющего воздействия $U(t)$. Тогда он записывается:

$$Y(t) = CX(t) + DU(t). \quad (2.23)$$

В этом случае схема, представленная на рис. 1.3, выглядит так:

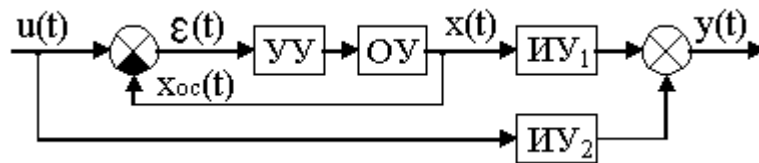


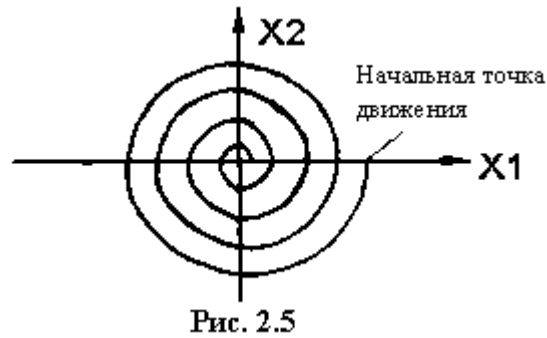
Рис. 2.4

Итак, модель САУ включает в себя:

уравнение состояния $X'(t) = AX(t) + BU(t)$, уравнение измерения $Y(t) = CX(t) + DU(t)$, начальные условия и диапазон допустимых уравнений.

Любая система, представленная дифференциальным уравнением n -го порядка, может быть представлена математической моделью пространства состояний размерностью n . Если порядок дифференциального уравнения $n = 2$, пространством состояний является фазовая плоскость, по осям которой откладываются переменные состояния. Движение системы в фазовой

плоскости называется *фазовой траекторией*. На рис. 2.5 представлено движение систем, приведенных на рис. 2.2 и рис. 2.3.



2.4. Преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений

Пусть имеем некую функцию, зависящую от времени: $f(t)$.

Прямое преобразование Лапласа позволяет получить из нее другую функцию:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \text{ или } L[f(t)] = F(s). \quad (2.24)$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет получить из функции с переменной s функцию, зависящую от времени:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{st} ds, \text{ или } L^{-1}[F(s)] = f(t). \quad (2.25)$$

Здесь C - действительная часть переменной Лапласа:

$$s = C + j\omega, \quad (2.26)$$

C – представляет собой так называемую абсциссу абсолютной сходимости, которая выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство $\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-ct} dt < \infty$.

Для большинства функций, используемых в ТАУ, $C = 0$.

Преобразование Лапласа позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению алгебраического уравнения, т.е. операции дифференцирования и интегрирования оригиналов $f(t)$ заменить алгебраическими операциями умножения и деления изображений $F(s)$.

Как и для скалярного случая, вводится преобразование Лапласа для векторных величин. Для вектора $X(t)$ запишем:

$$X(s) = \int_0^{\infty} X(t)e^{-st} dt, \quad (2.27)$$

где $X(s)$ - вектор, компоненты которого являются изображениями компонент вектора $X(t)$ по Лапласу.

Тогда изображения производных и интегралов функции $f(t)$ будут выглядеть:

$$L[f'(t)] = sF(s), \quad L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s), \quad L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad (2.28)$$

Основные свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности:

$$L\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(s), \quad (2.29)$$

где a_i - постоянные коэффициенты.

2. Свойство дифференцирования и интегрирования:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(s) - \sum_{k=1}^n S^{(n-k)} f^{(k-1)}(0), \quad (2.30)$$

где $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{(k-1)} f(t)}{dt}$, $f(0) = f(t)$ при $t = 0$,

$$L\left[\int \dots \int f(t) dt^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(0)}{s^{n-k+1}}, \quad (2.31)$$

где $f_{(t)}^{(-k)} = \int \dots \int f(t) dt^k$.

3. Свойство начальных и конечных значений:

$$\lim_{t \rightarrow 0(\infty)} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty(0)} sF(s). \quad (2.32)$$

Поведение оригинала в нуле определяет поведение изображения в бесконечности и наоборот.

4. Свойство масштабов:

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (2.33)$$

5. Теорема запаздывания:

$$L[f(t + \tau)] = F(s)e^{-s\tau}. \quad (2.34)$$

6. Свойство нулей и полюсов:

Если $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, где $B(s)$ и $A(s)$ - полиномы степеней s (т.е. если есть

четко выраженные числитель и знаменатель), то корни числителя (уравнения $B(s) = 0$) - называются **нулями изображения**. Соответственно корни знаменателя ($A(s) = 0$) - **полюсами изображения**.

Изображения типовых воздействий:

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad (2.35)$$

$$L[\delta(t)] = 1, \quad (2.36)$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (2.37)$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (2.38)$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.39)$$

Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразований

Лапласа

Дано дифференциальное уравнение вида (2.1):

1. Находим изображения для функций $U(t)$ и $X(t)$.

Получаем $U(s)$ и $X(s)$. (Известно только $U(t)$, поэтому изображение $U(s)$ получаем только для него; $X(t)$ необходимо найти, и $X(s)$ просто записываем).

Получаем уравнение:

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)X(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)U(s) + R_0(s), \quad (2.40)$$

где $R_0(s)$ - член, учитывающий начальные условия.

2. Находим решение данного алгебраического уравнения в виде:

$$X(s) = \frac{B(s)U(s) + R_0(s)}{A(s)}, \quad (2.41)$$

где $A(s) = a_0s^n + \dots + a_n$, $B(s) = b_0s^m + \dots + b_m$.

3. Определяем оригинал путем обратного преобразования Лапласа:

$$X(t) = L^{-1}[X(s)]. \quad (2.42)$$

Этот пункт является самым трудным в данном процессе.

2.5. Динамические характеристики систем

Динамической характеристикой САУ – называется зависимость управляемой величины для любого момента времени от задающего воздействия в переходном режиме. Виды динамических характеристик:

1. Переходная характеристика

Реакция системы на ступенчатое единичное воздействие на входе при нулевых начальных условиях:

$$h(t) = X(t) \text{ при } U(t) = 1(t). \quad (2.43)$$

Ступенчатое воздействие является наиболее неблагоприятным режимом работы системы. Единичная амплитуда входного воздействия

позволяет легко определять коэффициент усиления системы: после прекращения переходных процессов амплитуда сигнала на выходе будет равна коэффициенту усиления.

При наличии у системы нескольких входов и выходов говорят о матричной переходной характеристике:

$$H(t) = [h_{ij}(t)]. \quad (2.44)$$

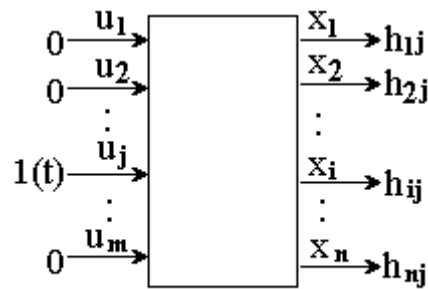


Рис. 2.6

Каждый элемент матричной переходной характеристики h_{ij} является реакцией в момент времени t i -й компоненты выходной переменной, когда j -й компонентой входной переменной является $1(t)$, а остальные компоненты равны нулю, как показано на рис. 2.6. По переходной характеристике определяют показатели качества САУ: время переходного процесса $t_{пп}$, перерегулирование $\sigma\%$, а также вид кривой переходного процесса (см. рис. 2.7):

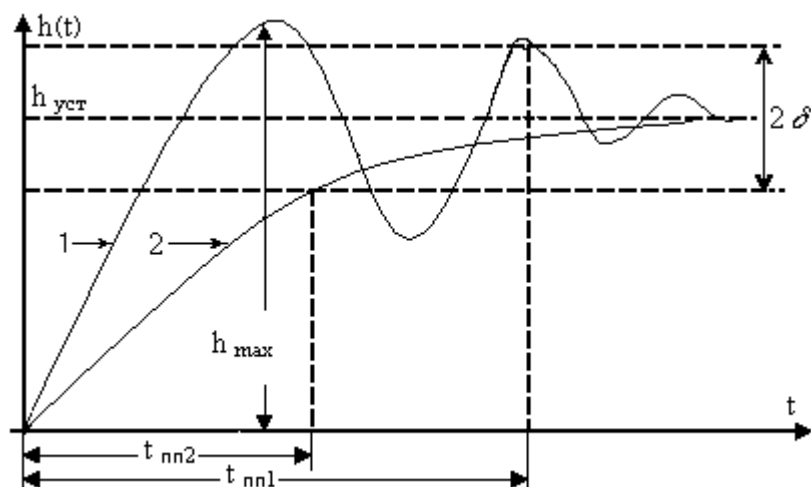


Рис. 2.7

Время переходного процесса $t_{\text{пн}}$ - минимальное время, при котором процесс входит в трубку точности и больше из нее не выходит.

Трубка точности: 2δ , где $\delta = \pm 5\%$ от $h_{\text{уст}}$,

где $h_{\text{уст}}$ - установившееся значение переходной характеристики.

Определяется из дифференциального уравнения (2.1) при $t \rightarrow \infty$. Поскольку переходной процесс в системе закончился, изменений нет, и производные $X'(t) = X''(t) = \dots = X^{(n)}(t) = 0$. Входной же сигнал равен единице: $U(t) = 1(t)$.

Следовательно,

$$h_{\text{уст}} = \frac{b_m}{a_n}. \quad (2.45)$$

Перерегулирование:

$$\sigma = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} 100\%. \quad (2.46)$$

Вид кривой переходного процесса: на рис. 2.7 показан немонотонный процесс 1, имеющий время переходного процесса $t_{\text{пн1}}$ и перерегулирование, определяемое по формуле (2.46.), и монотонный процесс 2 с временем $t_{\text{пн2}}$ и перерегулированием $\sigma = 0$.

Методы определения $h(t)$:

- 1) экспериментальный;
- 2) решение дифференциального уравнения при $U(t) = 1(t)$.

2. Импульсно-переходная характеристика, или весовая функция

Реакция системы на импульсное воздействие, т.е. $\delta(t)$:

$$k(t) = X(t) \text{ при } U(t) = \delta(t). \quad (2.47)$$

Учитывая зависимость между $1(t)$ и $\delta(t)$ (1.20), можно определить импульсно-переходную характеристику через переходную:

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_{\tau}^t k(t, \tau) d\tau \quad (t \geq \tau). \quad (2.48)$$

2.6. Фундаментальные матрицы

Используются для решения линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме: $X'(t) = AX(t) + BU(t)$.

Рассмотрим сначала решение однородного уравнения, т.е. при $U(t) = 0$:

$$X'(t) = AX(t). \quad (2.49)$$

Если матрица $A(t)$ является постоянной для всех t , $A(t) = \text{const}$, т.е. если система стационарна, то уравнение (2.49) всегда имеет решение в виде:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0), \quad (2.50)$$

где $X(t_0)$ - вектор состояний в начальный момент;

$X(t)$ - вектор состояний в текущий момент,

$\Phi(t, t_0)$ - фундаментальная матрица, которая является решением следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0), \quad (2.51)$$

причем $\Phi(t_0, t_0) = I$ (единичная матрица).

Свойства фундаментальных матриц для линейных дифференциальных уравнений

1.
$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0), \quad (2.52)$$

где $t_0 > t_1 > t_2$.

2. Матрица $\Phi(t, t_0)$ является невырожденной, т.е. ранг матрицы равен порядку системы дифференциальных уравнений.

3. Обратная матрица:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t). \quad (2.53)$$

$$4. \quad \frac{d}{dt} \Phi^T(t, t_0) = -A^T \Phi^T(t, t_0). \quad (2.54)$$

Если известна фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$, то решение дифференциального уравнения при $U(t) \neq 0$ имеет вид:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0)B(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (2.55)$$

При наличии вектора измерений $Y(t) = C(t)X(t)$,

$$Y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)X(t_0) + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0)B(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (2.56)$$

Для нулевых начальных условий, при $X(t_0) = 0$, имеем:

$$Y(t) = \int_{t_0}^t C(t)\Phi(\tau, t_0)B(\tau)U(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t \kappa(t, \tau)U(\tau)d\tau, \quad (2.57)$$

где $\kappa(t, \tau)$ - матричная импульсно-переходная функция.

$$\kappa(t, \tau) = C(t)\Phi(\tau, t_0)B(\tau). \quad (2.58)$$

2.7. Преобразования Лапласа в матричной форме

Преобразования Лапласа, рассмотренные для скалярных величин, вводятся также для векторных функций. Имеем вектор $Z(t)$. С помощью прямого преобразования Лапласа получаем его изображение – вектор $Z(s)$:

$$Z(s) = L[Z(t)] = \int_0^t Z(t)e^{-st} dt. \quad (2.59)$$

Все компоненты $Z(s)$ являются преобразованиями Лапласа компонент вектора $Z(t)$.

Для матричного уравнения типа $X'(t) = AX(t)$ имеем:

$$L[X'(t)] = L[AX(t)]. \quad (2.60)$$

Из свойств преобразований Лапласа получаем:

$$\begin{aligned} sX(s) - X(0) &= AX(s), \\ (sI - A)X(s) &= X(0), \end{aligned} \quad (2.61)$$

где I - единичная матрица. По главной диагонали – единицы, остальные компоненты – нули;

sI - матрица, в которой по главной диагонали s , остальные компоненты – нули.

$$\text{Тогда} \quad X(s) = (sI - A)^{-1} X(0). \quad (2.62)$$

Величина $(sI - A)^{-1}$ называется резольвентой матрицы A .

При переходе от изображения к оригиналу, т.е. во временную область, получаем:

$$X(t) = e^{At} X(0), \quad (2.63)$$

так как $L[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$.

Для вычисления резольвент существуют программы.

Теперь возьмем неоднородное матричное уравнение:

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t) + BU(t), \\ Y(t) &= CX(t). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Здесь A и B - матрицы размерностью $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно, где n - высший порядок производной $X(t)$, $m - U_1(t)$.

Преобразуем (2.64) по Лапласу:

$$\begin{aligned} sX(s) - X(0) &= AX(s) + BU(s), \\ (sI - A)X(s) &= X(0) + BU(s), \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} BU(s). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Теперь возьмем нулевые начальные условия: $X(0) = 0$:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s). \quad (2.66)$$

Перейдем к вектору измерений $Y(s)$:

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s). \quad (2.67)$$

Запишем выражение (2.7.9) в виде:

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad (2.68)$$

где $W(s) = C(sI - A)^{-1}B = Y(s)U^{-1}(s)$ - передаточная функция. Подробнее она будет рассмотрена в п. 2.9.

2.8. Определение фундаментальных матриц для линейных стационарных систем

Определим фундаментальную матрицу для матричного дифференциального уравнения: $X'(t) = AX(t) + BU(t)$.

Размерность составляющих: $X(t): (n \times 1)$, $U(t): (m \times 1)$, $A: (n \times n)$, $B: (n \times m)$.

Фундаментальная матрица может быть получена, как и в случае решения скалярного дифференциального уравнения:

$$X'(t) = aX(t) + bU(t). \quad (2.69)$$

Выполним преобразование Лапласа:

$$sX(s) - X(0) = aX(s) + bU(s). \quad (2.70)$$

Здесь $X(0)$ означает преобразование Лапласа от $X(t)$ при $t = 0$, при этом $s \rightarrow \infty$. Решаем (1.9):

$$X(s) = \frac{X(0)}{s - a} + \frac{bU(s)}{s - a}. \quad (2.71)$$

Проводим обратное преобразование Лапласа:

$$X(t) = L^{-1}[X(s)] = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}bU(\tau)d\tau. \quad (2.72)$$

Решение матричного дифференциального уравнения определяется аналогично.

$$\begin{aligned} sX(s) - X(t_0) &= AX(s) + BU(s), \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}X(t_0) + (sI - A)^{-1}BU(s). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Тогда $X(t)$ определяется:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau, \quad (2.74)$$

что означает $X(t) = X_{\text{св}}(t) + X_{\text{вын}}(t)$ (смотри п. 2.2)

Из уравнения (2.74) видим, что

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}. \quad (2.75)$$

Для вектора измерений $Y(t)$ имеем:

$$Y(t) = CX(t) = Ce^{A(t-t_0)}X(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau. \quad (2.76)$$

Переходная и импульсно-переходная функции определяются:

$$\begin{aligned} k(t - \tau) &= Ce^{A(t-\tau)}B, \\ h(t - \tau) &= \int_{\tau}^t Ce^{A(t-\tau)}Bd\tau \text{ при } t \geq \tau. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Для вычисления фундаментальной матрицы на компьютере используется представление:

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{A^2}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{A^k}{k!}(t-t_0)^k, \quad (2.78)$$

где k - зависит от требуемой точности.

2.9. Передаточные функции

Передаточной функцией (ПФ) называется отношение преобразования Лапласа выходной величины к преобразованию Лапласа входной величины при нулевых начальных условиях (при $U(t < 0) = 0$):

$$W(s) = \left. \frac{X(s)}{U(s)} \right|_{н.у. = 0}. \quad (2.79)$$

Для многомерных систем вводится матричная передаточная функция $W(s) = \|W_{ij}(s)\|$, каждый элемент которой является передаточной функцией от j -й компоненты вектора входа к i -й компоненте вектора выхода:

$$W_{ij}(s) = \frac{X_i(s)}{U_j(s)}. \quad (2.80)$$

При записи дифференциального уравнения классическим методом (операторным, $p = \frac{d}{dt}$, формула (2.2)) можно записать:

$$\frac{X(t)}{U(t)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (2.81)$$

Заменяв p на s , получим:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (2.82)$$

Свойства передаточной функции

1. Передаточная функция полностью определяет динамику системы. Путем обратного преобразования Лапласа по ней можно найти реакцию системы на любое входное воздействие.

2. Для линейной стационарной системы передаточная функция (или элементы соответствующей матрицы) является дробно-рациональной функцией переменной s с действительными коэффициентами.

Для скалярной системы:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.83)$$

Для векторной системы:

$$W(s) = \frac{B(s)}{\det(sI - A)}, \quad (2.84)$$

где $B(s)$ - матрица, элементы которой являются полиномами от переменной s , соответствующими числителю (2.83),

$\det(sI - A)$ - характеристический полином матрицы состояний A .

3. Для физически реализуемых систем должно выполняться неравенство: $m < n$.

4. При замене s на p передаточная функция совпадает с операторной формой записи дифференциального уравнения.

5. Знаменатель передаточной функции совпадает с характеристическим уравнением исходного дифференциального уравнения.

6. Если все нули и полюса передаточной функции являются левыми, т.е. лежат в левой полуплоскости на комплексной плоскости (имеют отрицательную действительную часть), то система минимально-фазовая. Этот термин будет рассмотрен далее. Здесь нули передаточной функции: корни числителя, т. е. $b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m = 0$ или корни элементов матрицы $B(s)$. Полюса передаточной функции: корни знаменателя, т. е. $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$ или $\det(sI - A) = 0$. Полюса системы и полюса передаточной функции совпадают.

7. Если на вход системы действует несколько воздействий, то рассматриваются передаточные функции для каждого воздействия:

$$X(s) = W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s). \quad (2.85)$$

Пример 2.1

Найдем передаточную функцию и дифференциальное уравнение пассивного четырехполюсника, изображенного на рис. 2.8, относительно напряжений $U_{\text{вх}}$, $U_{\text{вых}}$.

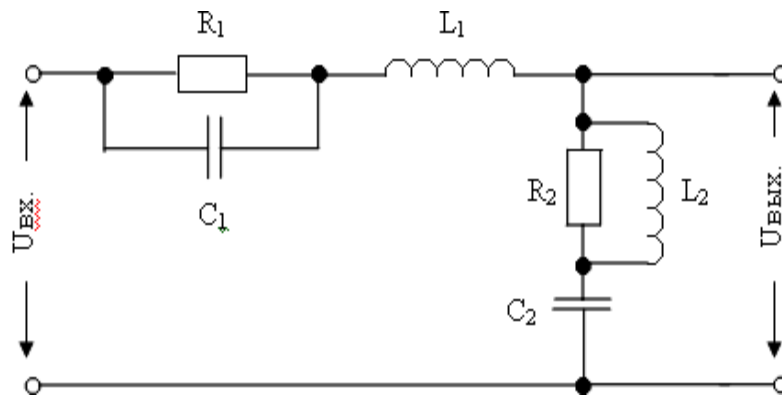


Рис. 2.8

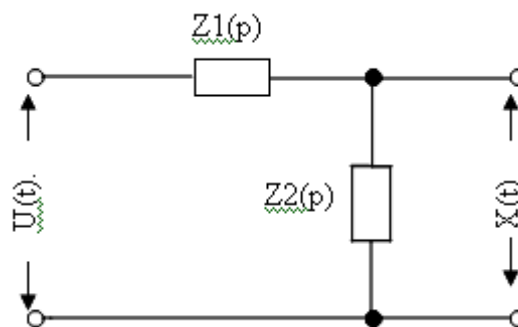


Рис. 2.9

Запишем сопротивления элементов в операторной форме:

$$Z_L = pL, Z_C = \frac{1}{pC}, Z_R = R, \text{ где } p \text{ – оператор дифференцирования.}$$

Преобразуем электрическую цепь на рис. 2.8 в эквивалентную ей (рис. 2.9), где обозначено:

$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{pC_1} R_1}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} + pL_1 = \frac{R_1(T_{1C}^2 p^2 + T_{1L} p + 1)}{T_{1C} p + 1}; \quad (2.86)$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2 L_2 p}{R_2 + L_2 p} + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_2(T_{2L}^2 p^2 + T_{2L} p + 1)}{p(T_{2C} + T_2^2 p)}. \quad (2.87)$$

Постоянные времени, указанные в данных формулах, приведены в (2.88):

$$T_1 = \sqrt{C_1 L_1}, T_{1L} = \frac{L_1}{R_1}, T_{1C} = R_1 C_1,$$

$$T_2 = \sqrt{C_2 L_2}, T_{2L} = \frac{L_2}{R_2}, T_{2C} = R_2 C_2. \quad (2.88)$$

Так как падение напряжения на последовательно соединенных сопротивлениях пропорционально величине сопротивлений, то передаточная функция эквивалентной цепи (рис. 2.7) находится как отношение:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{Z_{\text{ВЫХ}}(s)}{Z_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \quad (2.89)$$

Подставив (2.86), (2.87) в (2.89), предварительно заменив переменную p на s , получим искомую переменную функцию:

$$W(s) = \frac{R_2(b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3)}{R_2(b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3) + R_1(d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s)}, \quad (2.90)$$

где $b_0 = T_2^2 T_{1C}$, $b_1 = T_2^2 + T_{2L} T_{1C}$, $b_2 = T_{2L} + T_{1C}$, $b_3 = 1$,

$d_0 = T_1^2 T_2^2$, $d_1 = T_1^2 T_{2C} + T_2^2 T_{1L}$, $d_2 = T_{1L} T_{2C} + T_2^2$, $d_3 = T_{2C}$.

Дифференциальное уравнение данной схемы имеет вид:

$$[R_2(b_0 p^3 + \dots + b_3) + R_1(d_0 p^4 + \dots + d_3 p)]X(t) = R_2(b_0 p^3 + \dots + b_3)U(t). \quad (2.91)$$

Из данного уравнения можно найти коэффициенты a_0 , a_1 и т. д.

Здесь были рассмотрены передаточные функции между входным и выходным сигналами системы, изображенной на рис. 2.10.

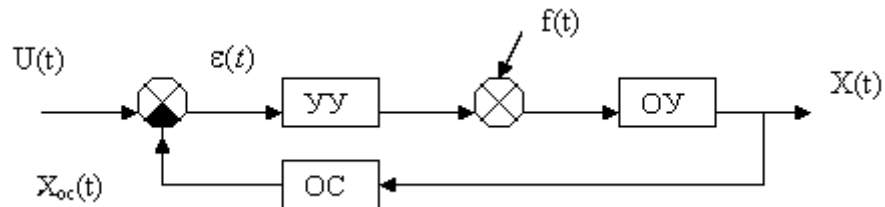


Рис. 2.10

Для такой системы это передаточная функция замкнутой системы. Обозначим ее $W(s) = W_{XU}(s)$. Однако для расчетов часто требуется знать другие передаточные функции схемы, т. е. между другими сигналами, присутствующими в ней.

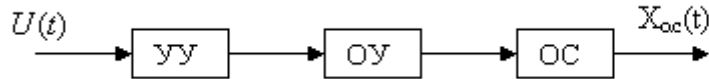


Рис. 2.11

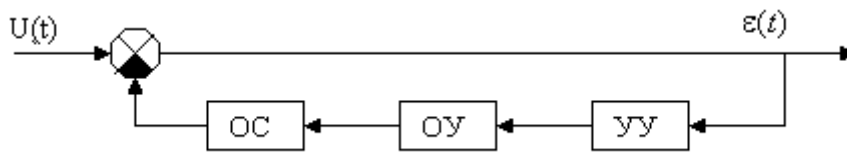


Рис. 2.12

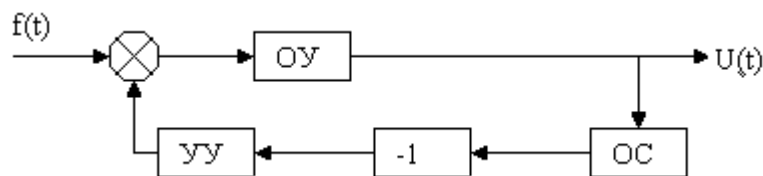


Рис.2.13

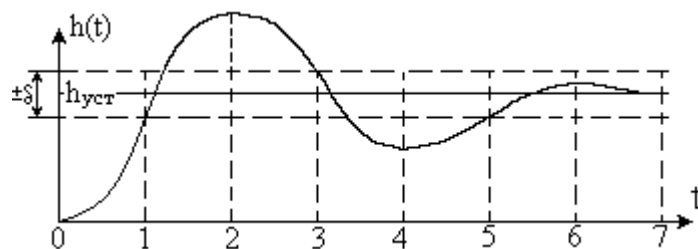
На рис. 2.11 изображена структурная схема для вычисления передаточной функции разомкнутой системы $W_p(s) = W_{XocU}(s)$, т.е. между сигналом $X_{oc}(s)$ на выходе и $U(s)$ на входе. Как видим из рис. 2.11, схему при этом размыкают по главной обратной связи, а выходным сигналом считают $X_{oc}(t)$. На рис. 2.12 – схема для вычисления передаточной функции между сигналом ошибки $\varepsilon(s)$ на выходе и $U(s)$ на входе: $W_{\varepsilon U}(s)$. На рис. 2.13 – схема для передаточной функции между выходом $X(t)$ и помехой $f(t)$. Здесь входом считается помеха, а сигнал $U(t)$ принимают равным нулю.

Правила для расчета таких функций изложены в п. 3.8 и п. 3.9.

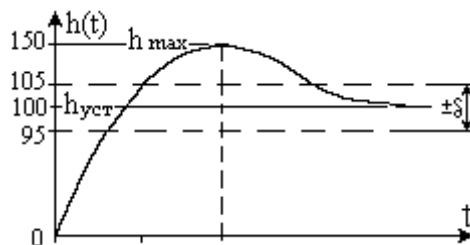
ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как выглядит дифференциальное уравнение САУ?
2. Из каких слагаемых состоит решение дифференциального уравнения? Чем определяется вид каждого из них?
3. Чему равно количество переменных состояния при описании системы методом пространства состояний?
4. Какие уравнения включает в себя математическая модель САУ?
5. Что называется фазовой траекторией?
6. Как выглядит прямое и обратное преобразование Лапласа?
7. Для чего применяется прямое и обратное преобразование Лапласа?
8. Чему равно t , если $s = 0$?
9. Как использовать преобразование Лапласа при решении дифференциальных уравнений?
10. Что называется динамической характеристикой САУ?
11. Какой сигнал подают на вход системы при снятии переходной характеристики?
12. Какой сигнал подают на вход системы при снятии матричной переходной характеристики?
13. Сколько компонент у матричной переходной характеристики?
14. Что называется временем переходного процесса?
15. Что называется перерегулированием?
16. Как отражается на качестве системы увеличение времени переходного процесса?
17. Как отражается на качестве системы увеличение перерегулирования?
18. Как связаны переходная и импульсно-переходная характеристики?
19. Чему равно установившееся значение переходной характеристики?
20. Как определить фундаментальную матрицу линейной стационарной системы?

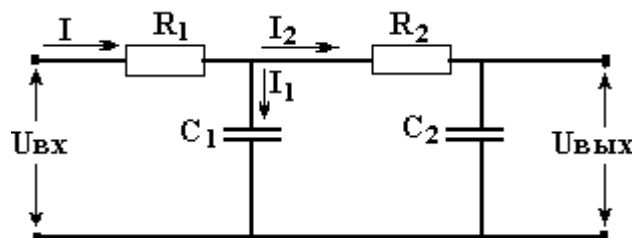
21. Что называется передаточной функцией САУ?
22. Что называется матричной передаточной функцией САУ?
23. Как связаны дифференциальное уравнение и передаточная функция?
24. Что такое нули и полюса передаточной функции?
25. Какие виды передаточных функций используются при анализе САУ?
26. Определить время переходного процесса $t_{\text{пн}}$ по его графику:



27. Определить перерегулирование процесса σ по его графику:



28. Найти передаточную функцию следующего четырехполюсника:



Ответ
$$W(s) = \frac{1}{(R_1 R_2 C_1 C_2) s^2 + (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) s + 1}$$

3. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ, ИХ ЗВЕНЬЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ

3.1. Частотные характеристики систем

Наряду с передаточными функциями, переходными и импульсно-переходными характеристиками, динамику САУ оценивают также по частотным характеристикам.

Подаем на вход гармонический сигнал: $U(t) = U_{\max} \cos \omega t$.

На выходе получим другой гармонический сигнал:

$$X(t) = X_{\max} \cos(\omega t - \varphi),$$

с другой амплитудой и сдвинутый по фазе, но с той же частотой.

Гармонический входной сигнал можно записать в экспоненциальной форме:

$$U(t) = U_m \cos \omega t = U_m \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}. \quad (3.1)$$

Далее рассматриваем одно слагаемое этой суммы, так как второе отличается только знаком, стоящим при $j\omega$:

$$U(t) = U_m e^{j\omega t}. \quad (3.2)$$

Как было показано ранее, решение дифференциального уравнения состоит из двух частей: свободной и вынужденной составляющих.

$$X(t) = X_{\text{св}}(t) + X_{\text{вын}}(t),$$

$$X_{\text{св}}(t) \text{ ищется в виде: } X_{\text{св}}(t) = e^{At}X(0) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

где p_i – корни характеристического уравнения.

Вынужденная составляющая ищется в виде:

$$X_{\text{вын}}(t) = X_m e^{j\omega t}, \quad (3.3)$$

где X_m – постоянный вектор, который необходимо определить.

Поставим $X_{\text{вын}}$ в ДУ: $X_{\text{вын}} = AX_{\text{вын}}(t) + BU(t)$.

Возьмем производную: $j\omega X_m e^{j\omega t} = AX_m e^{j\omega t} + BU_m e^{j\omega t}$;
 получим: $(j\omega I - A) X_m = BU_m$. Таким образом,

$$X_m = (j\omega I - A)^{-1} BU_m. \quad (3.4)$$

Решение ДУ имеет вид:

$$X(t) = e^{At} X(0) + (j\omega I - A)^{-1} BU_m e^{j\omega t}. \quad (3.5)$$

При нулевых начальных условиях $X(0) = 0$, $X_{\text{св}}(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$, $X_{\text{вын}}$ характеризует установившееся состояние.

Итак, на входе $U(t) = U_m e^{j\omega t}$, на выходе в установившемся режиме:

$X(t) = (j\omega I - A)^{-1} BU_m e^{j\omega t}$ или, с учетом вектора измерения $Y(t) = CX(t)$,

$$Y(t) = C (j\omega I - A)^{-1} BU_m e^{j\omega t}. \quad (3.6)$$

Это можно обозначить:

$$Y(t) = W(j\omega) U(t), \quad (3.7)$$

где $W(j\omega) = C (j\omega I - A)^{-1} B$.

$W(j\omega)$ - **комплексная частотная характеристика** системы (КЧХ).

Получается из передаточной функции заменой s на $j\omega$:

$$W(j\omega) = Y(j\omega) / U(j\omega) = W(s)|_{s \rightarrow j\omega}.$$

Для скалярного случая:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \cdot x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \cdot u(t).$$

Путем замены p на s и s на $j\omega$ получаем:

$$W(s) = W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.8)$$

где $A(\omega)$ - коэффициент, характеризующий изменение амплитуды выходного сигнала $X(t)$ при изменении частоты $U(t)$ при его постоянной амплитуде – **амплитудно-частотная характеристика** (АЧХ). Другое ее обозначение: $|W(j\omega)|$.

Величина $\varphi(\omega)$ характеризует зависимость сдвига фаз входного и выходного сигнала при изменении частоты входного - **фазочастотная характеристика** (ФЧХ).

Частотную характеристику можно изобразить на комплексной плоскости в виде:

$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ - действительная и мнимая части КЧХ. Тогда

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} ; \varphi(\omega) = \text{arctg}(P(\omega)/Q(\omega)). \quad (3.9)$$

Функция $P(\omega)$ называется **вещественной частотной характеристикой** (ВЧХ), функция $Q(\omega)$ - **мнимой частотной характеристикой** (МЧХ):

$$P(\omega) = \text{Re}(W(j\omega)), Q(\omega) = \text{Im}(W(j\omega)). \quad (3.10)$$

Во многих случаях ВЧХ и МЧХ системы необходимо изображать по отдельности.

На практике АЧХ и ФЧХ измеряются при нулевых начальных условиях и после прекращения переходных процессов.

Для минимально-фазовых звеньев существует однозначное соответствие АЧХ и ФЧХ, т.е. по АЧХ можно определить ФЧХ, но не наоборот. Такие звенья обладают в любой области частот минимальным сдвигом фаз. Для неминимально-фазовых звеньев такой связи нет.

Для различных соотношений порядков производной входного и выходного сигналов m и n имеем:

$$A(\omega) = \begin{cases} A(\omega) = 0, m < n, \\ b_m / a_n, m = n, \\ \infty, m > n. \end{cases} \quad (3.11)$$

Только первый вариант является реализуемой системой. (Доказательство на уровне разума: при бесконечно большой частоте у реальной системы на выходе сигнала не будет, не успеет отработать. А бесконечная амплитуда вообще недостижима.)

Изображение частотных характеристик

1. АЧХ и ФЧХ можно изображать по отдельности:

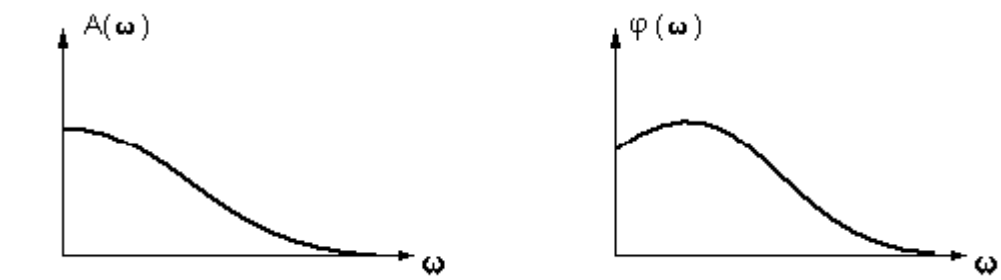


Рис. 3.1

2. КЧХ на комплексной плоскости:

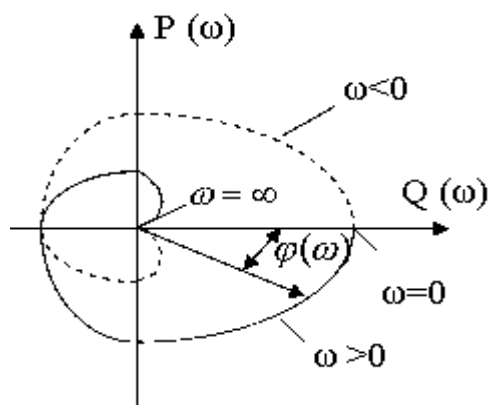


Рис. 3.2

При этом для каждой конкретной частоты длина вектора дает значение $A(\omega)$, угол поворота – $\varphi(\omega)$, т.е. используются полярные координаты.

Если

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)W_3(j\omega)},$$

то

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 - (\varphi_2 + \varphi_3), \quad A(\omega) = \frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)A_3(\omega)}. \quad (3.12)$$

Для матричной комплексной частотной характеристики: на входе с номером l действует сигнал $U_l(t) = U_m e^{j\omega t}$, на остальных входах сигнала нет. Тогда на выходе с номером « k » имеем:

$$Y_k(t) = W_{kl}(j\omega)U_l(t) = A_{kl}(\omega)e^{j\varphi_{kl}(\omega)}U_l(t),$$

где

$$A_{kl}(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}[W_{kl}(j\omega)])^2 + (\operatorname{Im}[W_{kl}(j\omega)])^2} = \sqrt{P_{kl}^2(\omega) + Q_{kl}^2(\omega)}, \quad (3.13)$$

$$\varphi_{kl}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_{kl}(\omega)}{P_{kl}(\omega)}.$$

3.2. Логарифмические частотные характеристики

Представляют собой зависимость: $20\lg A(\omega)$ от $\lg(\omega)$ - *логарифмическая амплитудно-частотная характеристика* (ЛАХ), обозначается $L(\omega)$; $\varphi(\omega)$ от $\lg(\omega)$ - *логарифмическая фазочастотная характеристика* (ЛФХ), $\varphi(\omega)$.

Величина $20\lg A(\omega)$, измеряется в децибелах (дБ). Бел - логарифмическая единица, соответствующая 10-кратному увеличению мощности ($N_2/N_1 = 10$, $N_1/N_1 = 1$ бел), 2 бела – 100 раз и т.д. Децибел равен 1/10 бела. Так как $A(\omega)$ соответствует отношению входной и выходной амплитуд, а не мощностей, то увеличение мощности в 10 раз соответствует увеличению амплитуды в $\sqrt{10}$ раз ($N = U^2$), что соответствует 2 белам, или 20 децибелам:

$$10 \lg \frac{N_2}{N_1} = 10 \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \lg \frac{U_2}{U_1}. \quad (3.14)$$

Один децибел соответствует изменению амплитуды в $\sqrt[20]{10}$ раз.

На оси частот соседние значения частоты отличаются в 10 раз. Если равномерная ось частот полубесконечная, $\omega = (0, \dots + \infty)$, то логарифмическая бесконечная: $\lg \omega = (-\infty, \dots + \infty)$, поэтому начальное значение частоты ($\omega = 0$) на ней отсутствует (поскольку $\lg 0 = -\infty$). Принято ось $L(\omega)$ проводить через точку $\lg \omega = 0$, т.е. $\omega = 1$.

На оси частот единица измерения декада: величина, соответствующая изменению частоты в 10 раз:

$$\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = \lg \frac{10\omega_1}{\omega_1} = 1 \text{ декада.} \quad (3.15)$$

Точка пересечения ЛАХ и оси ω называется частотой среза. В ней $20 \lg A(\omega_{cp}) = 0$.

На практике строят асимптотическую (приблизительную) ЛАХ-отрезки прямых линий, соединенных в частотах сопряжения.

Пример 3.1

Вычислим $W(j\omega)$ и ЛАХ для примера, рассмотренного в п. 2.3. Перейдем к комплексной частотной характеристике с помощью замены: $s \rightarrow j\omega$,

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{m(j\omega)^2 + k(j\omega) + c} = \frac{c - m\omega^2 - jk\omega}{(c - m\omega^2 + jk\omega) \cdot (c - m\omega^2 - jk\omega)} = \\ &= \frac{c - m\omega^2}{(c - m\omega^2)^2 + (k\omega)^2} + j \frac{-k\omega}{(c - m\omega^2)^2 + (k\omega)^2} = P(\omega) + jQ(\omega). \end{aligned}$$

Вычислим ЛАХ:

$$\begin{aligned} 20 \lg A(\omega) &= 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{1}{|c - m\omega^2 + jk\omega|} = \\ &= 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{(c - m\omega^2)^2 + (k\omega)^2}. \end{aligned}$$

3.3. Понятие статической характеристики

Данная характеристика устанавливает соответствие между входом и выходом в установившемся режиме. Характеризуется уравнением: $X'(t) = 0$.

$$\text{Тогда:} \quad \begin{cases} AX + BU = 0, \\ Y = CX. \end{cases} \quad (3.16)$$

Отсюда

$$X = -A^{-1}BU, Y = CA^{-1}BU = -KU, \quad (3.17)$$

где $K = CA^{-1}B$ - статический коэффициент передачи. Получается из передаточной функции $W(s)$ при $s = 0$, ($W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, $W(0) = -CA^{-1}B$). Характеризует связь между входом и выходом при малых отклонениях от равновесия.

3.4. Типовые динамические звенья

Динамическое звено – устройство, представленное дифференциальным уравнением. Звено малой сложности можно представить в виде соединения более простых, соединенных различным образом.

Типовое динамическое звено - звено, обладающее детектирующим свойством и описываемое дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Любая система представляется цепью звеньев, связанных между собой. Такая цепь с указанием передаточных функций - структурная схема. Она получается на основе дифференциального уравнения. Это задача с неоднозначным решением, т.е. по одному дифференциальному уравнению можно получить разные схемы. Обратная задача – однозначная.

Виды типовых динамических звеньев

Звенья классифицируют в зависимости от дифференциального уравнения, описывающего его работу, и соответственно от его передаточной функции.

1. Пропорциональное (усилительное) звено.

На рис. 3.3 изображена примерная схема исполнения такого звена на операционном усилителе. Входной параметр $U_{вх}$, выходной $U_{вых}$. Его передаточная функция выразится:

$$W(s) = K. \quad (3.18)$$

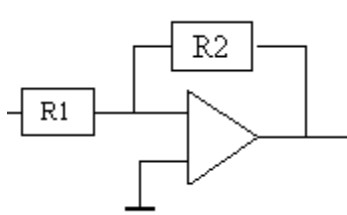


Рис. 3.3

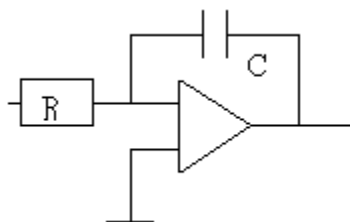


Рис. 3.4

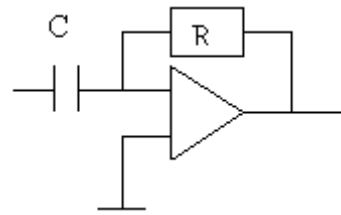


Рис. 3.5

На рис. 3.3, 3.4, 3.5: $u(t) = U_{\text{вх}}$, $x(t) = U_{\text{вых}}$, $K = R1/R2$.

2. Идеальное интегрирующее звено (рис. 3.4):

$$W(s) = K/s. \quad (3.19)$$

3. Идеальное дифференцирующее звено (рис. 3.5):

$$W(s) = Ks. \quad (3.20)$$

4. Аперiodическое звено (инерционное звено 1-го порядка):

$$W(s) = K/(Ts+1). \quad (3.21)$$

Пример такого звена: четырёхполюсник на рис. 3.6 или каскад на рис. 3.7:

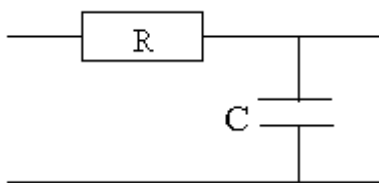


Рис. 3.6

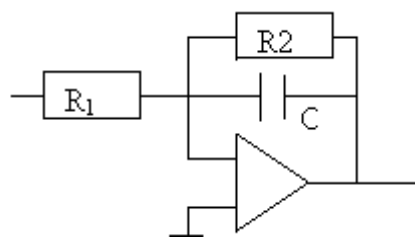


Рис. 3.7

Здесь

$$K = R2/R1, T = R2C.$$

5. Звенья 2-го порядка:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (3.22)$$

6. Форсирующее звено 1-го порядка:

$$W(s) = K(Ts + 1) \quad (3.23)$$

7. Форсирующее звено 2-го порядка:

$$W(s) = K(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1) \quad (3.24)$$

8. Звено временного запаздывания (здесь τ – время запаздывания):

$$W(s) = e^{-\tau s}. \quad (3.25)$$

Звенья 3, 6, 7 соответствуют операции идеального дифференцирования. Точно они не реализуются из-за инерционности устройств.

3.5. Характеристики динамических звеньев

Рассмотрим определение характеристик динамических звеньев на примерах.

Пример 3.2

Вывод характеристик апериодического звена

Дифференциальное уравнение:

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = KU(t), \quad (3.26)$$

где T – постоянная величина; K – коэффициент передачи.

Характеристическое уравнение:

$$T \cdot p + 1 = 0. \quad (3.27)$$

Его корень:

$$p = -1/T.$$

Статическая характеристика:

$$x_0 = KU_0. \quad (3.28)$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (3.29)$$

Частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{1 + (T\omega)^2} - j \frac{KT\omega}{1 + (T\omega)^2} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.30)$$

АЧХ: $A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}, \quad (3.31)$

ФЧХ: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg T\omega. \quad (3.32)$

Построим комплексную ЧХ.

Найдем точки:

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	K	0
∞	0	-90
$1/T$	$K/\sqrt{2}$	-45

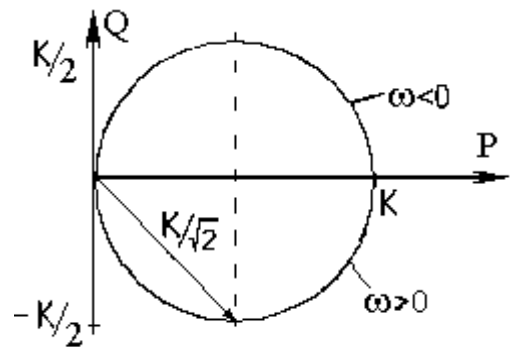


Рис. 3.8

Вид комплексной частотной характеристики показан на рис. 3.8.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (T\omega)^2}. \quad (3.33)$$

Определяем асимптоты:

1. Низкочастотная часть: $T\omega \ll 1$. Пренебрегаем $(T\omega)^2$:

$$L_{НЧ}(\omega) \approx 20 \lg K - 20 \lg 1 = 20 \lg K. \quad (3.34)$$

Это прямая линия на уровне $20 \lg K$ с нулевым наклоном.

2. Высокочастотная часть: $T\omega \gg 1$. Пренебрегаем 1:

$$L_{ВЧ}(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg T\omega. \quad (3.35)$$

Это прямая линия с наклоном -20 дБ/дек.

3. Сопряжение асимптот. Найдем точку, где НЧ и ВЧ части пересекаются, т.е. где характеристики равны:

$$L_{НЧ} = L_{ВЧ}, \text{ т.е. } 20 \lg T\omega = 0, \omega_{\text{ср}} = 1/T. \quad (3.36)$$

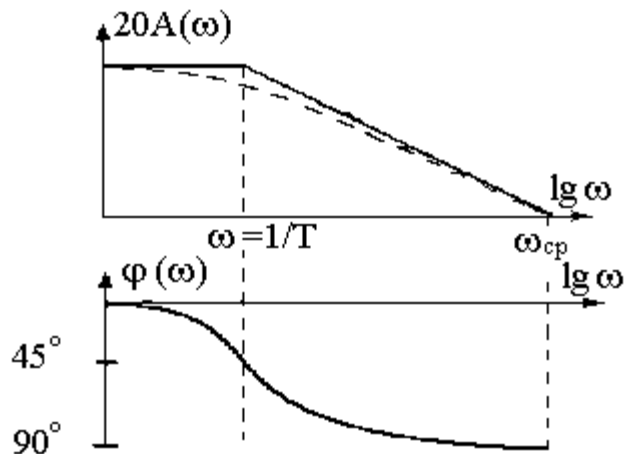


Рис. 3.9

На рис. 3.9 пунктиром изображена реальная ЛАХ, сплошной линией – приближительная.

Переходная характеристика:

$$Th'(t) + h(t) = K1(t) \rightarrow h(t) = K(1 - e^{-t/T}). \quad (3.37)$$

Импульсно-переходная характеристика:

$$k(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{K}{T} e^{-t/T}. \quad (3.38)$$

Данные характеристики показаны на рис. 3.10.

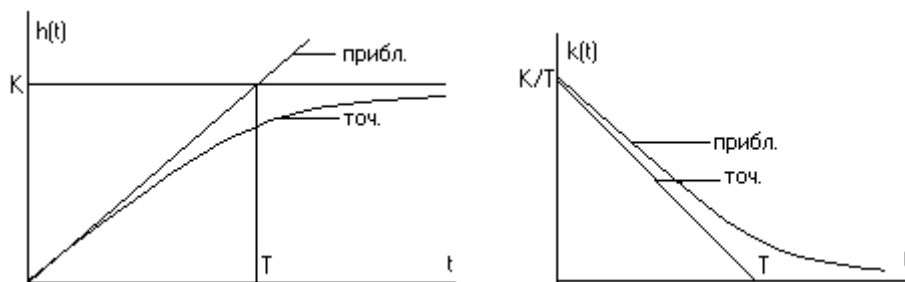


Рис. 3.10

Выводя так же характеристики интегрального звена, получим:

$$U_C = \frac{1}{C} \int_0^T i_C dt. \quad \text{ДУ: } x(t) = \int_0^T U(t) dt.$$

Передаточная функция: $W(s) = \frac{K}{s}$. Комплексная ЧХ: $W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$.

АЧХ: $A(\omega) = \frac{K}{\omega}$.

ФЧХ: $\varphi(\omega) = -90^\circ$.

ЛАХ: $L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$.

Пример 3.3

Вывод характеристик колебательного звена

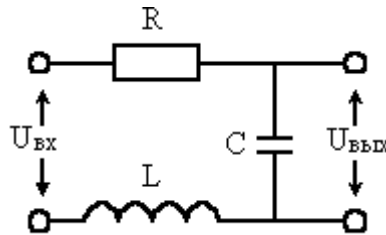


Рис. 3.11

Пример – на рис. 3.11.

Дифференциальное уравнение:

$$T^2 X''(t) + 2\xi T X'(t) + X(t) = KU(t), \quad (3.39)$$

где T - постоянная времени; ξ - относительный коэффициент затухания.

$$\text{Статическая характеристика: } x_0 = KU_0. \quad (3.40)$$

Характеристическое уравнение: $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0$, его корни:

$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}. \quad (3.41)$$

Если $0 < \xi < 1$, то корни комплексно сопряженные, т.е. $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$,

где α - коэффициент затухания, $\alpha = \xi / T$;

$$\beta\text{- угловая частота колебаний, } \beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}.$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (3.42)$$

Частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega)}. \quad (3.43)$$

Вид комплексной частной характеристики на рис. 3.12.

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	K	0
∞	0	π
$1/T$	$K/2\xi$	$-\pi/2$

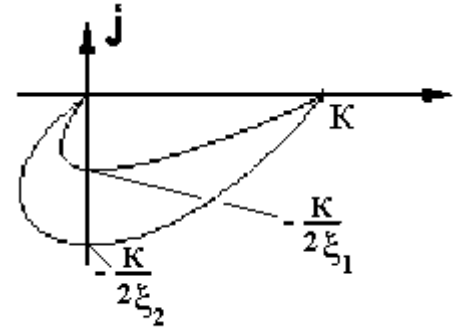


Рис. 3.12

АЧХ:
$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}; \quad (3.44)$$

ФЧХ:
$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}; \quad (3.45)$$

ЛАХ:
$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \quad (3.46)$$

Асимптоты:

$$L_{НЧ}(\omega) \approx 20 \lg K. \text{ Наклон } 0 \frac{\partial B}{\partial \text{дек}}.$$

$$L_{ВЧ}(\omega) \approx 20 \lg K - 20 \lg T^2\omega^2 = 20 \lg K - 40 \lg T\omega. \text{ Наклон } -40 \frac{\partial B}{\partial \text{дек}}.$$

Частота сопряжения:

$$\omega_{соп} = 1/T = \omega_{соб} = \omega_{рез},$$

т.е. она является частотой резонанса собственных колебаний.

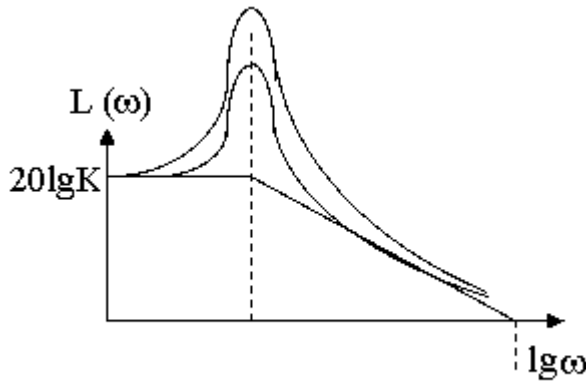


Рис. 3.13

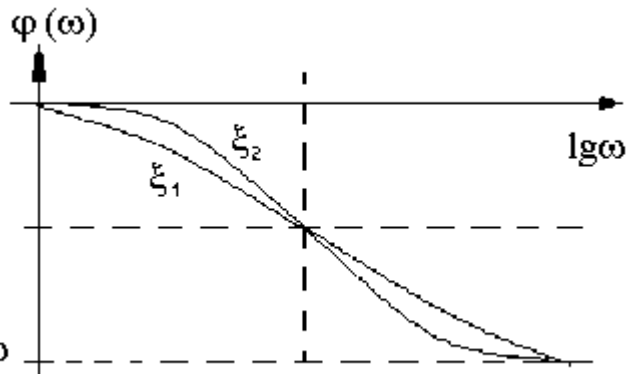


Рис. 3.14

Чем меньше коэффициент затухания ξ , тем выше максимум $L(\omega)$.

1. Если коэффициент затухания находится в интервале $0 < \xi < 1$, то переходная характеристика имеет вид затухающих колебаний (рис. 3.15).

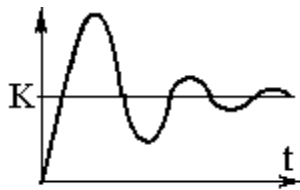


Рис. 3.15

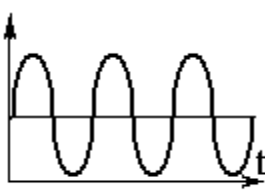


Рис. 3.16

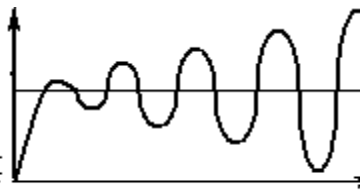


Рис. 3.17

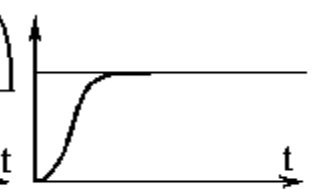


Рис. 3.18

2. Если $\xi = 0$, тогда переходной процесс представляет собой незатухающее колебание. $W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}$; $\alpha = 0$; $\beta = 1/T = \omega_{\text{соб}}$. (рис. 3.16).

Звено называют консервативным. Переходная характеристика представлена рис. 3.18.

3. Если $-1 < \xi < 0$, тогда переходная характеристика представляет собой возрастающие по амплитуде колебания (рис. 3.17).

4. Если $\xi > 1$, то переходная характеристика имеет монотонно нарастающий характер, а само звено может быть представлено как апериодическое звено второго порядка:

$$W(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s) \cdot (1 + T_2 s)}. \quad (3.47)$$

Основные характеристики типовых динамических звеньев представлены в табл. П1, представленной в приложении.

3.6. Конструирование статических звеньев на операционных усилителях

Операционный усилитель (ОпУ) (рис. 3.19,а) – это аналоговое устройство усиления разности $\Delta U = U - \bar{U}$ напряжений на его прямом (U) и инверсном (\bar{U}) входах: $U_{\text{ВЫХ}} = K_y \Delta U$.

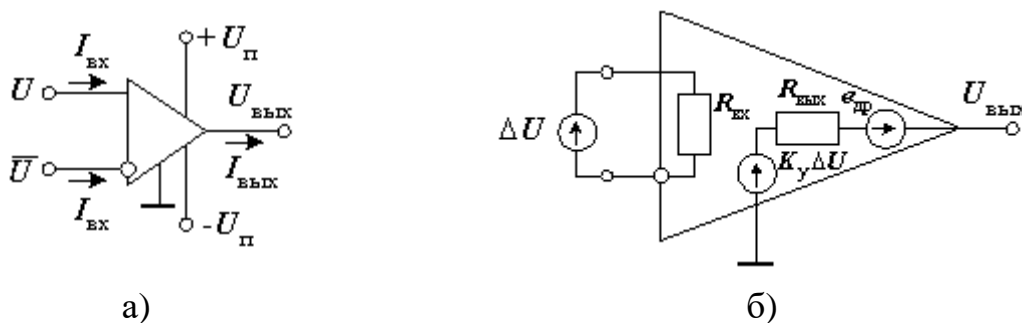


Рис. 3.19

Реальные ОпУ имеют следующие параметры: коэффициент усиления разностного (дифференциального) сигнала $K_y = 10^4 \div 10^6 = \text{tg}(\alpha)$; входное сопротивление $R_{\text{ВХ}}$ от 300 кОм до 10 ГОм; выходное сопротивление $R_{\text{ВЫХ}} = 10 \div 300$ Ом. На рис. 3.19,б приведена простейшая схема замещения ОпУ.

В практических расчетах можно считать ОпУ идеальным с параметрами $K_y = \infty, R_{\text{ВХ}} = \infty, R_{\text{ВЫХ}} = 0$, что дает исходные соотношения для анализа и синтеза схем на ОпУ: $U = \bar{U}, I_{\text{ВХ}} = 0, I_{\text{ВЫХ}} = \infty$. Условия означают *потенциальное* равенство напряжений входов ОпУ, но не физическое их соединение, и *токовую развязку каскадов* на ОпУ друг от друга.

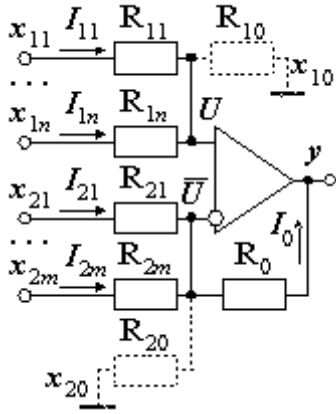


Рис. 3.20

Рассмотрим схему на ОпУ с ООС (рис. 3.20), к прямым входам $x_{11} \div x_{1n}$ которой подключены сопротивления $R_{11} \div R_{1n}$, к инверсным входам $x_{21} \div x_{2m}$ - сопротивления $R_{21} \div R_{2m}$, а в цепи ООС включено сопротивление R_0 .

Напряжения на прямом и инверсном входах можно найти по законам Кирхгофа и Ома:

$$\sum_{j=1}^n I_{1j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{x_{1j} - U}{R_{1j}} = 0, \quad (3.48)$$

откуда получим напряжение U , а по аналогии и \bar{U} :

$$U = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{x_{1j}}{R_{1j}}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{1j}}}, \quad \bar{U} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \frac{x_{2j}}{R_{2j}} + \frac{y}{R_0} \right)}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{R_{2j}} + \frac{1}{R_0} \right)}. \quad (3.49)$$

Так как в идеальном ОпУ $U = \bar{U}$, то из последних выражений следует

$$y = \left(\sum_{j=1}^m \frac{R_0}{R_{2j}} + 1 \right) \sum_{j=1}^n \frac{x_{1j}}{R_{1j}} - \sum_{j=1}^m \frac{R_0}{R_{2j}} x_{2j}. \quad (3.50)$$

Таким образом, рассматриваемая схема выполняет n операций сложения и m операций вычитания подаваемых на ее входы напряжений:

$$y = \sum_i K_{1i} x_{1i} - \sum_i K_{2i} x_{2i}, \quad K_{1i} = \left(\sum_j \frac{R_0}{R_{2j}} + 1 \right) / \sum_j \frac{R_{1i}}{R_{1j}}, \quad K_{2i} = \frac{R_0}{R_{2i}}. \quad (3.51)$$

Обозначим суммы коэффициентов усиления схемы по прямым и инверсным входам: $S_1 = \sum K_{1i}$ и $S_2 = \sum K_{2i}$. Суммируя в (3.51) коэффициенты K_{1i} , получим **ключевую зависимость** между S_1 и S_2 , существующую в любой готовой схеме на ОпУ (рис. 3.20) независимо от числа и сопротивлений навесных резисторов:

$$S_1 = \left(\sum_j \frac{R_0}{R_{2j}} + 1 \right) \sum_i \frac{1}{R_{1i}} / \sum_j \frac{1}{R_{1j}} = S_2 + 1. \quad (3.52)$$

Для численного расчета $m+1$ сопротивлений R_{2i} и R_0 по m коэффициентам K_{2i} необходимо доопределить (3.51) еще одним условием.

Например, задать произвольно сопротивление R_0 , тогда сопротивления инверсных входов будут равны $R_{2i} = R_0/K_{2i}$.

Однозначное определение n сопротивлений R_{1i} по n коэффициентам K_{1i} также невозможно из-за условия вырожденности, вытекающего из уравнений (3.51) и (3.52):

$$K_{1i}R_{1i} = S_1 / \sum_j (1/R_{1j}) = \text{const} \forall i = \overline{1, n}. \quad (3.53)$$

Если задать произвольно любое сопротивление R_{1j} , то остальные сопротивления находятся как $R_{1i} = K_{1j}R_{1j}/K_{1i} \forall i \neq j$.

При произвольно заданных коэффициентах K_{1i} и K_{2i} условие (3.52) скорее всего не выполнится. Это означает, что схема на рис. 3.20 структурно неполная. В ней не хватает одного из **заземленных** навесных резисторов R_{10} или R_{20} . Введение такого резистора эквивалентно добавлению в первое уравнение (3.51) нулевого слагаемого $K_{10}x_{10} = 0$ или $K_{20}x_{20} = 0$ с **положительным** коэффициентом усиления по заземленному входу $K_{10} = S_2 + 1 - S_1$ или $K_{20} = S_1 - S_2 - 1$. Какой из этих резисторов необходимо добавить, зависит от соотношения сумм S_1 и $S_2 + 1$. Введение заземленных входов изменяет структуру схемы и восстанавливает баланс (3.52), при этом уравнение схемы не изменяется.

Таким образом, при синтезе схемы принимаем независимыми сопротивления R_{1j} и R_0 , а остальные сопротивления вычислим по формулам:

$$R_{1i} = K_{1j}R_{1j}/K_{1i} \forall i \neq j, R_{2i} = R_0/K_{2i}. \quad (3.54)$$

Если в полученной схеме окажется единственный прямой вход x_{11} , то по (3.51) его коэффициент усиления $K_{11} = S_2 + 1$ не зависит от R_{11} . Поэтому можно выбрать это сопротивление произвольным, в том числе и $R_{11} = 0$ (провод).

Рассмотрим некоторые схемы, часто употребляющиеся в теории автоматического управления.

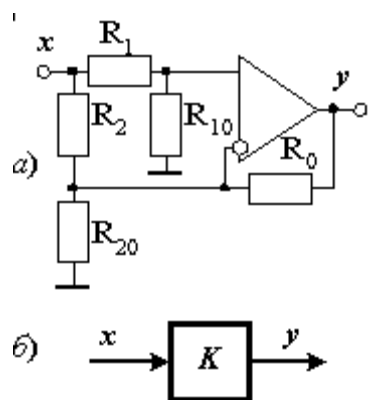


Рис. 3.21

1. Универсальный одноходовый усилитель

(рис. 3.21) с коэффициентом усиления

$$K = \frac{1 + R_0/R_2 + R_0/R_{20} - R_0}{1 + R_1/R_{10}} \cdot \frac{R_0}{R_2}.$$

Выбором сопротивлений схемы можно получить любое желаемое по знаку и абсолютной величине значение K в диапазоне

$$-R_0/R_2 \leq K \leq 1 + R_0/R_{20}.$$

2. Усилитель - вычитатель (рис. 3.22), выполняющий операцию

$$y = K_1 x_1 - K_2 x_2$$

с коэффициентами $K_1 = \frac{1 + R_0/R_2}{1 + R_1/R_{10}}$ и $K_2 = \frac{R_0}{R_2}$.

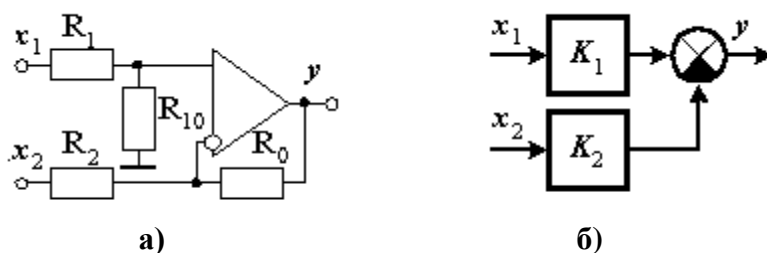


Рис. 3.22

При $\frac{R_0}{R_2} = \frac{R_{10}}{R_1} = K$ он становится дифференциальным усилителем:

$y = K(x_1 - x_2)$. При $R_1 = R_{10}$ и $R_2 = R_0$ получим вычитатель: $y = x_1 - x_2$.

3.7. Конструирование динамических звеньев на операционных усилителях

Пассивными компонентами линейных схем на ОпУ являются резисторы (R), конденсаторы (C), индуктивности (L) и их последовательные, параллельные и смешанные соединения.

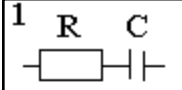
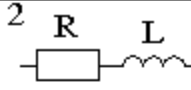
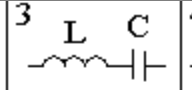
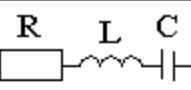
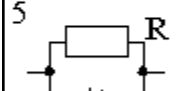
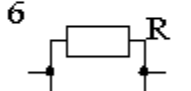

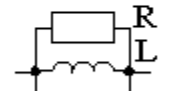
Операторные сопротивления радиоэлементов:

$$Z(s): Z_R = R, Z_C(s) = \frac{1}{Cs}, Z_L(s) = Ls. \quad (3.55)$$

Последовательное и параллельное соединения элементов Z_1 и Z_2 имеют сопротивления $Z_1 + Z_2$ и $Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

В табл. 3.1 приведены операторные сопротивления $Z(s)$ простейших двухполюсников. Смешанное соединение двухполюсников представляется суперпозицией последовательного и параллельного соединений.

Таблица 3.1

1  $\frac{1+RCs}{Cs}$	2  $R+Ls$	3  $\frac{1+LCs^2}{Cs}$	4  $\frac{1+RCs+LCs^2}{Cs}$
5  $\frac{R}{1+RCs}$	6  $\frac{RLs}{R+Ls}$	7  $\frac{Ls}{1+LCs^2}$	8  $\frac{RLs}{R+Ls+RLCs^2}$

Рассмотрим схему динамического каскада на ОпУ с ООС. Аналогично схеме статического каскада ее выход и ПФ входов равны:

$$\begin{cases} y = \sum_i W_{1i}(s)x_{1i}(t) - \sum_i W_{2i}(s)x_{2i}(t), \\ W_{1i}(s) = \left(\sum_j \frac{Z_0(s)}{Z_{2j}(s)} + 1 \right) / \sum_j \frac{Z_{1i}(s)}{Z_{1j}(s)}, W_{2i}(s) = \frac{Z_0(s)}{Z_{2i}(s)}. \end{cases} \quad (3.56)$$

Обозначим суммы ПФ входов: $S_1(s) = \sum W_{1i}(s)$ и $S_2(s) = \sum W_{2i}(s)$. Как и в (3.52), в работающей схеме между этими суммами существует

зависимость $S_1(s) = S_2(s) + 1$. Для синтеза схемы по заданным ПФ ее входов необходимо дополнить $S_1(s)$ и (или) $S_2(s)$ недостающими ПФ $W_{10}(s)$ и (или) $W_{20}(s)$ с **положительными** коэффициентами, чтобы стало выполняться условие $S_1(s) + W_{10}(s) = S_2(s) + 1 + W_{20}(s)$. Схему надо дополнить заземленными входами $x_{10} = 0$ и (или) $x_{20} = 0$.

Рассмотрим конструирование звеньев САУ на примере. Итак, в общем случае звено имеет k входов с сигналами $x_1(t) \dots x_k(t)$ и один выход $y(t)$. Задано уравнение, связывающее входные и выходной сигналы:

$$y(s) = W_1(s)x_1(s) + W_2(s)x_2(s) + \dots + W_k(s)x_k(s).$$

Входов с положительной передаточной функцией n , входов с отрицательной передаточной функцией m , $n + m = k$, как показано на рис. 3.23:

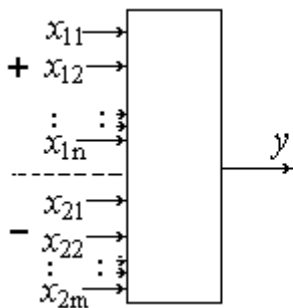


Рис. 3.23

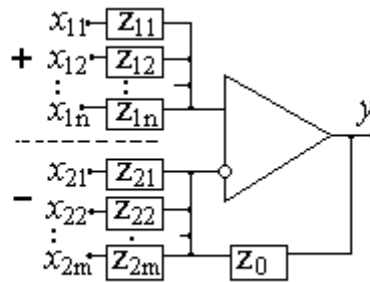


Рис. 3.24

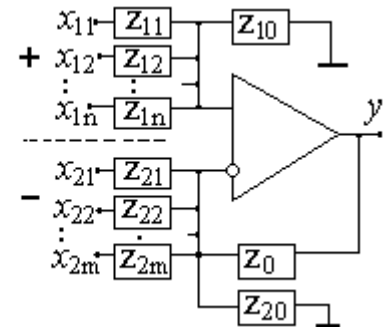


Рис. 3.25

С учетом этого исходное уравнение выглядит так:

$$y(s) = W_{11}(s)x_1(s) + W_{12}(s)x_2(s) + \dots + W_{1n}(s)x_n(s) - (W_{21}(s)x_{21}(s) + W_{22}(s)x_{22}(s) + \dots + W_{2m}(s)x_m(s)).$$

Берем это уравнение за исходное.

Базовая принципиальная схема для звена представлена на рис. 3.24.

Здесь $11 \dots 1n$ – прямые входы;

$21 \dots 2m$ – инвертирующие входы.

Далее проверяем выполнение условия:

$$S_1 = S_2 + 1,$$

где S_1 – сумма передаточных функций прямых входов,

S_2 - сумма передаточных функций инвертирующих входов:

$$S_1 = W_{11}(s) + W_{12}(s) + \dots + W_{1n}(s),$$

$$S_2 = W_{21}(s) + W_{22}(s) + \dots + W_{2m}.$$

Если условие не выполняется, добавляем заземленное сопротивление Z_{10} по прямому входу и (или) Z_{20} по инвертирующему, как показано на рис. 3.25.

Теперь должно выполняться условие:

$$S_1 + W_{10}(s) = S_2 + W_{20}(s) + 1.$$

Сигналы на этих входах равны 0, т.к. они заземлены.

Рассматриваем два варианта:

1. $S_1 + W_{10}(s) = S_2 + 1$, отсюда $W_{10}(s) = S_2 - S_1 + 1$,

2. $S_1 = S_2 + W_{20}(s) + 1$, отсюда $W_{20}(s) = S_1 - S_2 - 1$.

При этом значение $W_{10}(s)$ или $W_{20}(s)$ должно быть положительно. Берут соответствующий вариант. Если положительны обе функции, рассматривают обе, потом выбирают из условия простоты реализации.

Затем происходит выбор сопротивлений.

Два независимых сопротивления: Z_0 и Z_{1j} (например, Z_{11}) назначают произвольно, в соответствии с табл. 3.1. Назначение происходит также из условия простоты реализации, и, желательно, без индуктивностей. Самый простой вариант – активное сопротивление R . Начинаем выбор с них.

Номинал назначают из следующих соображений. У идеальных операционных усилителей $R_{вх} = \infty$, $R_{вых} = 0$. У реальных операционных усилителей $R_{вх} > 10$ МОм, $R_{вых} < 200$ кОм. Следовательно, назначенные сопротивления должны обеспечивать параметры, сравнимые с идеальными, т.е. лежать в пределах: $0.1R_{вх} > R > 10R_{вых}$, что соответствует 1..10 кОм.

Итак, имеем $Z_0 = R_0$ и $Z_{1j} = R_{1i}$ ($Z_{11} = R_{11}$). Расчет остальных сопротивлений происходит по соотношениям для прямых входов:

$$Z_{1i} = \frac{W_{1j}(s)Z_{1j}}{W_{1i}(s)} \quad \text{при } i \neq j, \quad (3.57)$$

где i – номер входа, для которого считают сопротивление (все кроме j);

$W_{1i}(s)$ – его передаточная функция;

j – номер входа с назначенным сопротивлением и передаточной функцией $W_{1j}(s)$.

[Если назначили Z_{11} , имеем $Z_{1i} = W_{11}(s) Z_{11} / W_{1i}(s)$, $i = 0$ (если есть), 2, 3, ..., n .].

Расчет сопротивлений для инвертирующих входов:

$$Z_{2i} = \frac{Z_0}{W_{2i}(s)}, \quad (3.58)$$

где $i = 0$ (если есть), 1, 2, ..., m .

Пример 3.4

Дано звено с передаточной функцией $W(s) = 1/(1+Ts)$. Это означает: $Y(s) = X(s)/(1+Ts)$. Видим: вход один, без инверсии: $W(s)$ положительна.

Итак:

$x_{11} = X$, $x_{12}, x_{13} \dots = 0$, $x_{21}, x_{22} \dots = 0$. Число прямых $n = 1$, инверсных $m = 0$.

Базовая схема представлена на рис. 3.26.

Проверим суммы передаточных функций по входам:

$$S_1 = \sum W_{1i}(s) = W_{11}(s) = 1/(Ts+1), \quad S_2 = \sum W_{2i}(s) = 0.$$

Теперь проверка условия $S_1 = S_2 + 1$.

$1/(Ts+1) \neq 0 + 1$. Не выполняется. Требуется добавка.

а. Добавляем по инвертирующему входу. Схема выглядит как на рис. 3.27.

Условие $S_1 = S_2 + 1 + W_{20}(s)$, т.е. $S_1 = 1 + W_{20}(s)$, дает нам передаточную функцию по добавленному входу:

$$W_{20}(s) = S_1 - 1 = 1/(Ts+1) - 1 = -Ts/(Ts+1) < 0.$$

Добавлять нельзя.

б. Добавляем по прямому входу. Схема – на рис. 3.28.

Условие $S_1 + W_{10}(s) = S_2 + 1$, т.е. $S_1 + W_{10}(s) = 1$ дает нам передаточную функцию по добавленному входу:

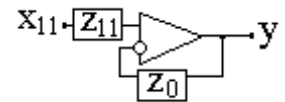


Рис. 3.26

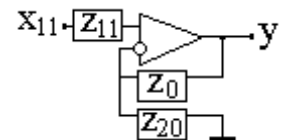


Рис. 3.27

$$W_{10}(s) = 1 - S_1 = 1 - 1/(Ts+1) = Ts/(Ts+1) > 0.$$

Добавлять можно.

Теперь подбираем сопротивления.

Назначаем: $Z_{11} = R = Z_0 = R$. Номинал поставим потом. (Обычно берут 1 кОм).

Ищем Z_{10} :

$$Z_{10} = \frac{W_{11}(s)Z_{11}}{W_{10}} = \frac{\left(\frac{1}{1+Ts}\right)R}{\left(\frac{Ts}{1+Ts}\right)} = \frac{R}{Ts} = \frac{1}{Cs},$$

где $C = T/R$, что видно из табл. 3.1. Таким образом, Z_{10} – это емкость, и принципиальная схема звена выглядит как на рис. 3.29, а.

Но можно было назначить другие сопротивления Z_{11} и Z_0 . Например, пусть $Z_{11} = 1/Cs$, т.е. емкость. Тогда:

$$Z_{10} = \frac{\left(\frac{1}{1+Ts}\right)\frac{1}{Cs}}{\frac{Ts}{1+Ts}} = \frac{1}{Ts} = \frac{1}{TCs^2}.$$

Соответствий в табл. 3.1 нет, применять нельзя.

Теперь $Z_{11} = Ls$, индуктивность. Тогда:

$$Z_{10} = \frac{\left(\frac{1}{1+Ts}\right)Ls}{\frac{Ts}{1+Ts}} = \frac{Ls}{Ts} = \frac{L}{T} = \text{const} = R \text{ (по табл. П2)}. \text{ Схема – на рис. 3.29, б.}$$

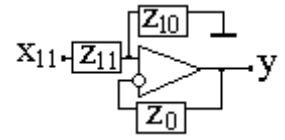


Рис. 3.28

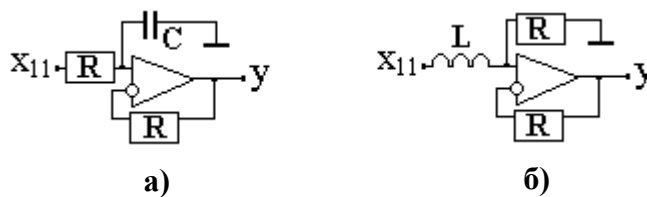


Рис. 3.29

Пример 3.5

Задано дифференциальное уравнение:

$$y + y' = 2x_{11} + 2x'_{11} + x_{12} - 2x_{21} - x'_{21}.$$

Преобразуем его в вид:

$$(1 + s)y = 2(1 + s)x_{11} + x_{12} - (2 + s)x_{21}.$$

Отсюда:

$$y = W_{11}(s)x_{11} + W_{12}(s)x_{12} - W_{21}(s)x_{21},$$

где $W_{11}(s) = 2$; $W_{12}(s) = 1/(1 + s)$; $W_{21}(s) = (2 + s)/(1 + s)$.

Вычисляем суммы $S_1(s) = (3 + 2s)/(1 + s)$ и $S_2(s) + 1 = (3 + 2s)/(1 + s)$.

Поскольку $S_1(s) = S_2(s) + 1$, то дополнительных заземленных входов не требуется, а схема имеет два прямых входа x_{11} , x_{12} и один инверсный вход x_{21} . По формулам (3.57), (3.58) определяем:

$$Z_{12}(s) = \frac{W_{11}(s)}{W_{12}(s)} Z_{11}(s) = 2(1 + s)Z_{11}(s), \quad Z_{21}(s) = \frac{Z_0(s)}{W_{21}(s)} = \frac{1 + s}{2 + s} Z_0(s).$$

Выбираем $Z_{11}(s) = 1/C_{11}s$ – конденсатор с емкостью C_{11} ;

$Z_0(s) = R_0/(1 + s)$ – параллельное соединение резистора R_0 и конденсатора $C_0 = 1/R_0$ (табл. 3.1, пункт 5). Тогда остальные элементы определяются: $Z_{12}(s) = 2(1 + s)/C_{11}s$ –

последовательное соединение резистора $R_{12} = 2/C_{11}$ и конденсатора $C_{12} = C_{11}/2$.

Выбираем $Z_{21}(s) = R_0/(2 + s)$ – параллельное соединение резистора $R_{21} = R_0/2$ и конденсатора $C_{21} = 1/R_0$. В результате

получаем схему на рис. 3.30.

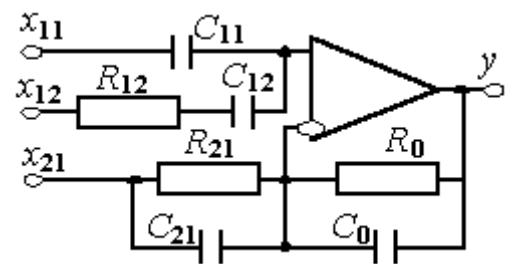


Рис. 3.30

Второй способ конструирования звеньев – *табличный*.

В табл. П 2, приведенную в приложении, сведены передаточные функции и схемотехнические реализации основных динамических звеньев.

Применение этой таблицы вполне достаточно для конструирования большинства схем на операционных усилителях. Поясним это на примере.

Пример 3.6

Дана передаточная функция одноходового звена:

$$W(s) = K / (1 + 2\xi Ts + T^2 s^2), \text{ где } K = 10, T = 10, \xi = 0.2.$$

В табл. П 2 самое близкое выражение: 23-1

$1 / (1 + C_{01} + T_{10}s + \tau_{10}^2 s^2)$, где обозначено: $C_{01} = C_0 / C_1$, $T_{10} = R_1 / C_0$, $\tau_{10}^2 = L_1 / C_0$ в схеме, представленной на рис. 3.31. На этом рисунке представлена также радиотехническая реализация указанных комплексных сопротивлений.

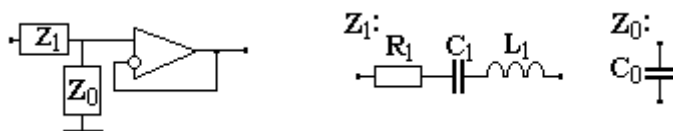


Рис. 3.31

Однако передаточная функция отличается от табличной наличием коэффициента усиления. По правилам соединения звеньев схему можно выполнить последовательным соединением указанного звена и усилительного, как показано на рис. 3.32. Здесь обозначено: Z_1^1 , Z_0^1 – сопротивления R_2 и R_0 , и коэффициент усиления такой схемы определяется:

$$K = 1 + \frac{Z_0^1}{Z_1^1}.$$

Однако два последовательно соединенных каскада второго и третьего столбцов табл. П2 с передаточными функциями $W_2(s)$ и $W_3(s)$ можно заменить одним с функцией $W_2(s)W_3(s)$, что возможно благодаря развязке входной цепи и цепи ОС. Схема с комплексными сопротивлениями изображена на рис. 3.33, ее реализация на радиоэлементах – на рис. 3.34.

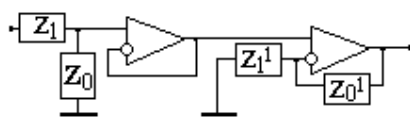


Рис. 3.32

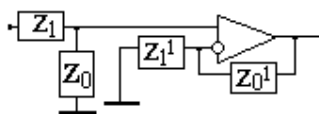


Рис. 3.33

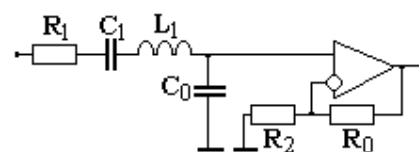


Рис. 3.34

Приступаем к расчету номиналов. Для устранения влияния C_{01} делаем допущение: $C_{01} = 1$. Тогда $K/(1+C_{01}+T_{10}s+\tau_{10}^2s^2) = K/(2+T_{10}s+\tau_{10}^2s^2)$.

Приравниваем: $K/(2+T_{10}s+\tau_{10}^2s^2) = 10/(1+4s+100s^2)$. Отсюда:

$$0,5K/(1+0,5T_{10}s+0,5\tau_{10}^2s^2) = 10/(1+4s+100s^2).$$

$$0,5K = 10 \rightarrow K = 20; 0,5T_{10} = 4 \rightarrow T_{10} = 8; 0,5\tau_{10}^2 = 100 \rightarrow \tau_{10}^2 = 200.$$

Подставим полученные коэффициенты в выражения номиналов:

$$K = 20 = 1+(R_0/R_2) \rightarrow R_0/R_2 = 19.$$

Произвольно взяв R_0 , получим $R_2 = R_0/19$;

$T_{10} = 8 = R_1/C_0$. Поскольку $C_0 = 1$ (например, 1мФ), имеем $R_1 = 8$ (8кОм),

$$\tau_{10}^2 = L_1/C_0 = 200 \rightarrow L_1 = 200.$$

3.8. Структурная схема и ее преобразования

Звенья могут быть соединены последовательно, параллельно и с обратной связью.

Последовательное соединение: структурная схема на рис. 3.35.

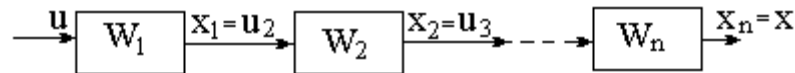


Рис. 3.35

Выходные сигналы звеньев будут равны

$$X_1 = W_1U; X_2 = W_2X_1 = W_2W_1U; X = W_nW_{n-1}...W_1U. \quad (3.59)$$

Для векторного варианта важен порядок перемножения матриц. Общая передаточная функция схемы выразится:

Векторная запись:

$$W(s) = W_nW_{n-1}...W_2W_1. \quad (3.60)$$

Скалярная запись: ПФ равна произведению ПФ звеньев.

$$W(s) = \prod W_i(s). \quad (3.61)$$

Частотные характеристики:

$$\text{КЧХ: } W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)}; \quad (3.62)$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega); \quad \text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega); \quad (3.63)$$

$$\text{ЛАХ: } L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega). \quad (3.64)$$

Параллельное соединение показано на рис. 3.36:

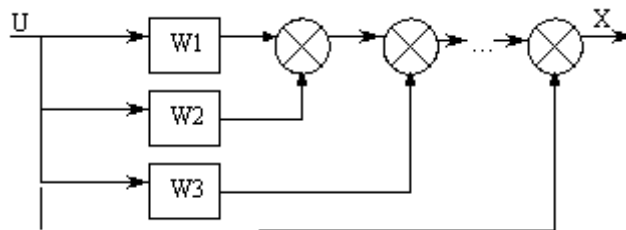


Рис. 3.36

$$\text{ПФ: } W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s); \quad (3.65)$$

$$\text{КЧХ: } W(j\omega) = \sum W_i(j\omega) = \sum P_i(\omega) + j \sum Q_i(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega); \quad (3.66)$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad \text{ФЧХ } \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \quad (3.67)$$

$$\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \quad (3.68)$$

Соединение с обратной связью представлено на рис. 3.37:

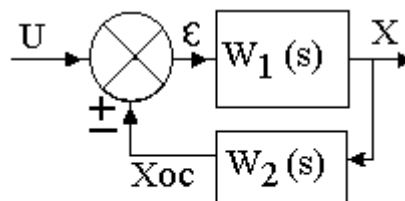


Рис. 3.37

Сигнал ошибки ε выразится:

$$\varepsilon(s) = U(s) \pm X_{oc}(s). \quad (3.69)$$

Передаточная функция:

– скалярный вариант

$$W(s) = \frac{W_1}{1 \mp W_1 W_2}, \quad (3.70)$$

– векторный вариант

$$W(s) = (I \pm W_1 W_2)^{-1} W_1. \quad (3.71)$$

Здесь:

$$W_1 W_2 = W_p(s) - \text{передаточная функция разомкнутой системы.} \quad (3.72)$$

КЧХ разомкнутой системы:

$$W_p(j\omega) = A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}. \quad (3.73)$$

Для нее же имеем:

$$\text{АЧХ: } A_p(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega); \quad \text{ФЧХ: } \varphi_p(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \quad (3.74)$$

Поделим КЧХ на составляющие:

$$W_p(s) = P_p(s) + jQ_p(s). \quad (3.75)$$

АЧХ замкнутой системы:

$$A(\omega) = |W_{j\omega}| = \frac{|W_1(j\omega)|}{|1 \mp W_1(j\omega)W_2(j\omega)|} = \frac{A_1(\omega)}{\sqrt{(1 \mp P_p(\omega))^2 \mp Q_p^2(\omega)}}; \quad (3.76)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \text{arctg} \frac{\pm Q_p(\omega)}{1 \pm P_p(\omega)};$$

$$\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) - 20 \lg \sqrt{(1 \pm P_p(\omega))^2 \pm Q_p^2(\omega)}.$$

Для единичной ОС $W_{oc} = 1$, или, в матричном варианте, I (единичная матрица).

3.9. Структурные преобразования

Основные правила структурных преобразований сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Преобразование	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка узлов		
Перестановка сумматоров		
Перенос узла через звено вперед		
Перенос узла через звено назад		
Перенос сумматора через звено вперед		
Перенос сумматора через звено назад		
Перенос узла через сумматор вперед		
Перенос узла через сумматор назад		

Пример 3.7

Найдем передаточную функцию схемы, представленной на рис. 3.38.

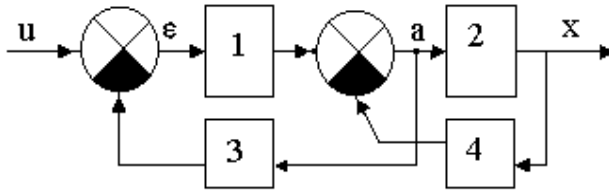


Рис. 3.38

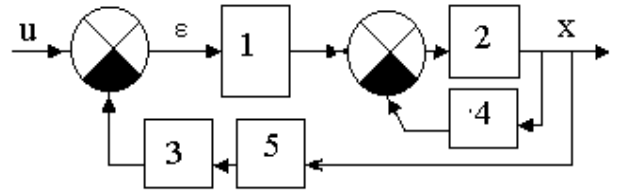


Рис. 3.39

Есть три вида соединений, передаточная функция которых известна: последовательное, параллельное, с обратной связью. Здесь не подходит ни одно из них. Приведем ее к виду, в котором есть эти соединения, перенесем узел a через звено 2 по ходу сигнала. Получим схему, показанную на рис. 3.39.

Добавится звено 5, передаточная функция которого $W_5=1/W_2$. Звенья 2 и 3 соединены с обратной связью, объединяем их в звено 6, $W_6 = \frac{W_2}{1 + W_2W_4}$.

Звенья 3 и 5 - последовательно, объединяем в звено 7, $W_7 = W_3 \cdot W_5 = W_3/W_2$, как изображено на рис. 3.40. Теперь видим, что в прямой цепи – последовательное соединение звеньев 1 и 6. Объединим в звено 8, $W_8 = W_1 \cdot W_6 = \frac{W_1W_2}{1 + W_2W_4}$, см. рис. 3.41. Теперь звенья 8 и 7 соединены с ОС, и

передаточная функция такой системы находится: $W(s) = \frac{W_8}{1 + W_8W_7}$.

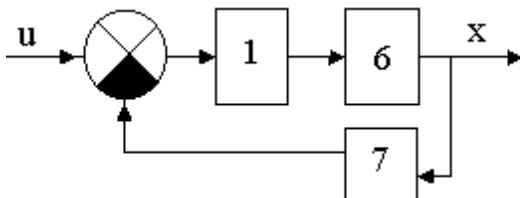


Рис. 3.40

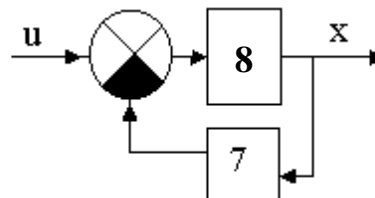


Рис. 3.41

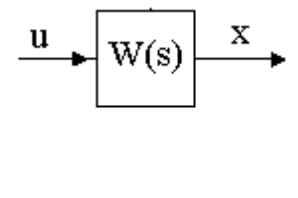


Рис. 3.42

Задача решена (см. рис. 3.42).

3.10. Правила построения асимптотической ЛАХ

Передаточная функция получается последовательным соединением нескольких звеньев. Передаточные функции звеньев при этом перемножаются. Порядок построения:

1. На оси частот в порядке возрастания все сопрягающиеся частоты отдельных звеньев;

2. Строят низкочастотную асимптоту, представляющую собой прямую переходящую через точку $20 \lg K_p$ на оси $20 \lg A(\omega)$, где K_p - коэффициент усиления разомкнутой системы с наклоном $\pm 20 \lg \nu$, где ν - число дифференцирующих (с плюсом) и интегрирующих (с минусом) звеньев;

3. Строят отрезки асимптот между сопрягающимися частотами, наклон каждого последующего участка по сравнению с предыдущим изменяется на: ± 20 дБ/дек для звеньев 1- го порядка, ± 40 дБ/дек для звеньев 2- го порядка. Причем плюс для функций, у которых передаточные функции в числителе, и минус в знаменателе.

Пример 3.8

Построим ЛАХ для следующей передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K_p(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3^2s^2 + 2\xi T_3s + 1)}$$

Найдем звенья

$$W_1(s) = K_p/s; \quad W_2 = (T_2s+1); \quad W_3 = 1/ (T_2s+1); \quad W_4 = 1/ (T_3^2 s^2 + 2\xi T_3s+1);$$

$$\omega_{c1} \omega_{c2} = 1/ T_2; \quad \omega_{c3} = 1/ T_3.$$

Низкочастотная часть: одно звено дифференцирующее ($\nu^+ = 1$), три интегрирующих ($\nu^- = 3$), $1-3=-2$, т.е. -40 дБ/дек. Звено 1 – дифференцирующее, первого порядка. Уменьшает наклон на 20 дБ/дек. Звено 2 – интегрирующее, увеличивает на 20 дБ/дек. Звено 3 – интегрирующее второго порядка, увеличивает на 40 дБ/дек.

Получаем характеристику, изображенную на рис. 3.43.

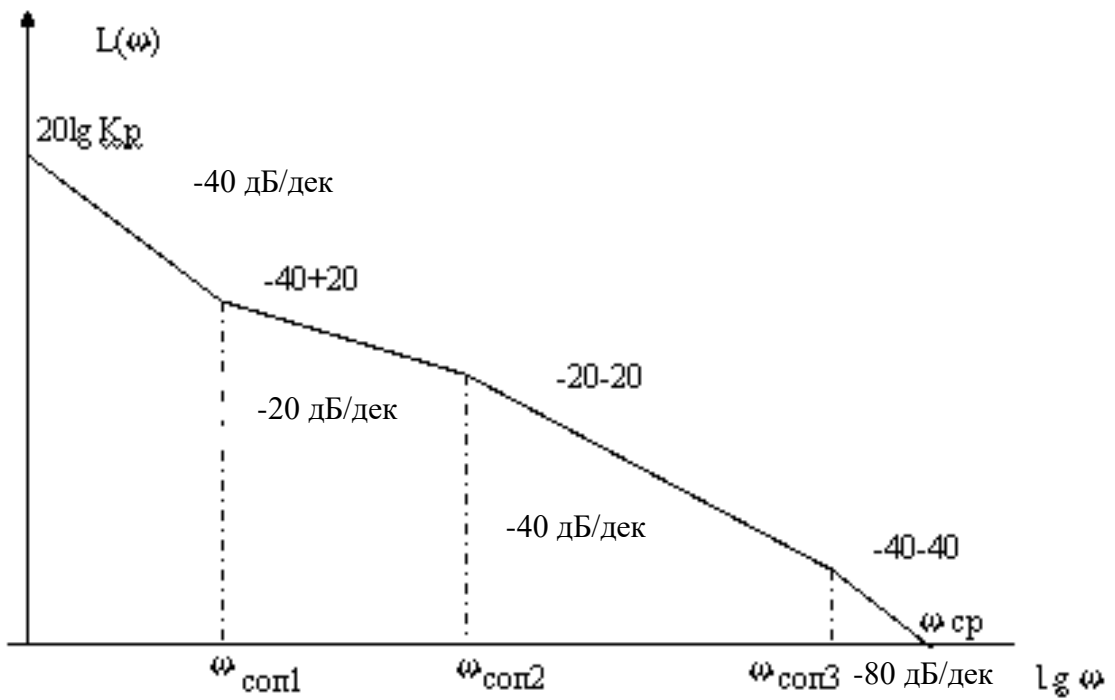


Рис. 3.43

4. Для построения ЛАХ замкнутой системы используют номограммы замыкания, приводящие системы с единичной ОС к разомкнутым.

3.11. Передаточные функции для режима стабилизации и управления

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 3.44.

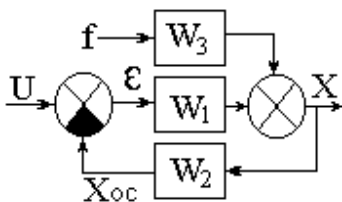


Рис. 3.44

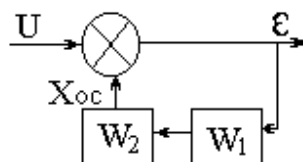


Рис. 3.45

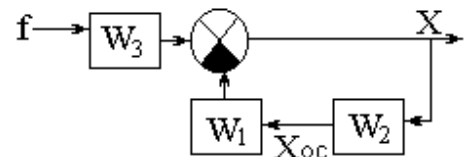


Рис. 3.46

Здесь:

U - управляющее воздействие;

f - возмущающее воздействие;

ε - ошибка системы = $U - X_{oc}$.

1. Режим управления: $f = 0, U \neq 0$:

а. Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p = U_{oc} / \varepsilon = W_1 \cdot W_2; \quad (3.77)$$

б. ПФ замкнутой системы:

$$W_3 = \frac{X}{U} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} = \frac{W_1}{1 + W_p}; \quad (3.78)$$

в. ПФ ошибки относительно управляющего воздействия:

$$W_{\varepsilon U} = \varepsilon / U = \frac{1}{1 + W_p}. \quad (3.79)$$

Структурная схема для этой передаточной функции изображена на рис. 3.45.

2. Режим стабилизации $f \neq 0, U = 0$:

а. ПФ замкнутой системы относительно помехи (рис. 3.46):

$$W_{3f} = X / f = \frac{W_3}{1 + W_1 W_2} = \frac{W_3}{1 + W_p}; \quad (3.80)$$

б. ПФ ошибки относительно помехи (рис. 3.46):

$$W_{\varepsilon f} = \varepsilon / f = -W_3 \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}. \quad (3.81)$$

При единичной обратной связи, $W_2 = 1$, имеем $W_{\varepsilon f} = -W_{3f}$.

При действии полезного сигнала $U(t)$ и помехи $f(t)$ можно составить дифференциальное уравнение САУ:

а) по выходному воздействию:

$$X(t) = W_3(p)U(t) + W_3(p)f(t), \quad (3.82)$$

б) по ошибке:

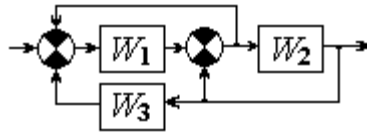
$$\varepsilon(t) = W_{\varepsilon U}(p)U(t) + W_{\varepsilon f}(p)f(t). \quad (3.83)$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой сигнал является входным при нахождении частотных характеристик? Чем отличается от него выходной сигнал?
2. Что называется комплексной частотной характеристикой?
3. Как связаны комплексная частотная характеристика и передаточная функция?
4. Что называется амплитудно-частотной характеристикой? Как она находится?
5. Что называется фазочастотной характеристикой? Как она находится?
6. Каково должно быть соотношение порядка производных входного и выходного сигналов для физически реализуемых систем? Какая характеристика на это указывает?
7. Как найти амплитудно-частотную и фазочастотную характеристику при изображении комплексной частотной характеристики на комплексной плоскости?
8. Чему равна амплитуда выходного сигнала в точке пересечения логарифмической амплитудно-частотной характеристикой оси частот?
9. Почему на графике логарифмической амплитудно-частотной характеристики отсутствует точка $\omega = 0$?
10. В каких случаях применяется статическая характеристика?
11. Что называется динамическим звеном?
12. Что называется типовым динамическим звеном?
13. Как зависит форма переходной характеристики колебательного звена от коэффициента затухания?
14. При каких условиях реальный операционный усилитель можно считать приближенным к идеальному?

15. Как соотносятся потенциалы на прямом и инверсном входах операционного усилителя?
16. Как выражается зависимость между передаточными функциями входов операционного усилителя?
17. Какие меры принимаются, если зависимость между передаточными функциями входов операционного усилителя не соблюдается?
18. Какие сопротивления принимают независимыми при конструировании звеньев САУ на операционных усилителях?
19. Какое условие должно выполняться при выборе добавочного сопротивления?
20. В каком случае два последовательно соединенных каскада можно заменить одним? Как это сделать?
21. Какое условие необходимо соблюдать при вычислении передаточной функции последовательно соединенных звеньев? Когда это не важно?
22. Для чего используются преобразования структурных схем САУ?
23. В каком случае при соединении звеньев с обратной связью в знаменателе передаточной функции ставится минус, а в каком плюс?
24. На сколько дБ/дек изменяется наклон участка асимптотической ЛАХ, соответствующего звену? От чего это зависит?
25. Чем отличаются передаточные функции схемы для режима стабилизации и управления? Какие сигналы при этом считаются входными, выходными?
26. По аналогии с примерами 3.2, 3.3 найти характеристики форсирующего звена первого порядка, второго порядка.
27. Построить реализацию динамического звена, описываемого дифференциальным уравнением:
$$y = \frac{1+2s}{1+s}x_{11} + \frac{1}{1+s}x_{12}.$$

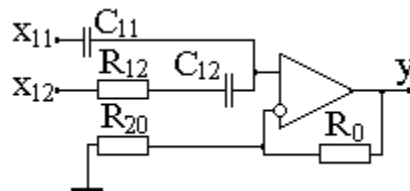
28. Найти передаточную функцию системы, представленной структурной схемой:



Ответы к задачам

26. Указание: ответ содержится в табл. П1 приложения.

27.



28.
$$W(s) = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 + W_2 + W_1 W_2 W_3}.$$

4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

4.1. Управляемость и наблюдаемость систем

Характеристика управляемости оценивает достаточное ли количество управляемых воздействий выбрано в процессе проектирования системы, чтобы обеспечить желаемое качество процесса.

Система называется *полностью управляемой*, если для любого начального состояния $X_0 = X(t_0)$ существует входная переменная $U(t)$, где $t_0 \leq t \leq t_1$, которая переводит систему из x_0 в другое произвольное состояние $X(t_1)$ за конечное время $\Delta t = t_1 - t_0$.

Если это определение справедливо для любого t_0 , то система называется полностью управляемой *всюду*.

Условие управляемости линейных стационарных систем: матрица управляемости $M = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$ должна иметь ранг, равный порядку системы n . (Матрица M содержит $n \cdot m$ столбцов и n строк).

Система является наблюдаемой в момент времени t_0 , если по данным измерения векторов $X(t)$ и $U(t)$ на интервале Δt можно однозначно определить начальное состояние $X(t_0)$.

Условие наблюдаемости: ранг матрицы наблюдаемости $Q = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$ должен быть равен порядку системы n . (Матрица Q содержит n столбцов и $n \cdot k$ строк, где k – число компонент вектора $Y(t)$).

Итак, управляемость и наблюдаемость зависит от свойств матриц A, B, C и не зависит от управляющего воздействия.

Дуальность систем

Имеем две системы 1 и 2, описанные уравнениями соответственно:

$$1: X_1'(t) = AX_1(t) + BU_1(t) \text{ и } 2: X_2'(t) = A^T X_2(t) + B^T U_2(t).$$

Такие системы называются двойственными, или сопряженными друг другу. Условие наблюдаемости системы 1 является условием управляемости системы 2, и наоборот.

Управляемость и наблюдаемость подсистем

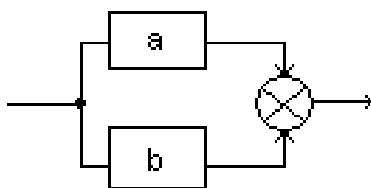


Рис. 4.1

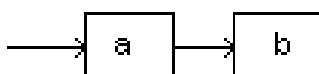


Рис. 4.2

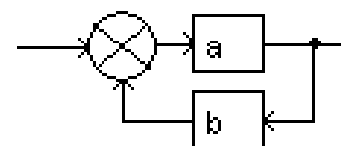


Рис.4.3

Для соединения на рис. 4.1: необходимое и достаточное условие управляемости (наблюдаемости) системы: управляемость (наблюдаемость) обеих подсистем.

Для рис. 4.2: чтобы система **a** была управляема (наблюдаема), необходимо, но не достаточно, чтобы обе подсистемы были управляемы (наблюдаемы).

Для рис. 4.3: обозначим **c** - последовательное соединение подсистем **a** и **b**, **d** – их параллельное соединение. Чтобы система была управляема (наблюдаема), необходимо и достаточно, чтобы система **c** (**d**) была управляема (наблюдаема).

4.2. Устойчивость систем

Устойчивость - способность системы возвращаться в исходное состояние с определенной точностью после исчезновения внешних сил,

которые ее из него вывели. **Неустойчивая** система удаляется от состояния равновесия или совершает вокруг него недопустимо большие колебания.

Устойчивость в малом: для системы существует область устойчивости, но границы ее не определены.

Устойчивость в большом: если существует область устойчивости и определены ее границы, т.е. область начальных отклонений, при которых система возвращается в начальное состояние. На рис. 4.4: положение А устойчиво, пока отклонения не вышли за пределы области устойчивости $\pm B$. Подробнее понятие области устойчивости будет разобрано в следующем параграфе.

Устойчивость в целом: система устойчива при любых начальных отклонениях. Этот случай показан на рис. 4.5.

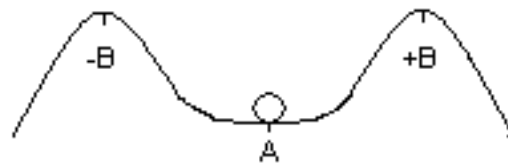


Рис.4.4



Рис.4.5

4.3. Определение устойчивости в малом по Ляпунову

Состояние равновесия системы, описываемой математической моделью $X'(t) = f(X(t), t)$, устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε , что при $|X_0 - X_l| < \delta$ выполняется: $|X(t) - X_l| < \varepsilon$.

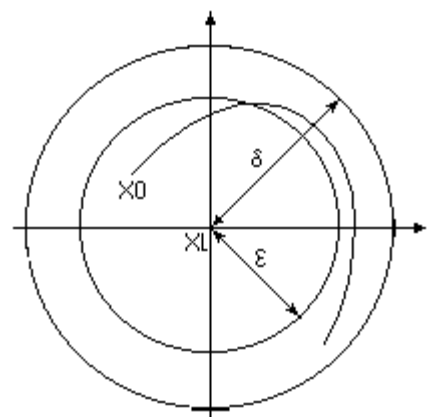


Рис. 4.6

Это означает: траектория, начинающаяся в δ - окрестности начала координат (положения равновесия), никогда не выйдет за пределы ε - окрестности. Такая траектория показана на рис. 4.6.

X_0 - ненулевые начальные условия, с помощью которых задано отклонение от положения равновесия, X_L - положение равновесия.

По аналогии с рис. 4.5 и 4.6, этот вариант изображен на рис. 4.7.

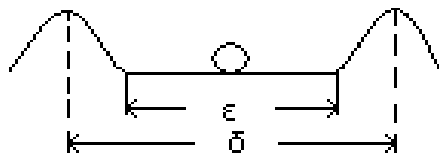


Рис.4.7

Определение асимптотической устойчивости

Система асимптотически устойчива, если она устойчива (смотри определение) и существует δ_a , что при $|X_0 - X_L| < \delta_a$, $X(t) \rightarrow X_L$ при $t \rightarrow \infty$, то есть система возвращается точно в положение равновесия.

Если из определения исключить просто устойчивость, то получится, что траектория может уходить в бесконечность, а потом из нее возвращаться.

4.4. Теорема Ляпунова об устойчивости в малом

Если характеристическое уравнение $(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) = 0$ линеаризованной системы $X' = AX$ имеет левые корни (с отрицательной вещественной частью) и не имеет других корней, то состояние равновесия исходной нелинейной системы $X' = f(X)$ асимптотически устойчиво в малом. Если хотя бы один корень нулевой или два чисто мнимых, а остальные левые, то система находится на границе устойчивости. Если есть хотя бы один правый корень (с положительной действительной частью), то система неустойчива.

Если система линейна, то ее устойчивость в малом автоматически означает устойчивость в большом и целом.

Для линейных систем можно сформулировать четыре условия устойчивости:

1. Система устойчива: все корни левые.
2. Система неустойчива: есть хотя бы один правый корень.
3. Система на границе устойчивости: есть один нулевой или пара чисто мнимых корней:

а) нулевой корень $p=0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{\text{св}}(t) = c_1 e^{0t} = c_1. \quad (4.1)$$

Граница устойчивости апериодического типа.

б) пара чисто мнимых корней $p_{1,2} = \pm j\omega$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{\text{св}}(t) = A e^{0t} \sin(\omega t). \quad (4.2)$$

Граница колебательного типа.

Вся комплексная плоскость делится на две области: область устойчивости - левая и область неустойчивости - правая. Линия их разделения (мнимая ось) является границей устойчивости. Устойчивость системы определяют по полюсам передаточной функции, которые являются корнями характеристического уравнения.

4.5. Критерий устойчивости Гурвица

Критерий является алгебраическим, т.е. расчетным. Позволяет находить соотношение между коэффициентами характеристического уравнения, при котором его корни будут левыми. Необходимое условие устойчивости: положительность всех коэффициентов в характеристическом уравнении. Для систем 1-го и 2-го порядков это условие является достаточным.

Критерий Гурвица: чтобы система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ были положительными, при $a_0 > 0$. Для нахождения Δ_1, Δ_2 , и т. д. построим матрицу из коэффициентов характеристического уравнения:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Правила построения матрицы: по главной диагонали – все коэффициенты от a_1 до a_n . В столбцах вверх от главной диагонали: индексы нарастают, а вниз – убывают. Первая строка: все нечетные коэффициенты. Вторая: все четные. Если компонент матрицы имеет номер меньше минимального в строке или больше максимального – заменяют нулем. Размерность матрицы $n \times n$.

Определители Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}, \text{ и т.д.} \quad (4.4)$$

Последний определитель равен определителю всей матрицы.

Если $\Delta_n = 0$, то у системы есть один нулевой корень или пара мнимых корней. $\Delta_n = 0$ возможно при $a_n = 0$ (нулевой корень, апериодическая граница) или при $\Delta_{n-1} = 0$ (пара мнимых, колебательная граница).

При известных коэффициентах характеристического уравнения определители Гурвица вычисляются легко, при наличии компьютера.

Пример 4.1

Определить устойчивость системы, представляющей собой последовательное соединение трех звеньев с отрицательной единичной обратной связью. Передаточные функции звеньев:

$$W_1(s) = \frac{K_1}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}, W_2(s) = \frac{K_2}{s}, W_3(s) = \frac{K_3}{T_3 s + 1},$$

где $T_1 = 0,5$ с, $T_2 = 0,01$ с, $T_3 = 1,0$ с, $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $K_3 = 1$.

Передаточная функция замкнутой системы определяется:

$$W(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)s(T_3 s + 1) + K_1 K_2 K_3}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0, \text{ где } a_0 = 0,01, a_1 = 0,11, a_2 = 1,1, a_3 = 1, a_4 = 50.$$

Коэффициенты положительны, следовательно, необходимое условие устойчивости выполнено.

Составляем матрицу Гурвица:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

Вычисляем определители. Подсчет показывает, что

$$\Delta_3 = 50(0,121 - 0,605 - 0,01) < 0.$$

Следовательно, система неустойчива.

4.6. Критерий Михайлова

Является частотным, т.е. позволяет судить об устойчивости системы по виду её частотной характеристики. Частотные критерии графоаналитические, что менее точно, но более наглядно. Дано характеристическое уравнение:

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Заменим $s \rightarrow j\omega$. Представим полином в виде:

$$A(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + \dots + a_n = \operatorname{Re} A(j\omega) + j \operatorname{Im} A(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (4.5)$$

Теперь можно построить график $A(j\omega)$.

При изменении ω конец вектора $A(j\omega)$ опишет на комплексной плоскости траекторию, которая называется годографом характеристического уравнения.

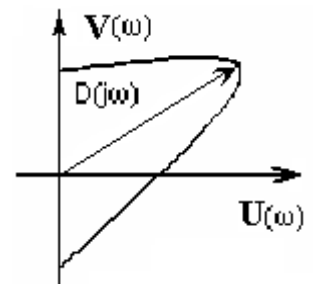


Рис. 4.8

Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы вектор годографа при изменении ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в 0, вокруг нуля на угол $\pi n/2$, где n - порядок характеристического уравнения.

Для устойчивой системы годограф всегда начинается на положительной вещественной оси и поворачивается против часовой стрелки. Годограф должен пройти последовательно n квадрантов, иметь спиралевидную форму и уходить в бесконечность в квадранте, номер которого равен порядку характеристического уравнения. Годографы устойчивых и неустойчивых систем показаны на рис. 4.9, а,б. На рис.4.10 – годографы систем на границе устойчивости: рис.4.10, а – апериодическая граница (один нулевой корень), рис.4.10, б – колебательная (пара мнимых).

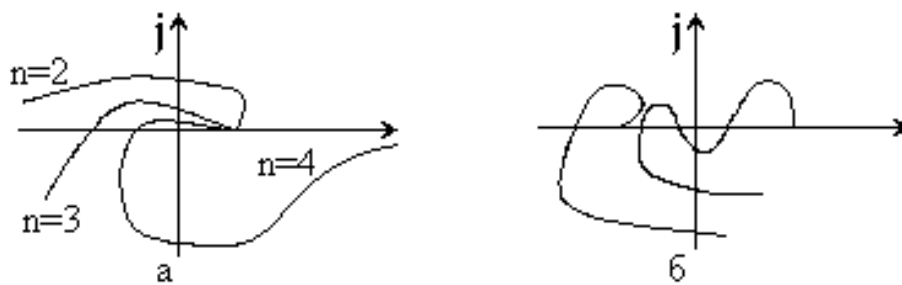


Рис. 4.9

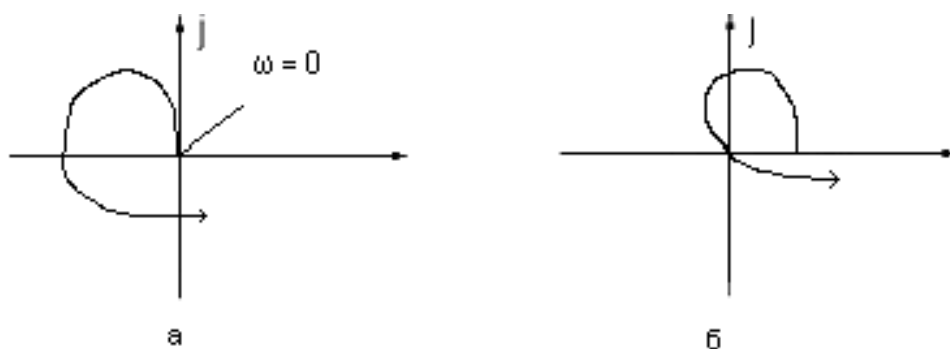


Рис. 4.10

Отсюда также следует, что корни характеристического уравнения со значениями действительных и мнимых частей $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ должны

чередоваться: между двумя соседними нулями $U(\omega)$ должен находиться нуль $V(\omega)$. В противном случае система неустойчива.

Пример 4.2

Определить устойчивость системы, ПФ которой в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$Wp(s) = \frac{K}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)},$$

где $K = 58 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,01 \text{ с}$, $T_2 = 0,58 \text{ с}$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$A(s) = s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + K = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K.$$

Заменяем в характеристическом полиноме s на $j\omega$. Определим вещественную и мнимую части функции $A(j\omega)$:

$$P(\omega) = \text{Re}A(j\omega) = K - (T_1 + T_2)\omega^2 = 58 - 0,58\omega^2,$$

$$Q(\omega) = \text{Im}A(j\omega) = \omega - T_1T_2\omega^3 = \omega - 5,7 \cdot 10^{-3}\omega^3.$$

Вычислим $U(\omega)$ и $V(\omega)$ для ряда значений частоты:

$\omega, \text{ с}^{-1}$	0	5	10	13	15	∞ ,
$P(\omega)$	58	44	0	-40	-70	$-\infty$,
$Q(\omega)$	0	4	4,5	0	-5	$-\infty$.

По данным вычислений построим годограф Михайлова. Годограф последовательно проходит через три квадранта. Следовательно, система устойчива.

Пример 4.3

Определить устойчивость системы, ПФ которой в разомкнутом состоянии равна

$$Wp(s) = \frac{K}{-1 + Ts},$$

где K – коэффициент усиления разомкнутой системы; $T > 0$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$A(s) = Ts + K - 1. \text{ Заменяем } s \text{ на } j\omega. \text{ Имеем:}$$

$$A(j\omega) = j\omega T + K - 1 = P(\omega) + jQ(\omega), \text{ где } P(\omega) = K - 1, Q(\omega) = \omega T.$$

Для устойчивости системы требуется, чтобы вектор $A(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернулся на угол $\pi/2$. При $K < 1$ годограф расположен во втором квадранте, и угол поворота годографа составляет $-\pi/2$, а при $K > 1$ равен $\pi/2$. Вывод: система устойчива при $K > 1$.

4.7. Критерий Найквиста

Критерий также частотный. Позволяет судить об устойчивости системы, замкнутой единичной обратной связью (рис. 4.11), по виду ее частотной характеристики в разомкнутом состоянии.

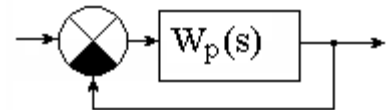


Рис. 4.11

Пусть в разомкнутом состоянии система устойчива. Все корни характеристического уравнения имеют отрицательные реальные части.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(s) = B(s)/A(s),$$

где $A(s)$ - характеристический полином разомкнутой системы:

$$A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n,$$

$B(s)$ – полином, степень которого хотя бы на единицу меньше n :

$$B(s) = b_0s^m + \dots + b_m, \quad m < n. \text{ Передаточная функция замкнутой системы}$$

относится к разомкнутой так: $W_3 = W_p/(1 + W_p) = B(s)/(A(s) + B(s))$.

По свойству передаточных функций знаменатель $A(s) + B(s)$ является характеристическим полиномом замкнутой системы.

Функция $1 + W_p(s)$ называется функцией возвратной разности и представляет собой отношение характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой систем:

$$W_p(s)/ W_3(s) = 1 + W_p(s). \quad (4.6)$$

Заменим $s \rightarrow j\omega$ и посчитаем приращение аргумента для функции возвратной разности, при изменении частоты от 0 до ∞ :

$$\Delta \arg(1 + W_p(j\omega)) = \Delta \arg \frac{A(j\omega) + B(j\omega)}{A(j\omega)} = \Delta \arg(A(j\omega) + B(j\omega)) - \Delta \arg A(j\omega). \quad (4.7)$$

Здесь первое слагаемое - приращение аргумента характеристического вектора замкнутой системы, а второе - разомкнутой. В разомкнутом состоянии система устойчива, значит, по критерию Михайлова, $\Delta \arg$ разомкнутой системы равно $\pi n/2$.

Если замкнутая система тоже устойчива, то приращение аргумента для замкнутой системы так же равно $\pi n/2$. Значит, для вектора обратной разности $\Delta \arg(1 - W_p(j\omega)) = 0$.

Если разомкнутая система устойчива, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \arg(1 - W_p(j\omega)) = 0$ при $0 < \omega < \infty$.

Геометрически это означает: годограф функции обратной разности не охватывает начало координат. Значит, годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(1, j0)$. Она называется критической. Годограф проходит через нее – система на границе устойчивости, охватывает – неустойчива. Это показано на рис. 4.12.

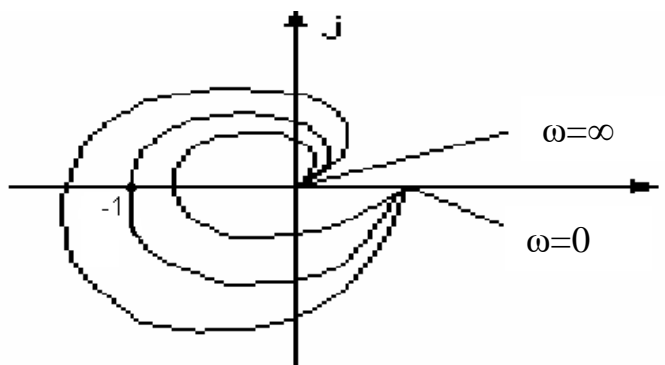


Рис. 4.12

Пусть разомкнутая система находится на границе устойчивости и имеет один нулевой или пару чисто мнимых корней.

КЧХ разомкнутой системы имеет разрыв при $\omega = 0$ или при $\omega = \omega_1 \neq 0$, где $\pm j\omega_1$ - мнимые сопряженные корни. Если разрыв при $\omega = 0$, то система

является астатической. Для такой системы характерно наличие интегрирующих звеньев. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$A(s) = s^v A_1(s), \quad (4.8)$$

где v - порядок астатизма; $A_1(s)$ - полином, не имеющий нулевых корней.

Для этого случая необходимо дополнить характеристики дугой бесконечного радиуса начинающейся на положительной части вещественной оси, как показано на рис. 4.13.



Рис. 4.13

Если пара мнимых корней $\pm j\omega$, ЧХ дополняют дугой бесконечного радиуса углом π . Варианты таких ЧХ приведены на рис. 4.14.

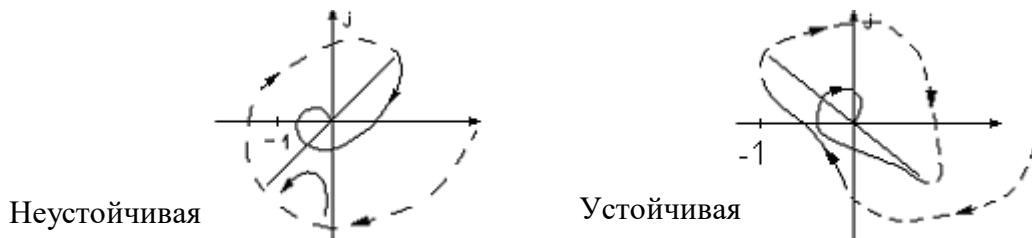


Рис. 4.14

Разомкнутая система неустойчива, значит, у системы есть l правых корней. По критерию Михайлова для устойчивости системы необходимо:

$$\Delta \arg(1 + W_p) = \Delta \arg(B(j\omega) + A(j\omega)) - \Delta \arg A(j\omega) = l\pi. \quad (4.9)$$

При этом годограф разомкнутой системы должен охватывать критическую точку $l/2$ раз. Для определения числа охватов применяют правило переходов. Пересечение отрезка от $-\infty$ до -1 сверху вниз при возрастании частоты называется положительным переходом, а в обратном

направлении – отрицательным переходом. Если ЧХ начинается на этом отрезке, или заканчивается на нем, то считается половина перехода.

Пример 4.4

Определить устойчивость системы, ПФ которой в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W_p(s) = \frac{K}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \text{ где } K = 100 \text{ с}^{-1}, T_1 = 0,1 \text{ с}, T_2 = 0,02 \text{ с}.$$

Определим АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы:

$$A(\omega) = \left| \frac{K}{j\omega(1 + T_1j\omega)(1 + T_2j\omega)} \right| = \frac{100}{\omega \sqrt{1 + (0,1\omega)^2} \sqrt{1 + (0,02\omega)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg 0,1\omega - \arctg 0,02\omega.$$

Вычислим $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для ряда значений частоты.

$\omega, \text{ с}^{-1}$	0	5	10	15	25	50	100,
$A(\omega)$	∞	18	6,9	3,56	1,32	0,28	0,054,
$\varphi(\omega)$	-90	-122	-144	-153	-184	-214	-238.

По данным вычислений построим годограф разомкнутой системы.

Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы имеет один нулевой корень. Годограф не замкнут. Поэтому ветвь КЧХ, соответствующая частоте $\omega = \infty$, дополним дугой бесконечного радиуса, чтобы вектор $W_p(j\omega)$ повернулся на угол 90° . Годограф охватывает точку $(-1, j0)$. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

4.8. Логарифмический вариант критерия Найквиста

Для определения устойчивости замкнутой системы можно использовать ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы ($L_p(\omega)$ и $\varphi_p(\omega)$).

Установим связь между пересечением КЧХ участка $(-\infty; -1)$ на оси Re и взаимным расположением ЛАХ и ЛФХ.

1. Точка пересечения $W_p(j\omega)$ отрезка $(-\infty; -1)$ соответствует пересечению ЛФХ линий связи $-\pi, -3\pi, -5\pi\dots$ на частотах, где $L_p(\omega) > 0$.

2. Дополнение $W_p(j\omega)$ дугой бесконечного радиуса соответствует дополнению $\varphi_p(\omega)$ отрезком, сводящим $\varphi_p(0)$ к нулю, если $W_p(j\omega)$ начинается в ∞ на положительной части оси Re , или к $-\pi$, если на отрицательной.

3. Положительные переходы $W_p(j\omega)$ отрезка $(-\infty; -1)$ соответствуют уменьшению $\varphi_p(\omega)$, отрицательные – увеличению.

Отсюда – формулировка логарифмического варианта критерия Найквиста. Чтобы замкнутая система была устойчива, при ее неустойчивости в разомкнутом состоянии с количеством правых корней характеристического уравнения l , необходимо и достаточно, чтобы в диапазоне частот $L_p(\omega) > 0$, разность между числом положительных и отрицательных переходов $\varphi_p(\omega)$, дополненной при порядке астатизма $\nu \neq 0$ отрезком, сводящим фазу к нулю при четном l или к $-\pi$ при нечетном l , через уровни $-\pi, -3\pi, -5\pi\dots$, равнялась $l/2$.

Это проще показать на примере, приведенном на рис. 4.15.

Пример 4.5

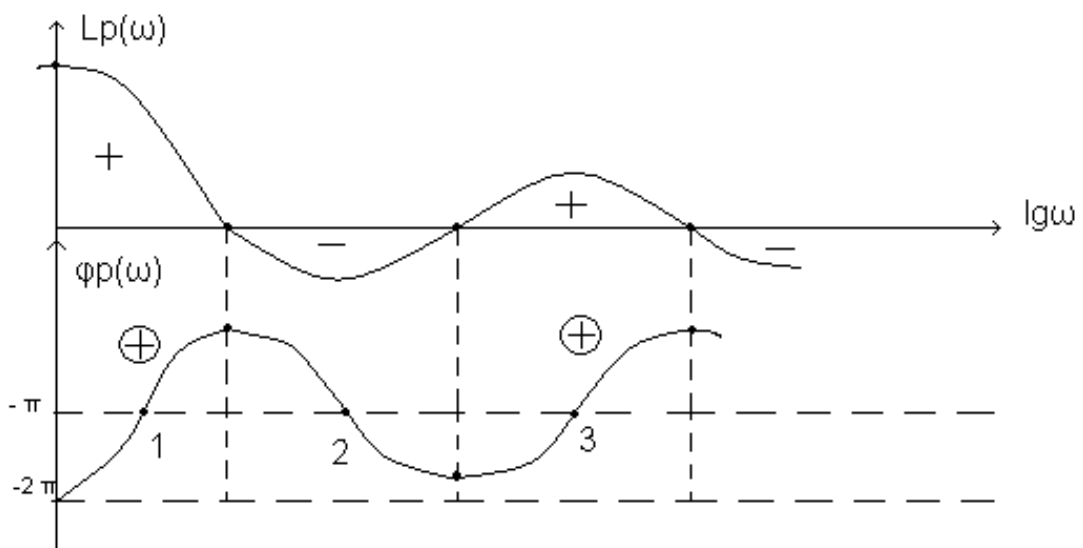


Рис. 4.15

Дано: порядок астатизма $\nu = 0$, число правых корней $b = 4$. Пересечение $\varphi_p(\omega)$ линий $-\pi$: точка 1 – положительный переход ($L_p(\omega) > 0$), точка 2 – не считаем, так как $L_p(\omega) > 0$ (если бы $L_p(\omega)$ было положительным, был бы отрицательный переход, так как пересечение здесь сверху вниз), точка 3 – положительный переход. Итак, $n_+ = 2$, $n_- = 0$. Всего $n = 2$. Теперь $l/2 = 2$. Значит $n = l/2$. Следовательно, замкнутая система устойчива.

4.9. Запасы устойчивости

Системы рассчитываются при различных допущениях, эксплуатируются в различных диапазонах параметров, поэтому вводятся запасы устойчивости по амплитуде, фазе. Для критерия Гурвица задается в виде ограничивающей системы неравенств:

$$\Delta_1 = \varepsilon_1, \Delta_2 = \varepsilon_2 \text{ и т.д.} \quad (4.10)$$

Для критерия Михайлова и Найквиста задается некоторая область вокруг соответствующей критической точки, в которую не должен заходить соответствующий годограф, как показано на рис. 4.16. Здесь вариант рис. 4.16, а – для критерия Михайлова, рис. 4.16, б – Найквиста.

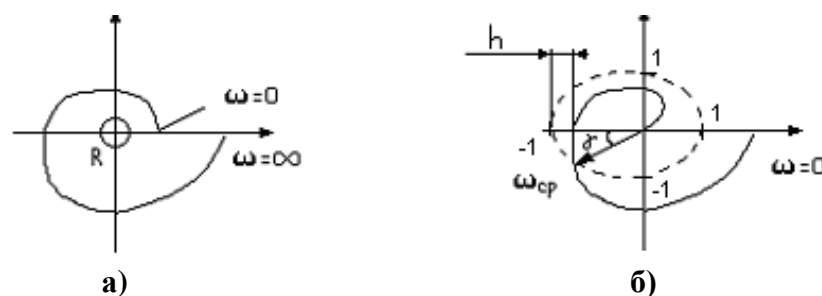


Рис. 4.16

В качестве меры устойчивости рассматривают две величины: запас устойчивости по фазе γ , запас устойчивости по амплитуде h , которые характеризуют удаленность годографа от критической точки.

$$\gamma = \left| -\pi - \varphi_p(\omega_{cp}) \right|, \quad (4.11)$$

где ω_{cp} - частота среза, для которой $|W_p(j\omega_{cp})| = 1$.

При увеличении K_p $|W_p(j\omega)|$ возрастает, и при превышении K_p критического значения $K_{p,кр}$ система становится неустойчивой. При $K_p = K_{p,кр}$ система на границе устойчивости, годограф проходит через точку $(-1, j0)$.

При анализе по логарифмическим характеристикам: запас устойчивости по модулю $m = 20 \lg h$, при том значении частоты, при котором $\varphi(\omega) = -\pi$. Запас по фазе γ равен значению угла, представляющего собой превышение ФЧХ над уровнем $-\pi$, при частоте среза. Это показано на рис. 4.17.

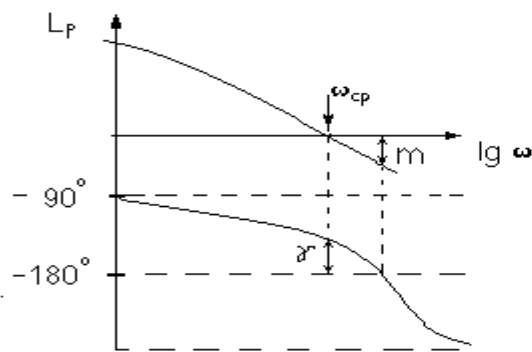


Рис. 4.17

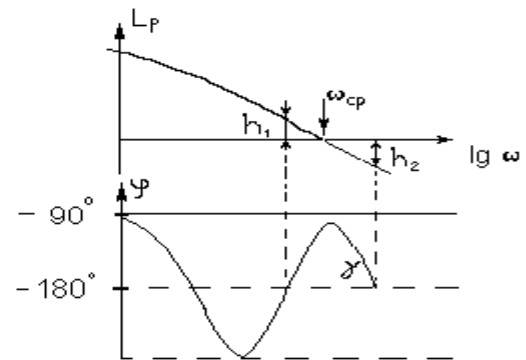


Рис. 4.18

Рекомендуемое значение запаса по фазе 30 – 40 %, по модулю 6 – 8 дБ.

Для систем с внутренними обратными связями потеря устойчивости может произойти как при уменьшении, так и при увеличении коэффициента усиления. Запас устойчивости задают в виде $\pm h$ и $\pm \gamma$, как показано на рис. 4.18.

4.10. Построение областей устойчивости

Изменение параметров САУ приводит к изменению коэффициентов уравнения динамики. Останется ли при этом САУ устойчивой - неизвестно. Рассмотрим метод определения границ допустимых изменений параметров, при которых САУ не теряет устойчивости.

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.12)$$

Обычно характеристическое уравнение приводят к виду:

$$D(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + c_2 p^{n-2} + \dots + c_n = 0, \quad (4.13)$$

где $c_0 = a_0 / a_0 = 1$, $c_1 = a_1 / a_0$ и т.д.

При некоторых конкретных значениях c_1, c_2, \dots, c_n уравнение имеет решение, то есть набор корней (p_1, p_2, \dots, p_n) . По их расположению на комплексной плоскости можно судить об устойчивости САУ при заданных параметрах. Если изменить какой-либо параметр САУ, то изменятся и коэффициенты характеристического уравнения $D(p) = 0$: $c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn}$.

Уравнение примет вид:

$$D_n(p) = p^n + c_{n1} p^{n-1} + c_{n2} p^{n-2} + \dots + c_{nn} = 0. \quad (4.14)$$

Это уже другое уравнение, его решение $(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nn})$. При изменении какого-либо параметра САУ коэффициенты тоже будут изменяться, а его корни будут перемещаться по комплексной плоскости, как показано на рис. 4.19.

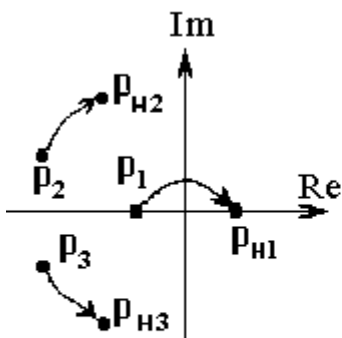


Рис. 4.19

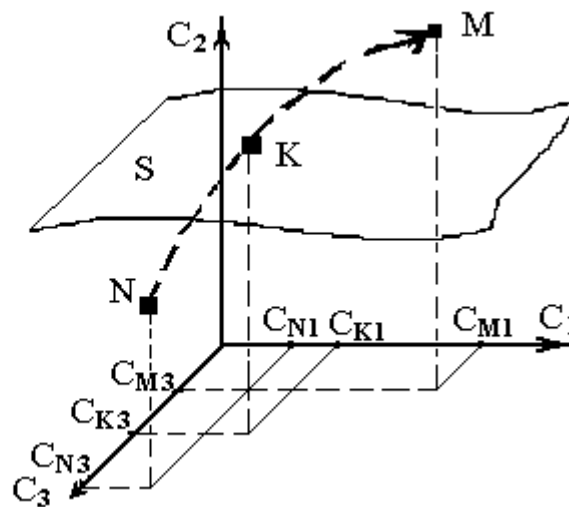


Рис. 4.20

Для характеристического уравнения (4.13) вводится n -мерное пространство, по осям которого откладываются коэффициенты c_i . Расположение корней характеристического уравнения p_i на комплексной плоскости зависит от c_i . Каждый набор коэффициентов можно изобразить точкой в пространстве коэффициентов. Так, уравнению третьей степени соответствует трехмерное пространство коэффициентов (рис. 4.20).

Пусть точка N с координатами (c_{N1}, c_{N2}, c_{N3}) соответствует уравнению, имеющему решение (p_{N1}, p_{N2}, p_{N3}) , точка M с координатами (c_{M1}, c_{M2}, c_{M3}) - решение (p_{M1}, p_{M2}, p_{M3}) .

При изменении коэффициентов корни характеристического уравнения будут перемещаться по комплексной плоскости, описывая корневые годографы.

Точка в пространстве коэффициентов, соответствующая данному уравнению, будет перемещаться по некоторой траектории, например, из положения N в положение M . Этому перемещению будет соответствовать и перемещение корней (p_{N1}, p_{N2}, p_{N3}) на комплексной плоскости в положение (p_{M1}, p_{M2}, p_{M3}) (аналогично рис.4.19).

При этом движении некоторые корни будут переходить через ось Im комплексной плоскости из левой полуплоскости в правую и наоборот. В момент перехода такой k -й корень примет значение $p_k = j\omega_k$, а коэффициенты уравнения будут иметь определенные значения c_{k1}, c_{k2}, c_{k3} , определяющие в пространстве коэффициентов точку K . Подставим корень p_k в характеристическое уравнение.

Меняя ω от $-\infty$ до $+\infty$, и находя при каждой частоте все возможные сочетания коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n , удовлетворяющих уравнению

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + c_1 (j\omega)^{n-1} + c_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + c_n = 0, \quad (4.15)$$

можно построить в пространстве коэффициентов поверхность S , разделяющую его на области, называемые D -областями. Полученное

уравнение называется уравнением границы D -разбиения. Разбиение пространства коэффициентов на области с одинаковым числом правых корней внутри каждой области и выделение среди полученных областей области устойчивости называется методом D -разбиения.

Переход из одной D -области в другую через поверхность S соответствует переходу одного или нескольких корней через мнимую ось в плоскости корней (граница D -разбиения является отображением мнимой оси), то есть каждая точка внутри определенной D -области соответствует уравнению с определенным количеством левых и правых корней. Поэтому области обозначают $D(l)$ по числу l правых корней. Здесь D_0 – область устойчивости (правых корней нет), $D_1 \dots D_n$ – области неустойчивости.

Для определения устойчивости системы требуется взять любую точку в каждой области и найти для нее l . Затем, двигаясь по пространству коэффициентов через границу S , можно выявить обозначения всех других областей.

D-разбиение по одному параметру

Можно изменять значения, например, только одного или двух коэффициентов, оставляя другие коэффициенты постоянными. Границу D -разбиения можно строить также и в пространстве конкретных параметров, от которых зависят коэффициенты.

Определим влияние на устойчивость САУ, коэффициента K , линейно входящего в ХУ. Приведем ХУ к виду $D(p) = S(p) + K \cdot N(p)$, где $S(p)$ – полином, не зависящий от K , $N(p)$ – полином, зависящий от K . Вынесем K за скобки. Граница D -разбиения задается уравнением:

$$D(j\omega) = S(j\omega) + K \cdot N(j\omega) = 0, \Rightarrow K = -S(j\omega)/N(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega). \quad (4.16)$$

Изменяя ω от $-\infty$ до $+\infty$, будем вычислять $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ и по ним строить точки границы D -разбиения. Пространство коэффициентов представляется системой координат X - Y (рис. 4.21, а).

Если в плоскости корней двигаться вдоль мнимой оси от $-\infty$ до $+\infty$ и штриховать ее слева (рис. 4.21, б), то это будет соответствовать движению вдоль линии D -разбиения при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ и штриховке ее также слева. Переходу корня в плоскости корней слева направо вдоль стрелки 1 соответствует переход через границу D -разбиения вдоль стрелки 1, и наоборот. Если пересекается область с двойной штриховкой (точки A, B, C), то в плоскости корней мнимую ось пересекает пара комплексно сопряженных корней.

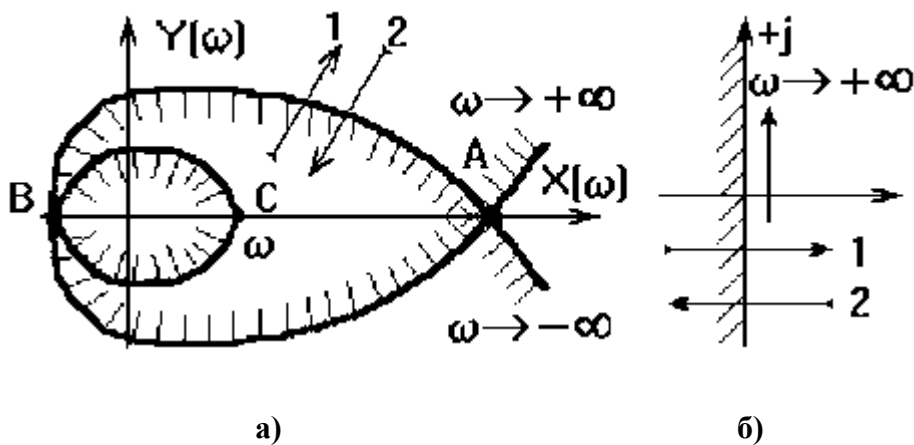


Рис. 4.21

Если известно количество правых корней, соответствующее какой-либо D -области, то двигаясь от нее через границы с учетом штриховок, можно обозначить все остальные области. Область с наибольшим количеством штриховок является претендентом на область устойчивости. Нужно взять любую точку из этой области и при соответствующем значении K проверить систему на устойчивость любым методом.

Есть одна особенность. Так как K - вещественное число, то $Y(\omega) = 0$, поэтому нас интересует не вся область устойчивости, а лишь отрезок вещественной оси в этой области, то есть $K = X(\omega)$.

Пример 4.6

Определим область допустимых значений параметра K методом D -разбиений, если передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы:

$$W_p(s) = \frac{10}{(100s^2 + 24s + 1)(s + 1)}, \quad W(s) = \frac{10}{(100s^2 + 24s + 1)(s + 1) + 10K}.$$

Запишем характеристическое уравнение, в которое параметр K входит линейно: $A(s) = 100s^3 + 124s^2 + 25s + 1 + 10D = 0$, где $D = K$.

Заменим s на $j\omega$. $-j100\omega^3 - 124\omega^2 + j25\omega + 1 + 10D = 0$.

Решим это уравнение относительно D :

$$D(j\omega) = j10\omega^3 + 12,4\omega^2 - j2,5\omega - 0,1.$$

Выделим действительную и мнимую часть:

$$\operatorname{Re} D(j\omega) = 12,4\omega^2 - 0,1, \quad \operatorname{Im} D(j\omega) = 10\omega^3 - 2,5\omega.$$

Построим кривую D – разбиений, меняя частоту от 0 до ∞ .

ω	0	0,1	0,5	$+\infty$,
$\operatorname{Re} D(j\omega)$	-0,1	0	3	$+\infty$,
$\operatorname{Im} D(j\omega)$	0	-0,217	0	$+\infty$.

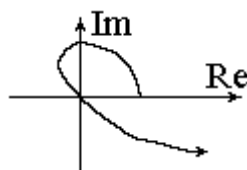
Кривая симметрична относительно оси Re . Она разбивает плоскость на три области. Для определения области устойчивости выберем по одному значению D из каждой области и проверим устойчивость любым критерием. Для области $-\infty < D < -0,1$ условие устойчивости не выполняется. Области будут чередоваться. Система устойчива в области 2. Итак, область устойчивости системы: $0,1 < K < 3$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какая система называется управляемой?
2. Какая система называется наблюдаемой?
3. Чем отличается устойчивость в малом от устойчивости в большом?
4. Что означают обозначения δ и ε в определении устойчивости по Ляпунову?
5. Что такое асимптотическая устойчивость?

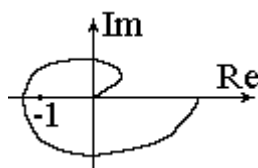
6. Какому условию должны соответствовать корни ХУ устойчивой системы?
7. Какому условию должны соответствовать корни ХУ для системы, находящейся на границе устойчивости?
8. Какие преимущества имеют аналитические, графоаналитические критерии устойчивости?
9. Что является необходимым условием устойчивости при использовании критерия Гурвица?
10. Как составить определители Гурвица?
11. В каком случае, согласно критерию Гурвица, система находится на границе устойчивости?
12. Что называется годографом характеристического уравнения?
13. Сформулируйте критерий устойчивости Михайлова.
14. Какому условию должны соответствовать корни ХУ согласно критерию Михайлова?
15. Разомкнутой или замкнутой должна быть система при использовании критерия устойчивости Гурвица, Михайлова, Найквиста?
16. Что называется критической точкой в критерии Михайлова, Найквиста?
17. Что называется функцией возвратной разности?
18. Как должен выглядеть годограф разомкнутой системы для устойчивости замкнутой системы, если разомкнутая система устойчива? Неустойчива? Находится на границе устойчивости?
19. Сформулируйте логарифмический критерий устойчивости Найквиста.
20. Какие данные, кроме графиков ЛАХ и ЛФХ, необходимы для применения логарифмического критерия Найквиста?
21. Как задать запас устойчивости по критерию Гурвица? Найквиста? Михайлова?

22. Что является аргументом в функции возвратной разности?
23. Что такое критический коэффициент разомкнутой системы?
24. Что такое D -области?
25. Как проверить устойчивость системы при наличии построенного D -разбиения?
26. В каких координатах строят границу D -разбиения?
27. Дана система, годограф Михайлова которой изображен на рисунке:



Система является:

- 1) устойчивой, 2) неустойчивой, 3) находится на границе устойчивости.
28. Дана система, годограф Найквиста которой изображен на рисунке:



Система является:

- 1) устойчивой, 2) неустойчивой, 3) находится на границе устойчивости.
29. Пользуясь критерием устойчивости Найквиста, определите устойчивость системы, приведенной в примере 4.1.
 30. Пользуясь критерием устойчивости Михайлова и Гурвица, определите устойчивость системы, приведенной на рис. 2.2 в п. 2.3, при условии: 1) $K > 0$, 2) $K < 0$.

Ответы к задачам

29. Указание: ответ приведен в примере 4.1.
30. 1) устойчива, 2) неустойчива.

5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА СИСТЕМ

Качество - это комплекс требований, которому должна удовлетворять система в переходном и установившемся режимах при обработке управляющего воздействия.

5.1. Способы задания качества

1. Задание требований к показателям качества.

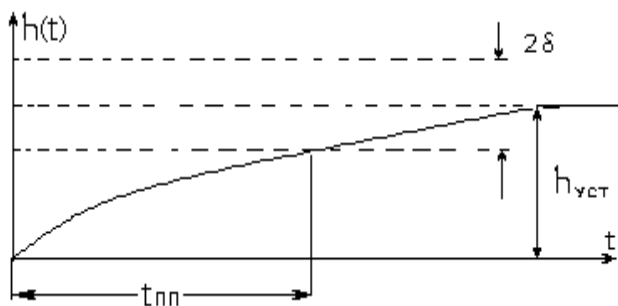


Рис. 5.1

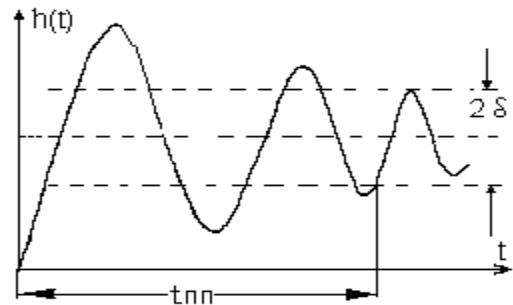


Рис. 5.2

Показатели качества (см. рис. 5.1 и 5.2):

а) время переходного процесса $t_{пп}$;

б) δ - перерегулирование
$$\delta = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} * 100\%$$

в) вид кривой переходного процесса: монотонный (рис. 5.1), немонотонный (рис. 5.2), количество колебаний;

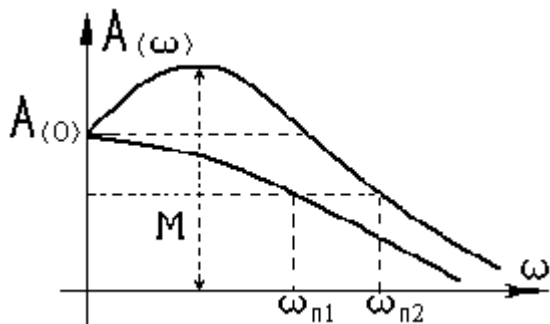
г) установившаяся ошибка или точность системы $\varepsilon(\infty)$.

Эти показатели зависят от свойств системы, от вида входного воздействия и от начальных условий. Обычно рассматриваются входное воздействие и нулевые начальные условия.

Недостатки этого способа задания: сложная зависимость параметров системы от показателей качества.

2. Задание кривой переходного процесса, к которой должен быть близок начальный процесс.

3. Чтобы какой-либо показатель качества принимал экстремальное значение. При этом задаются конкретные НУ и классы входных воздействий. Способ используют при проектировании оптимальных систем.



4. Требования к частотным показателям качества, которые характеризуют форму ЧХ замкнутой системы (рис. 5.3)

Рис. 5.3

Частотные показатели качества:

1. Полоса пропускания $\omega_{\text{п}}$ — диапазон частот, в котором

$$A(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.1)$$

Чем больше $\omega_{\text{п}}$, тем меньше $t_{\text{пп}}$.

2. Резонансная частота. Существует для немонотонных характеристик:

$$A(\omega_{\text{р}}) = \max A(\omega). \quad (5.2)$$

3. Показатель колебательности для немонотонных характеристик:

$$M = \max A(\omega) = A(\omega_{\text{р}}). \quad (5.3)$$

Чем больше M , тем больше перерегулирование.

4. Эффективная полоса пропускания:

$$\omega_0 = \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega. \quad (5.4)$$

Пример 5.1

Найдем частотные показатели качества системы радиоавтоматики, КЧХ которой в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

$$W_p(j\omega) = \frac{40}{j\omega} \cdot \frac{(1 + j\omega \cdot 0,25)}{(1 + j\omega \cdot 0,5) \cdot (1 + j\omega \cdot 0,025)^2},$$

используя асимптотическое представление логарифмической частотной характеристики:

$$|W_p(j\omega)| = \frac{40}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot 0,25^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot 0,5^2} \cdot (1 + \omega^2 \cdot 0,025^2)}.$$

При построении асимптотической ЛАХ пользуются следующим

правилом: В выражении $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$ для всех частот меньше ω_p

пренебрегают вторым слагаемым по сравнению с 1, а для всех $\omega > \omega_p$ - пренебрегают 1 по сравнению со вторым слагаемым.

Итак, найдем $L_p(\omega) = 20 \lg A_p(\omega) = 20 \lg |W_p(j\omega)|$.

$$|W_p(j\omega)| = \frac{40}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{2^2} \cdot \left(1 + \frac{\omega^2}{40^2}\right)}}.$$

Отсюда видим частоты сопряжения асимптот: $\omega_1=2$; $\omega_2=4$; $\omega_3=40$.

Асимптоты:

1) $\omega < 2$; $L \approx 20 \lg \frac{40}{\omega} = -20 \lg \frac{\omega}{40}$;

2) $2 < \omega < 4$; $L = -20 \lg \frac{\omega}{40} - 20 \lg \frac{\omega}{2} = -20 \lg \frac{\omega^2}{80}$;

3) $4 < \omega < 40$; $L = -20 \lg \frac{\omega}{40} - 20 \lg \frac{\omega}{2} + 20 \lg \frac{\omega}{4}$;

$$4) \omega > 40; L = -20 \lg \frac{\omega}{40} - 20 \lg \frac{\omega}{2} + 20 \lg \frac{\omega}{4} - 40 \lg \frac{\omega}{40}.$$

Само построение асимптотической ЛАХ показано в примере 3.8.

Определим частоту среза:

$$L = -20 \lg \frac{\omega^2}{40 \cdot 2} \cdot \frac{4}{\omega} = -20 \lg \frac{\omega_{\text{ср}}}{20} = 0; \omega_{\text{ср}} = 20 \text{ рад/с.}$$

Найдем запас по фазе на частоте среза по асимптотической ФЧХ:

$$\Psi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega}{4} - \arctg \frac{\omega}{2} - 2 \arctg \frac{\omega}{40};$$

$$\Psi(\omega_{\text{ср}}) = -\frac{\pi}{2} + \arctg 5 - \arctg 10 - 2 \arctg \frac{1}{2};$$

$$\Delta\Psi = \pi - \Psi(\omega_{\text{ср}}) = 0,89 \text{ рад.}$$

Найдем полосу пропускания $\omega_{\text{п}}$:

$$\omega_{\text{п}} = 2 \cdot \omega_{\text{ср}} \cdot \cos \Delta\Psi = 2 \cdot 20 \cdot \cos 0,89 = 12,5 \text{ рад/с.}$$

Найдем показатель колебательности:

$$M = \frac{1}{\sin \Delta\Psi} = \frac{1}{\sin 0,89} = 1,2.$$

5.2. Частотные методы анализа качества

На систему действует гармонический сигнал $U(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t$.

Выходную величину можно найти, зная передаточную функцию системы и используя преобразования Лапласа: $X(s) = W(s) U(s)$, $X(t) = L^{-1}[X(s)]$.

Можно также применить комплексную частотную характеристику $W(j\omega)$:

$$X(j\omega) = W(j\omega)U(j\omega), \quad (5.5)$$

где $X(j\omega)$ – изображение по Фурье выходной величины $X(t)$,

$U(j\omega)$ – изображение по Фурье входной величины $U(t)$:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)e^{-j\omega t} dt;$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (5.6)$$

Оригинал сигнала $X(j\omega)$ можно найти с помощью обратного преобразования Фурье:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega. \quad (5.7)$$

Выходная величина $X(t)$ в установившемся режиме тоже является гармоническим сигналом, как показано в п. 3.1.

Характеристику $W(j\omega)$ называют также комплексным коэффициентом передачи системы.

При воздействии единичной ступенчатой функции $U(t) = 1(t)$ выходная величина является переходной характеристикой: $x(t) = h(t)$.

Ее можно определить через вещественную $P(\omega)$ или мнимую $Q(\omega)$ частотные характеристики ($W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$):

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega; \quad (5.8)$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega + P(0), \quad (5.9)$$

где $P(0)$ соответствует установившемуся режиму.

Предпочтение обычно оказывают формуле (5.8).

При действии на систему произвольного входного сигнала $U(t)$ переходной процесс определяется по обобщенным вещественной $P_{об}(\omega)$ мнимой $Q_{об}(\omega)$ характеристикам:

$$P_{об}(\omega) = \operatorname{Re}(W(j\omega)U(j\omega)),$$

$$Q_{об}(\omega) = \operatorname{Im}(W(j\omega)U(j\omega)). \quad (5.10)$$

Основные свойства вещественных частотных характеристик и существующих им переходных процессов:

1. Свойство линейности:

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega) \rightarrow h_i(t) = \int_0^{\infty} \frac{P_i(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (5.11)$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t).$$

Если ВЧХ можно представить в виде суммы ВЧХ, то переходной процесс может быть представлен суммой составляющих.

2. Соответствие масштабов по оси ординат для $P(\omega)$ и $h(t)$:

$$aP(\omega) \rightarrow ah(\omega). \quad (5.12)$$

3. Соответствие масштабов по оси абсцисс:

$$h\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(a\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (5.13)$$

4. Начальное значение ВЧХ равно конечному значению переходного процесса, и наоборот:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0(\infty)} P(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty(0)} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty(0)} h(t). \quad (5.14)$$

5. Чтобы переходная характеристика имела перерегулирование $\sigma \leq 18\%$, ВЧХ должна быть положительной и невозрастающей

$$P(\omega) > 0, \quad \frac{dP(\omega)}{d\omega} \leq 0. \quad (5.15)$$

Это показано на рис. 5.4.

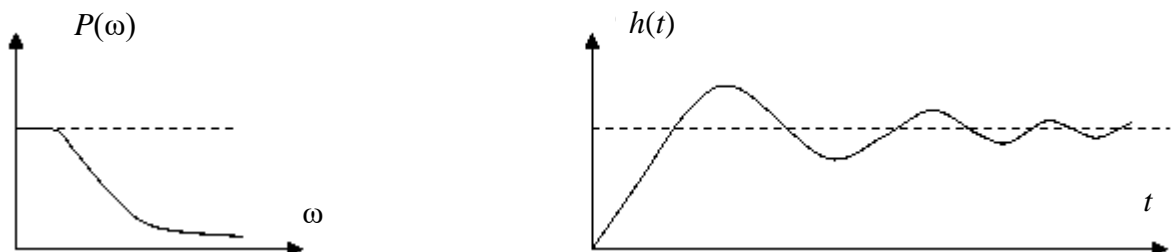


Рис. 5.4

6. Чтобы переходный процесс имел монотонный характер, достаточно, чтобы соответствующая ему ВЧХ была положительной непрерывной функцией частоты с отрицательной убывающей по абсолютному значению производной.

$$P(\omega) > 0, \quad \frac{dP(\omega)}{d\omega} < 0. \quad (5.16)$$

Это показано на рис. 5.5

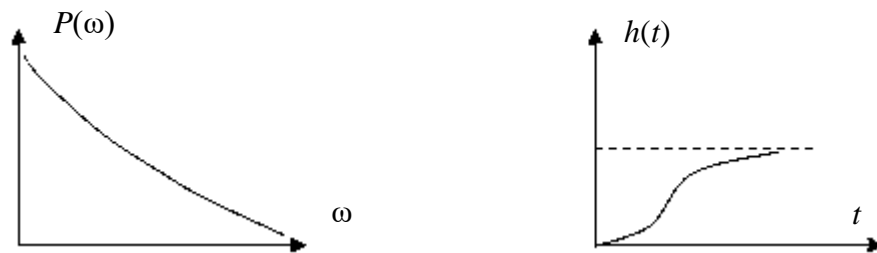


Рис. 5.5

7. Определение наибольшего значения перерегулирования σ_{\max} переходного процесса по максимуму ВЧХ $P_{\max}(\omega)$ можно производить по следующей формуле, в соответствии с рис. 5.3.

$$\sigma_{\max} = \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)}, \quad (5.17)$$

где $P(0)$ – начальное значение $P(\omega)$.

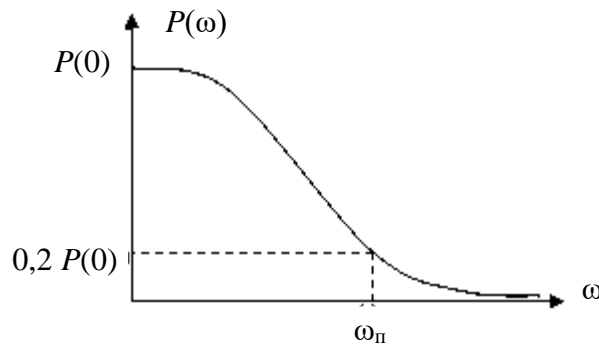


Рис. 5.6

8. Время переходного процесса $t_{\text{пн}}$ можно оценить приблизительно по виду ВЧХ без построения графика $h(t)$. Оно определяется полосой частот $\omega_{\text{п}}$, при которых $P(\omega) > 0,2 P(0)$, как показано на рис. 5.6, $\omega_{\text{п}}$ называется интервалом положительности $P(\omega)$.

9. Если ВЧХ близка к трапециидальной, т. е. может быть аппроксимирована трапецией с диапазоном частот ω_2 и коэффициентом наклона $\chi = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (см. рис. 5.7), то время переходного процесса заключено в пределах:

$$-\frac{\pi}{\omega_2} < t_{\text{пн}} < \frac{4\pi}{\omega_2}. \quad (5.18)$$

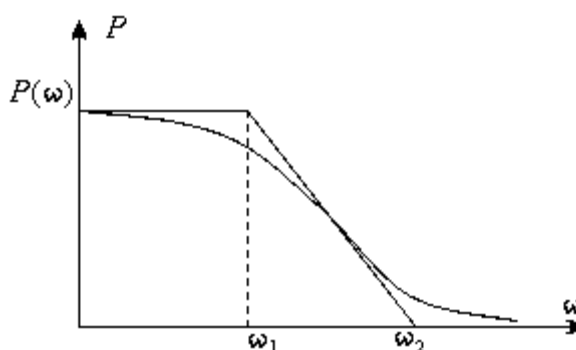


Рис. 5.7

Последним свойством пользуются в методе, описанном в следующем параграфе.

5.3. Метод трапеций

В инженерной практике широко применяют метод разложения частотной характеристики и соответствующего ей переходного процесса на сумму трапеций. Метод сводится к аппроксимации графика $P(\omega)$ трапециями и далее к интегрированию полученных трапециидальных зависимостей.

Рассмотрим две стороны единичной трапеции B (см. рис. 5.8)

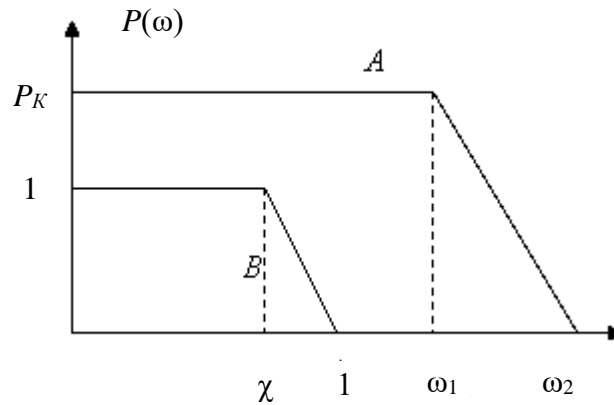


Рис. 5.8

Две стороны трапеции B совпадают с координатными осями, и имеют на них единичную длину (в соответствующих осях единицах измерения).

Третья сторона параллельна оси ω , четвертая имеет наклон $\chi = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Тогда ВЧХ, описываемые трапецией B , выразятся:

$$P_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < \omega < \chi, \\ 1 - (\omega - \chi)/(1 - \chi) = (1 - \omega)/(1 - \chi), & \text{при } \chi < \omega < 1, \\ 0, & \text{при } \omega < 0, \omega > 1. \end{cases} \quad (5.19)$$

Если принять такую единичную трапецию за некую ВЧХ, то соответствующая ей переходная характеристика $h(t)$ определяется:

$$\begin{aligned} h_1(\tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\chi \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\omega + \int_\chi^1 (1 - \omega) / (1 - \chi) \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - \chi) [\text{sinc}(\tau) - \chi \text{sinc}(\chi\tau) + (\cos \tau - \cos \chi\tau) / \tau], \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\text{sinc}(\tau)$ - интегральный синус:

$$\text{sinc}(\tau) = \int_0^1 \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\omega. \quad (5.21)$$

Таким образом, видим, что основные вычисления здесь – вычисления функции sinc.

Для трапеции A высотой P_k , основанием ω_2 и точкой излома, $\omega_1 = \chi \omega_2$, по свойствам изменения масштабов:

$$h_k(t) = P_k h_1(t), \quad (5.22)$$

где $t = \tau / \omega_2$.

Чтобы получить переходный процесс, поступают следующим образом:

1. Строят график $P(\omega)$ и аппроксимируют его несколькими трапециями.

Для этого характеристику $P(\omega)$ приблизительно разбивают на прямолинейные отрезки, причем в окрестности экстремумов функции отрезка располагают параллельно оси ω . Далее из точек изломов проводят линии так, чтобы характеристика оказалась разбита на несколько трапеций, частично положенных одна на другую, как показано на рис. 5.9.

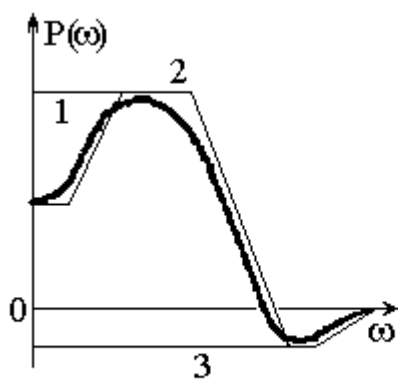


Рис. 5.9

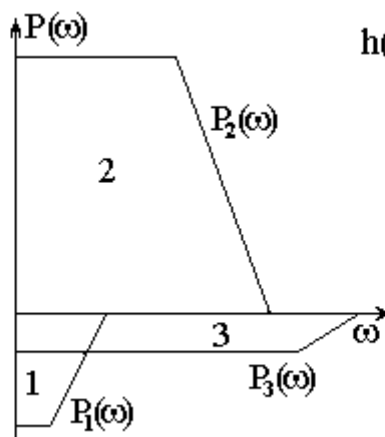


Рис. 5.10

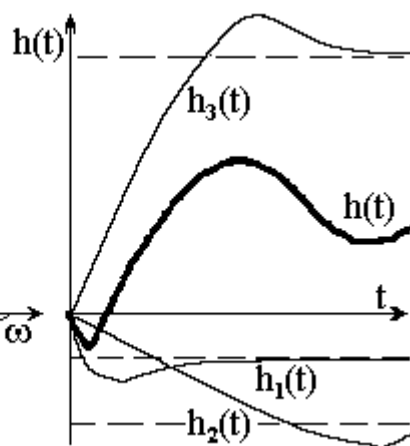


Рис. 5.11

2. Затем эти трапеции вычерчивают на другом чертеже, таким образом, чтобы основание каждой из них легло на ось ω , см. рис. 5.10.

3. Для каждой трапеции определяют ее основные параметры:

$P(0), \omega_a, \omega_b, \chi = \frac{\omega_a}{\omega_b}$, где ω изменяется от 0 до 1.

4. По таблицам Солодовникова для каждой трапеции находят ординату переходного процесса h_χ , которая является функцией табличного времени $h_\chi(t_\chi)$. Эти h_χ соответствуют единичным трапециям, т. е. при $P(0)=1$ и $\omega_b=1$.

5. Для каждой трапеции переходят к действительным значениям переходных процессов, т. е. $P(0) \neq 1$, и к действительному времени, $\omega_b \neq 1$, по правилам изменения масштабов, т. е. для каждой i -й трапеции функция $h_i(t) = h_{\chi_i}(t)P_i(0)$, где $t = t_\chi / \omega_b$, причем $h_i(t)$ соответствует реальным трапециям.

6. Просуммировав ординаты переходных процессов $h_i(t)$ для каждой трапеции, получают график переходного процесса системы (рис. 5.11).

7. После построения полезно провести проверку. Например, сумма $P_i(0)$ должна равняться $P(0)$ для всей системы.

5.4. Корневые методы оценки качества

Методы основаны на связи между показателями качества и корнями передаточной функции замкнутой САУ. Возникает вопрос, каким образом связано расположение корней системы с ее качеством. Разберем это на примерах.

1. На рис. 5.12, а изображены переходные процессы для двух САУ первого порядка, на рис. 5.12, б – корни этих систем на комплексной плоскости.

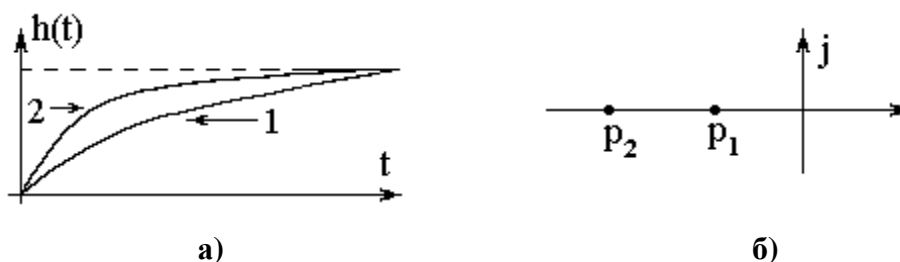


Рис. 5.12

Время переходного процесса первой системы больше, чем у второй. Корень, соответствующий первой системе, расположен на оси Re ближе к оси Im , чем соответствующий второй системе. Следовательно, для увеличения быстродействия системы переходного процесса необходимо удалять корни от мнимой оси.

2. На рис. 5.13, *a* изображены переходные процессы для двух САУ второго порядка, на рис. 5.13, *б* – корни этих систем на комплексной плоскости. Корни комплексные.

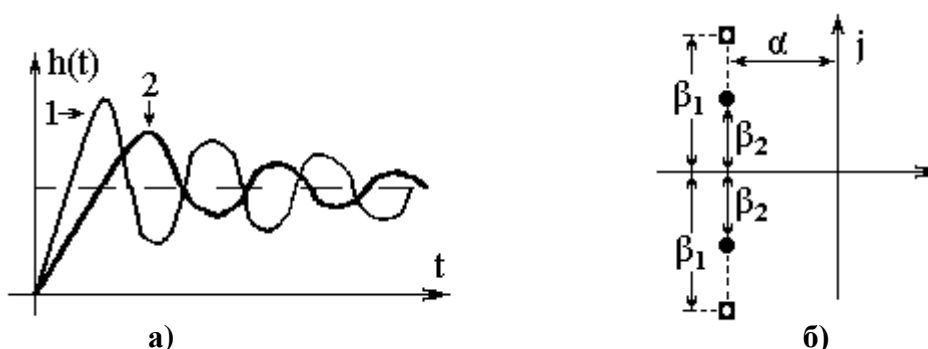


Рис. 5.13

В рис. 5.13:

- – САУ 1 Корни: $p_{11}, p_{12} = \alpha \pm \beta_1$;
- – САУ 2 Корни: $p_{21}, p_{22} = \alpha \pm \beta_2$.

Переходной процесс систем определится:

$$x_{п}(t) = A \exp(\alpha t) \sin(\beta t + \varphi).$$

Из рис. 5.13 видно, что перерегулирование систем $\sigma_1 > \sigma_2$. Следовательно, система 1 лучше системы 2. Итак, для уменьшения перерегулирования σ необходимо корни характеристического уравнения расположить ближе к оси Re , при этом β уменьшается.

Характер переходного процесса в системе определяют по ее реакции на $1(t)$. Переходная характеристика системы $h(t)$ может быть найдена с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{S} W(s) \right] = L^{-1} \left[\frac{B(s)}{sA(s)} \right]. \quad (5.23)$$

Если $A(s)$ не имеет кратных корней, то $h(t)$ записывают:

$$h(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{S_i A(s_i)} e^{s_i t}, \quad (5.24)$$

где s_i - корни характеристического уравнения системы: $A(s)=0$.

Из уравнения (5.24) видим, что на характер переходного процесса влияет и числитель, и знаменатель передаточной функции $W(s)$.

Если числитель ПФ $B(s)$ не имеет нулей, т. е. представляет собой постоянную величину, то характер переходных процессов можно определить по полюсам, т. е. по корням ХУ. Для приблизительной оценки качества переходного процесса необходимо на плоскости корней s_i выделить область, в которой располагаются корни. Чаще всего эту область представляют в виде трапеции.

На рис. 5.14 корни характеристического располагаются внутри трапеции ABCD, на ее основании и сторонах. Вне трапеции корней нет.

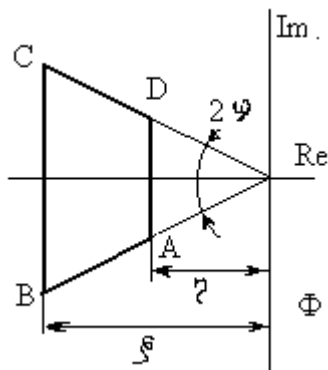


Рис. 5.14

Для выделения этой области вычисляют параметры:

η - степень устойчивости,

μ - колебательность,

ξ - значение вещественной части максимально удаленного от оси Re корня.

Степень устойчивости η : расстояние от оси Im до ближайшего к ней корня или пары комплексно-сопряженных корней.

Пусть общее решение дифференциального уравнения

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t},$$

где s_i - корни характеристического уравнения $A(s)=0$. Составляющая этого решения, определяемая степенью устойчивости, запишется:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для вещественных корней: } x_{\eta}(t) = C_{\eta} e^{-\eta t}, \\ \text{для комплексно-сопряженных корней: } x_{\eta}(t) = C_{\eta} e^{-\eta t} \sin \beta t. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Обычно переходный процесс считается законченным, когда затухает составляющая, определяемая степенью устойчивости, т. е. порядок $t_{\text{шт}}$ можно оценить по наиболее медленно затухающей составляющей $X_{\eta}(t)$. Если ближайший к оси Im корень вещественный, то из (5.25) получаем:

$$t_{\text{шт}} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta}, \quad (5.26)$$

где $\pm \delta$ - размер трубки точности (обычно 5% от $X(t \rightarrow \infty)$).

Если ближайшей является пара сопряженных корней, имеем:

$$t_{\text{шт}} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta}. \quad (5.27)$$

Колебательность системы μ - тангенс угла, образованного отрицательной частью оси Re и лучом из начала координат к корню, у которого отношение мнимой части β и действительной α максимально (см. рис. 5.14)

$$\mu = \text{tg} \varphi = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)_{\text{max}}. \quad (5.28)$$

Колебательность является оценкой переходного процесса сверху. При увеличении μ возрастает число колебаний за время переходного процесса и возрастает перерегулирование.

Для определенных классов распределения корней можно построить две кривые: *мажоранту* и *миноранту*, которые ограничивают кривую переходного процесса сверху и снизу.

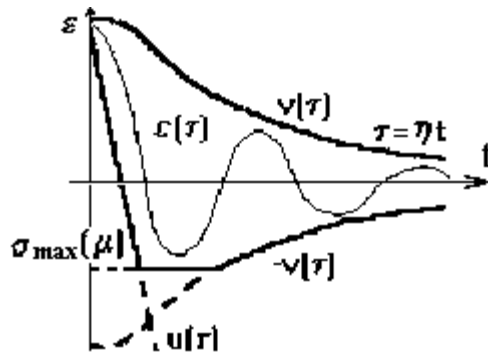


Рис. 5.15

Переходной процесс находится в пределах:

$$v_1(t) \leq x(t) \leq v_2(t), \quad (5.29)$$

где $v_1(t)$ - миноранта, $v_2(t)$ - мажоранта (рис. 5.15). Они описываются уравнениями:

$$v_2(t) = e^{-\eta t} \left(1 + \eta t + \dots + \frac{\eta^{n-1} \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} \right); \quad (5.30)$$

$$v_1(t) = e^{-\eta t}.$$

Перерегулирование для этого класса корней отсутствует.

Для системы, имеющей комплексно-сопряженные корни, мажоранта и миноранта описываются: $v_2(t)$ как в (5.30), $v_1(t) = -v_2(t)$. При этом перерегулирование определяется:

$$\sigma \leq e^{-\pi/\mu}. \quad (5.31)$$

Используя мажоранту и миноранту, можно оценить $t_{\text{ин}}$:

$$t_{v_1} \leq t_{\text{ин}} \leq t_{v_2}, \quad (5.32)$$

где t_{v_1} - время переходного процесса по миноранте,

t_{v_2} - время переходного процесса по мажоранте.

5.5. Точность систем. Астатические системы

Понятие точности связано с понятием установившейся ошибки. Ошибка - разность между входным и выходным сигналами системы:

$$\varepsilon(t) = X(t) - U(t). \quad (5.33)$$

Установившаяся ошибка:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon(\infty). \quad (5.34)$$

Статическая точность оценивается по величине статической ошибки при постоянном входном воздействии. $U(t) = \text{const}$.

Если $U(t) = 1(t)$, а помеха $f = 0$, то система называется статической по задающему воздействию $U(t)$, если $\varepsilon(\infty) \neq 0$, называется астатической по задающему воздействию, если $\varepsilon(\infty) = 0$. Аналогично – по помехе.

Зависимость выходного сигнала от входного и от помехи для астатической и статической системы показана на рис. 5.16.

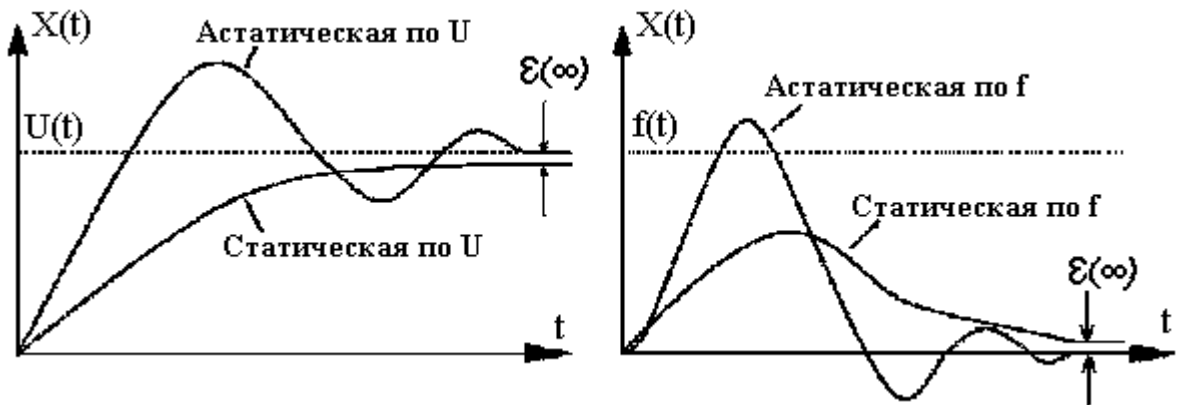


Рис. 5.16

5.6. Особенности передаточных функций астатических систем

Из свойств преобразований Лапласа следует, что установившаяся ошибка определяется :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW\varepsilon(s)U(s), \quad (5.35)$$

где $W_{\varepsilon u}(s)$ - передаточная функция ошибки от входного воздействия,

$U(s) = L[U(t)]$ - изображение входного сигнала.

Если $U(t) = 1(t)$, то $U(s) = 1/s$. Тогда условие астатизма запишется: $\varepsilon(\infty) = W_{\varepsilon u}(0) = 0$. Это выполняется, если ПФ ошибки от входного сигнала следующая:

$$W_{\varepsilon u}(s) = s^{\nu} W_{\varepsilon u_0}(s), \quad (5.36)$$

где $\lim_{s \rightarrow 0} W_{\varepsilon u_0}(s) \neq 0$, ν - порядок астатизма.

Система является астатической по входному воздействию, если $W_{\varepsilon u}(s)$ имеет ноль какого-либо порядка при $s = 0$, т.е. если она имеет дифференцирующие звенья.

Требования к разомкнутой системе.

$W_{\varepsilon u}(s) = 1/1+W_p(s)$. Если $W_p(s) = A(s)/B(s)$, то $W_{\varepsilon u}(s) = B(s)/A(s)+B(s)$, то есть для выполнения условия астатизма $W_p(s)$ должна иметь вид:

$$W_p(s) = \frac{W_{p0}(s)}{s^{\nu}}, \quad (5.37)$$

где $\lim_{s \rightarrow 0} W_{p0}(s) \neq 0$.

Система является астатической по управляющему воздействию, если передаточная функция разомкнутой системы имеет полюс какого-либо порядка при $s = 0$.

Передаточная функция замкнутой системы при единичной ОС связана с передаточной функцией ошибки от входного воздействия так:

$$W_{\varepsilon u}(s) = 1 - W_3(s). \quad (5.38)$$

Так как при $s = 0$ $W_{\varepsilon u} = 0$ (условие астатизма), то $W_3(s) = 1$.

Так как $W_3(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n}$, то условие астатизма запишется:

если $\nu = 1$, то

$$b_m = a_n;$$

если $\nu = 2$, то

$$b_m = a_n, b_{m-1} = a_{n-1}; \quad (5.39)$$

и т.д.

Следовательно, коэффициент передачи замкнутой САУ, астатической по входному сигналу, должен быть равен единицы.

Коэффициент передачи статической системы

$$W_3(s=0) = b_m / a_n.$$

Условие астатизма по помехе – аналогично:

$$W_{ef}(s=0) = 0. \quad (5.40)$$

Для уменьшения ошибки $\varepsilon(\infty)$ можно сделать астатическую систему или увеличить K_p (но при этом уменьшается запас устойчивости).

5.7. Динамическая точность

Оценивается по динамической ошибке, которая представляет собой погрешность системы в установившемся режиме при обработке произвольного входного воздействия. В качестве входного воздействия рассматривается медленно меняющееся по сравнению с быстродействием системы, поэтому переходные процессы не учитываются. Динамическую ошибку можно определить, используя теорему о конечных значениях:

$$W_{\varepsilon u}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{U(s)}, \quad (5.41)$$

где $\varepsilon(s)$ может быть:

$$\varepsilon_U(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} W_{\varepsilon u}(s)U(s)s \text{ - ошибка от входного сигнала;}$$

$$\varepsilon_f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} W_{\varepsilon f}(s)f(s)s \text{ - ошибка от помехи.}$$

5.8. Метод коэффициентов ошибок и связь его с порядком астатизма

Пусть $U(t)$ - медленно меняющееся входное воздействие. Выразим динамическую ошибку: $\varepsilon(s) = W_{\varepsilon u}(s)U(s)$.

Разложим $W_{\varepsilon u}(s)$ в ряд Макларена и получим:

$$\varepsilon(s) = [C_0 + C_1s + C_2s^2/2! + C_3s^3/3! + \dots] \cdot U(s). \quad (5.42)$$

При малых значениях s ряд Макларена является сходящимся. $s \rightarrow 0$ соответствует $t \rightarrow \infty$, а это соответствует установившемуся режиму. Нам это и надо. Перейдем от изображения к оригиналу:

$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = C_0U(t) + C_1U'(t) + C_2U''(t)/2! + C_3U'''(t)/3! + \dots \quad (5.43)$$

Это выражение представляет собой динамическую ошибку, а коэффициенты C называются коэффициентами ошибок. Они определяются так:

$$C_0 = W_{\varepsilon u}(s), \quad C_1 = dW_{\varepsilon u}(s)/ds, \quad C_2 = d^2W_{\varepsilon u}(s)/ds^2 \text{ и т.д., при } s \rightarrow 0. \quad (5.44)$$

Отсюда подход к понятию порядка астатизма. Разберем его на примере. Известно, что для астатических систем выполняется условие $W_{\varepsilon u}(s) = s^v W_{\varepsilon u_0}(s)$. Рассмотрим реакцию систем с разным порядком астатизма на разные входные воздействия.

Пример 5.2

1. Имеем систему с порядком астатизма 0, т.е. система статическая (нет интегрирующих звеньев), $v = 0$. $C_0 \neq 0$ (это следует из уравнения для C_0 , (5.44)).

Подаем на вход сигналы:

а) пусть $U(t) = U_0 = \text{const}$ (постоянное напряжение). Тогда:

$$\varepsilon(\infty) = C_0U_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \dots = C_0U_0 = \text{const},$$

где $C_0 = 1/(1+K_p)$ – статическая ошибка системы.

б) $U(t) = U_0 + U_1(t)$ (линейно нарастающее):

$$\varepsilon(\infty) = C_0 (U_0 + U_1(t)) + C_1 U_1 + C_2 0 + \dots = \infty.$$

Ошибка будет также нарастать со временем.

Статическая система обрабатывает постоянное воздействие с постоянной ошибкой, а линейное нарастание входного воздействия обработать не может.

2. Астатическая система с $v = 1$:

$$W_{\varepsilon u}(s) = s W_{\varepsilon u_0}(s). \text{ Тогда: } C_0 = W_{\varepsilon u}(s=0) = 0 \quad ; \quad C_1 \neq 0.$$

Подаем сигналы на вход:

а) $U(t) = U_0 = \text{const}$, $\varepsilon(\infty) = 0$. Статической ошибки нет.

б) $U(t) = U_0 + U_1 t$, $\varepsilon(\infty) = C_1 U_1 \neq 0$. C_1 - скоростная ошибка, $C_1 = 1/K_p$.

в) $U(t) = U_0 + U_1 t + U_2 t^2$, $\varepsilon(\infty) = C_1 (U_1 + 2U_2 t) + 2C_2 U_2$ при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon(\infty) \rightarrow \infty$.

Система обрабатывает без ошибки постоянное входное воздействие, с постоянной ошибкой обрабатывает линейно- нарастающий сигнал и не может обработать квадратичное воздействие.

C_1 - коэффициент ошибки по скорости, C_2 - коэффициент ошибки по ускорению.

3. Астатическая система с $v = 2$:

$$W_{\varepsilon u}(s) = s^2 W_{\varepsilon u_0}(s) \quad ; \quad C_0 = 0 \quad ; \quad C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 \neq 0$$

Подаем сигналы на вход:

а) $U(t) = U_0$ или , $U(t) = U_0 + U_1 t$, $\varepsilon(\infty) = 0$;

б) $U(t) = U_0 + U_1 t + U_2 t^2$, $\varepsilon(\infty) = C_2 U_2 = \text{const}$;

в) $U(t) = U_0 + U_1 t + U_2 t^2 + U_3 t^3$, $\varepsilon(\infty) \rightarrow \infty$.

Общее правило:

При порядке астатизма $v = n$ система обрабатывает без ошибки сигналы порядка $n-1$, с постоянной ошибкой - сигналы порядка n и не может

отработать сигнал высшего порядка. Если $\nu = \infty$, то система *инвариантная* и обрабатывает любое воздействие (является математической абстракцией).

Рассмотрим входной гармонический сигнал: $U(t) = U_{\max} \sin \omega_1 t$ и определим ошибку $\varepsilon(\infty)$. Порядок сигнала бесконечен.

Динамическую ошибку удобно определять по частотной характеристике, причем о точности системы судят по амплитуде ошибки.

$$\varepsilon_{(\infty)} = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (5.45)$$

$$\varepsilon_{\max} = |W_{\varepsilon u}(j\omega_1)| U_{\max} = \frac{U_{\max}}{1 + |W_p(j\omega_1)|} \approx \frac{U_{\max}}{|W_p(j\omega_1)|}. \quad (5.46)$$

Единицу обычно отбрасывают, так как $\varepsilon_{\max} \ll U_{\max}$. Всё изложенное справедливо и по отношению к помехе.

5.9. Понятие интегральных оценок качества

Интегральная оценка – определенный интеграл по времени от некоторой функции переходной составляющей процесса:

$$J = \int_0^{\infty} f(X_{\text{п}}(t)) dt. \quad (5.47)$$

Решение уравнения представляем в виде:

$$X(t) = X_{\text{вын}}(t) + X_{\text{п}}(t), \quad (5.48)$$

где $X_{\text{вын}}(t)$ – вынужденная составляющая, $X_{\text{п}}(t)$ – переходный процесс.

Пусть $U(t) = \text{const}$, тогда

$$\varepsilon(t) = U(t) - X(t), \quad \varepsilon(t) = -X_{\text{п}}(t), \quad (5.49)$$

где $X_{\text{п}}(t)$ с точностью до знака совпадает с переходной составляющей ошибки.

Принимают $X_{\text{вын}}(t) = X(\infty)$, тогда

$$X_{\text{п}}(t) = X(\infty) - X(t). \quad (5.50)$$

Интегральные критерии не позволяют определить отдельные характеристики качества, а оценивают качество в целом. С их помощью можно определить быстроту затухания и отклонение выходной координаты одновременно. При их использовании стремятся к минимизации J , потому что реальная система тем ближе к желаемой, чем выходная координата точнее воспроизводит ступенчатое управляющее воздействие.

На рис. 5.17 приведены два переходных процесса. $S1 > S2$, следовательно, система 1 хуже системы 2. Чем меньше площадь S , тем выше качество переходного процесса.

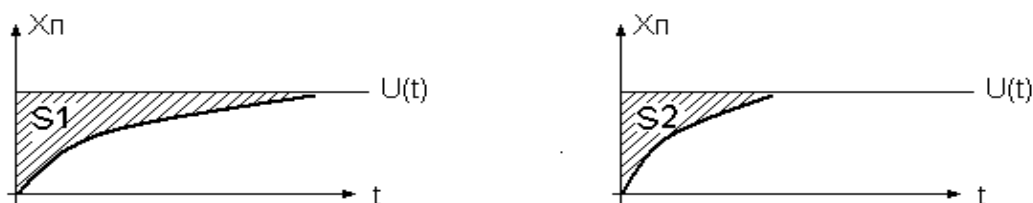


Рис. 5.17

5.10. Виды интегральных оценок

1. Линейная интегральная оценка:

$$J_1 = \int_0^{\infty} X_{\text{п}}(t) dt = \int_0^{\infty} (X(\infty) - X(t)) dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt. \quad (5.51)$$

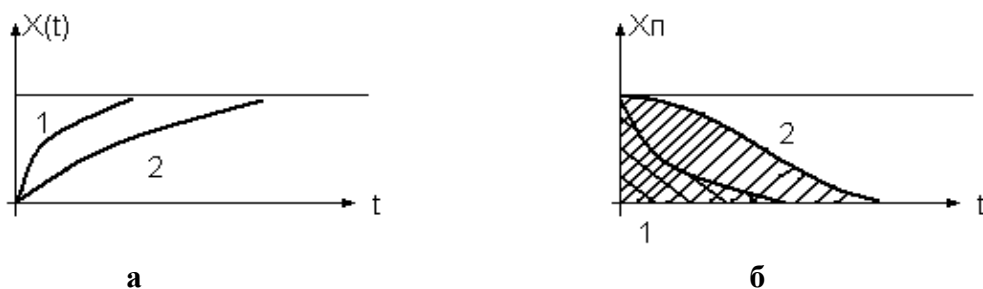


Рис. 5.18

На рис. 5.18, а даны выходные сигналы 1 и 2, на рис. 5.18, б показаны переходные процессы для этих сигналов. Из рисунка видно: $S_1 = J_1(1) < S_2 = J_1(2)$. Следовательно, процесс 1 лучше процесса 2.

Достижение лучшего качества связано с минимизацией J_1 .

Аналитическое определение:

$$J_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s). \quad (5.52)$$

Пусть $U(t) = a$, $U(s) = a/s$; Тогда

$$\varepsilon(s) = X_{\infty}(s) - X(s) = W_3(0) \frac{a}{s} - W_3(s) \frac{a}{s} = \frac{a(W_3(0) - W_3(s))}{s}, \quad (5.53)$$

$$J_1 = \frac{a(W_3(0) - W_3(s))}{s} \quad \text{при } s = 0, \quad (5.54)$$

где J_1 может использоваться только для монотонных процессов, объяснение этому видно на рис. 5.19. Здесь изображён бесконечный переходный процесс (очень плохо), который, тем не менее, дает $J_1 = 0$.

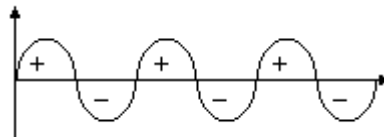


Рис. 5.19.

2. Интегральная оценка по модулю:

$$J_2 = \int_0^{\infty} |X_{\Pi}(t)| dt = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt. \quad (5.55)$$

Положительные и отрицательные участки переходного процесса при сложении дают положительное приращение J_2 . Недостаток: модуль ошибки трудно вычислять, поэтому критерий используется редко.

3. Квадратичная интегральная оценка:

$$J_1 = \int_0^{\infty} X_{\Pi}^2(t) dt = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt. \quad (5.56)$$

Для вычисления ε^2 существуют программы. Применяют также формулу Красовского-Филипса:

Передачная функция замкнутой системы :

$$W_3(s) = b_0 + b_1s^1 + b_2s^2 + \dots + b_ms^m / a_0 + a_1s^1 + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \quad . \quad \text{Условие: } n > m,$$

$U(t)=1(t)$, нулевые начальные условия.

Тогда:

$$J_3 = \int_0^{\infty} (X(\infty) - X(t))^2 dt = [B_0\Delta_0 + B_1\Delta_1 + \dots + B_m\Delta_m - 2b_0b_1\Delta] / 2a_0^2 \Delta, \quad (5.57)$$

где $B_0 = b_0^2$; $B_1 = b_1^2 - 2b_0b_2$; $B_2 = b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4$; $B_k = b_k^2 - 2b_{k-1}b_{k+1} + 2b_{k-2}b_{k+2} - \dots$; $B_m = b_m^2$.

Определение Δ :

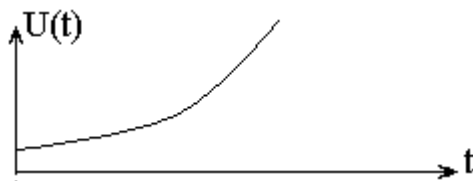
1. По главной диагонали записываются коэффициенты от a_0 до a_{n-1}
2. Вверх от главной диагонали в столбцы записываются коэффициенты с возрастающими индексами, вниз с убывающими. При отсутствии коэффициента (индекс меньше 0) записывается 0.
3. Знаки коэффициентов по главной диагонали +, вверх и вниз чередуются.
4. Определители Δ_1, Δ_2 и т.д. получаются из Δ заменой столбца $(k+1)$ на столбец: $[a_1 \ a_0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

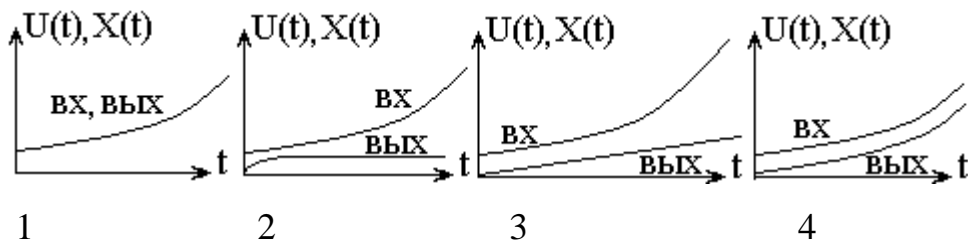
1. Назовите частотные показатели качества. Увеличение каких из них улучшает, а каких ухудшает качество?
2. Как найти вещественную и мнимую частотные характеристики системы?
3. Как найти переходную характеристику, используя вещественную частотную характеристику? Мнимую частотную характеристику?
4. Чем вещественная частотная характеристика отличается от обобщенной вещественной частотной характеристики?

5. Какому значению ПХ соответствует начальное значение ВЧХ?
6. Какому значению перерегулирования соответствует невозрастающая положительная ВЧХ? Убывающая ВЧХ?
7. Как определить наибольшее значение перерегулирования по ВЧХ?
8. Что называется интервалом положительности?
9. Какой параметр единичной трапеции не является постоянным?
10. Какая переходная характеристика соответствует единичной трапеции?
11. Какие параметры необходимо найти при построении переходных процессов методом трапеций?
12. Как определить степень устойчивости на плоскости корней?
13. Как определить колебательность системы на плоскости корней?
14. Что называется мажорантой и минорантой?
15. Какой величиной определяется точность системы? В каких пределах лежит эта величина?
16. Как определяется статическая точность?
17. Что такое астатическая система по входному воздействию? По ошибке?
18. Изобразите график выходного сигнала и ошибки для статической и астатической системы: а) по входному сигналу, б) по ошибке.
19. Какому требованию должна соответствовать передаточная функция астатической системы по ошибке? Разомкнутой системы? Замкнутой системы?
20. Чему равен коэффициент передачи астатической замкнутой системы?
21. Чему равен коэффициент передачи статической замкнутой системы?
22. Какой сигнал используется для определения динамической точности?

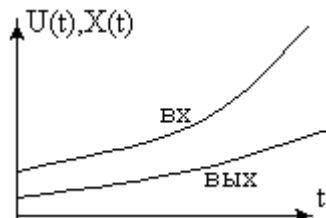
23. Как определить динамическую ошибку при подаче на вход системы гармонического сигнала?
24. Что такое интегральная оценка качества?
25. В каком случае линейная интегральная оценка качества непригодна?
26. Как составить матрицу Красовского-Филипса?
27. На вход системы с порядком астатизма $\nu = 2$ подается сигнал $U(t) = At^2$, изображенный на графике.



На каком графике изображен правильный выходной сигнал?



28. На вход системы подается сигнал $U(t) = At^2$. Входной и выходной сигналы системы изображены на графике:



Определить порядок астатизма системы.

6. ОСНОВЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ

6.1. Синтез САУ: постановка задачи

Синтез системы автоматического управления – проектирование устройства управления при заданном объекте управления и тактико-технических требованиях. Обычно расчёт системы управления сводится к выбору структурной схемы и расчёту её параметров. Можно выделить группу функционально необходимых элементов: неизменная часть системы.

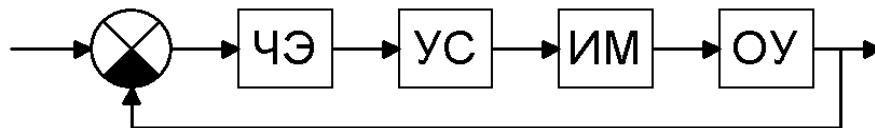


Рис. 6.1

На рис. 6.1 показана неизменная часть системы: ЧЭ, УС, ИМ, ОУ. Считается, что она определена.

Неизменной величиной в неизменной части является коэффициент разомкнутой системы K_p . Он выбирается из заданной точности и реализуется усилителем (УС).

Обычно система с рассчитанным K_p оказывается неустойчивой или с малым запасом устойчивости. В этом случае систему корректируют, т.е. изменяют её динамические свойства для обеспечения требуемого качества. В систему вводят *корректирующие устройства* (КУ).

Итак, задача синтеза сводится к расчёту КУ. По способу включения в САУ КУ бывают трёх видов: последовательные, согласно-параллельные, встречно-параллельные. На рис. 6.2 показано: К1 - последовательное КУ, К2 - встречно-параллельное КУ, К3 - согласно-параллельное КУ. Этот вариант представляет собой местную обратную связь, причём обычно отрицательную.

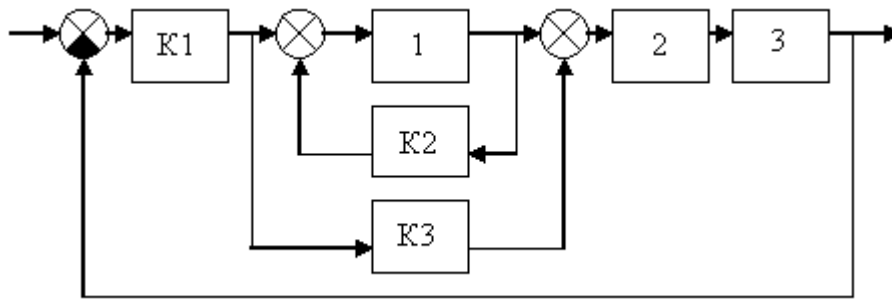


Рис. 6.2

На рис. 6.2 показаны 1, 2, 3 – неизменные части системы. Их передаточные функции обозначены: W_1, W_2, W_3 соответственно.

Имея передаточную функцию любого из указанных КУ, можно пересчитать её в функцию для КУ другого типа, выполняющего те же действия. Формулы пересчета приведены далее. Обычно сначала вычисляется передаточная функция последовательного КУ, что связано с тем, что передаточная функция устройства до коррекции $W_0(s)$ связана с передаточными функциями последовательного КУ $W_{K1}(s)$ и функцией устройства после коррекции $W(s)$ следующим соотношением:

$$W(s) = W_0(s)W_{K1}(s). \quad (6.1)$$

6.2. Методы синтеза корректирующих устройств

1. Частотные. Основаны на использовании частотных характеристик разомкнутой или замкнутой системы. Являются графоаналитическими, т.е. приближительными. Основной метод – метод желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики (метод ЖЛАХ).

2. Аналитические. Более точные. Интегральных оценок, корневого годографа, стандартных форм, желаемой передаточной функции и др.

6.3. Метод желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики

Метод основан на построении желаемой ЛАХ разомкнутой системы, т.е. такой ЛАХ, при которой обеспечиваются заданные показатели качества. В методе устанавливается связь между показателями качества и ЛАХ.

Ограничения метода:

1. Применим к системам с единичной главной ОС. Если $W_{oc} \neq 1$, то приводят к единичной.
2. Применим к системам минимально-фазового типа, чтобы использовать только асимптотическую АЧХ и не рассматривать ФЧХ.

Последовательность синтеза

1. Составляется структурная схема неизменной части системы, строится ЛАХ разомкнутой системы $L_0(\omega)$, это будет ЛАХ нескорректированной разомкнутой системы.
2. По заданным показателям качества, с учетом простоты реализации, строится ЖЛАХ $L_{ж}(\omega)$.
3. Определяется ЛАХ последовательного КУ: $L_{ку}(\omega) = L_{ж}(\omega) - L_0(\omega)$. При необходимости последовательное КУ пересчитывается в параллельное.
4. Составляется структурная схема и рассчитываются параметры КУ (для этого используются таблицы).
5. Учитывается приближительность метода, производится проверка путем построения переходного процесса, по которому определяют показатели качества и сверяют с заданными.

Достоинства: простота, наглядность.

Недостатки: приближительность, невозможность заранее предусмотреть тип и место включения КУ, не учитывается условие физической реальности.

Этапы построения ЖЛАХ

Получение техзадания

ТЗ включает следующие показатели качества:

1. Время переходного процесса $t_{\text{пт}}$, перерегулирование σ % для входного воздействия $g(t) = 1(t)$.
2. Порядок астатизма ν .
3. Статическая ошибка $\varepsilon(\infty)$.
4. Ошибка воспроизведения заданного входного сигнала в установившемся режиме $\varepsilon_{\text{max}}(\infty)$.
5. Коэффициенты ошибки $C_0, C_1, C_2 \dots$.
6. Максимальное допустимое ускорение входного воздействия $g''_{\text{max}}(t)$.
7. Запасы устойчивости системы по амплитуде и по фазе m, γ .

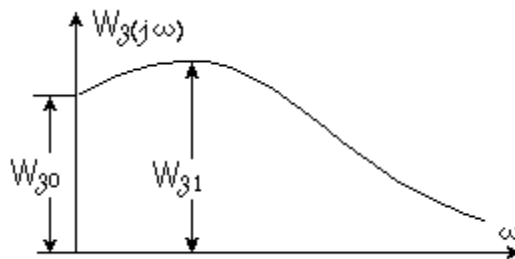


Рис. 6.3

8. Колебательность системы:

$M = |W_{31}(j\omega)|/|W_{30}(j\omega)|$ (рис. 6.3). При увеличении M повышается σ .

Большинство показателей задается независимо, получается неоднозначность решения задачи синтеза. Есть возможность выбора с точки зрения простоты реализации КУ.

ЖЛАХ строится по участкам: низкочастотный (НЧ), среднечастотный (СЧ), высокочастотный (ВЧ).

Построение ЛАХ неизменной части

Асимптотическую ЛАХ $L_0(\omega)$ строят по передаточной функции $W_0(s) = K_0 R_0(s) / s^{\nu_0} Q_0(s)$, где $R_0(s)$, $Q_0(s)$ – полиномы от s со свободным членом, равным 1; K_0 , ν_0 – коэффициент усиления и порядок астатизма нескорректированной системы.

Предварительно полиномы $R_0(s)$, $Q_0(s)$ необходимо разложить на множители вида: $(T_i s + 1)$, $(T_i s^2 + 2T_i \xi s + 1)$, где $\xi < 1$. После этого можно строить асимптотическую ЛАХ неизменной части. При этом иметь в виду, что в R_0 , Q_0 могут оказаться сомножители с очень малыми постоянными времени T_i . Их влияние на свойства системы незначительно, и при построении ЛАХ не учитываются. Можно пренебречь сомножителями с $T_i \leq 1/100\omega_{cp}$, где ω_{cp} – частота, при которой L_0 пересекает ось частот.

Построение низкочастотного участка

На НЧ интервале находится полезный входной сигнал, который должен воспроизводиться с минимальными искажениями и с максимальной

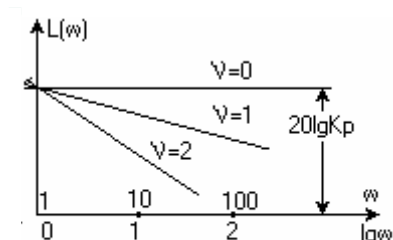


Рис. 6.4

точностью. НЧ интервал соответствует установившемуся режиму, поэтому он определяет точность системы. НЧ асимптота представляет собой прямую, проведенную через точку $20 \lg K_p$ при $\omega = 1$ ($\lg 1 = 0$) с наклоном -20ν дБ/дек, где ν – порядок астатизма системы, из ТЗ.

(см. рис. 6.4) Коэффициент $K_{раз}$ вычисляется из заданной точности.

Рассмотрим вычисление K_p для некоторых типовых воздействий, определим связь $K_{раз}$ с $\varepsilon(\infty)$:

1. Дано: $g(t) = 1(t)$, $\varepsilon(\infty)$ известно. Найти $K_{раз}$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s)$$

$$\varepsilon(s) = W_{\varepsilon g}(s) g(s) = [1/1 + W_p(s)] g(s), \text{ где } g(s) = L[g(t)] = 1/s,$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s [1/1 + W_p(s)] 1/s\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{1/1 + W_p(s)\}.$$

Если $W_p(s=0) = K_p$, то $\varepsilon(\infty) = 1/1+K_p$, т.е. $K_p = \frac{1 - \varepsilon(\infty)}{\varepsilon(\infty)}$.

2. Дано: $g(t) = at$, $\varepsilon(\infty)$ задано. Найти K_p .

$$\varepsilon(\infty) = \lim s\varepsilon(s) = \lim sW_{\varepsilon g}(s)g(s), \quad g(s) = a/s^2. \quad W_p(s) = \frac{W_{p0}(s)}{s^v}$$

(Здесь W_{p0} - часть $W_p(s)$, не имеющая s в знаменателе.) Из ТЗ $v = 1$.

$$W_{p0}(s) = K_p \quad (\text{добротность по скорости}),$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim \{s[1/1+(W_{p0}(s)/s)]a/s^2\} = \lim (a/s)\{1/[1+(K_p/s)]\} = \frac{a}{K_p} \rightarrow$$

$$\rightarrow K_p = \frac{a}{\varepsilon(\infty)}.$$

3. $g(t) = at^2$, $v = 2$. $\varepsilon(\infty) = \frac{2a^2}{K_p}$, K_p – добротность по ускорению.

$$4. g(t) = g_0 \sin \omega_1 t \quad \varepsilon_{\max}(\infty) \approx \frac{g_0}{|W_p(j\omega_1)|}.$$

Построение среднечастотного участка

На этом интервале лежит частота среза $\omega_{\text{ср}}$, т.е. $L_p(\omega_{\text{ср}}) = 0$, или $|W_p(j\omega_{\text{ср}})| = 1$. Этот участок влияет на запасы устойчивости показатели качества $t_{\text{пп}}$ и σ , т.е. он определяет динамику системы. Область СЧ+НЧ называется областью существенных частот.

Определим $\omega_{\text{ср}}$ и наклон ЖЛАХ вблизи $\omega_{\text{ср}}$.

Частоту $\omega_{\text{ср}}$ ищем в промежутке: $\omega_{\text{ср min}} \leq \omega_{\text{ср}} \leq \omega_{\text{ср max}}$. Минимальная частота среза $\omega_{\text{ср min}}$ определяется $t_{\text{пп}}$, максимальная $\omega_{\text{ср max}}$ определяется требуемым максимальным ускорением отработки входного сигнала $X''_{\text{max}}(t)$.

Чем выше $\omega_{\text{ср}}$, тем меньше $t_{\text{пп}}$. Большую $\omega_{\text{ср}}$ трудно реализовать, поэтому $\omega_{\text{ср max}}$ выбирается из условия физической реализуемости.

Для этого необходимо знать $X''_{\max}(t)$. Установлено, что для получения оптимального переходного процесса, монотонного ($\sigma = 0$) и с минимальным $t_{\text{пп}}$, $\omega_{\text{ср}}$ разомкнутой ЛАХ выбирается:

$$\omega_{\text{ср опт}} = \omega_{\text{ср max}} = \sqrt{X''_{\max}(t) / g_0},$$

где g_0 – амплитуда входного сигнала.

$\omega_{\text{ср}} > \omega_{\text{ср max}}$ не может быть реализована.

Наклон СЧ ЛАХ должен быть -20 дБ/дек.

Величину $\omega_{\text{ср min}}$ выбираем из условия обеспечения заданного качества: σ , $t_{\text{пп}}$. Выбор основан на связи $h(t)$ и $P_3(\omega)$ (вещественной частотной характеристики замкнутой системы).

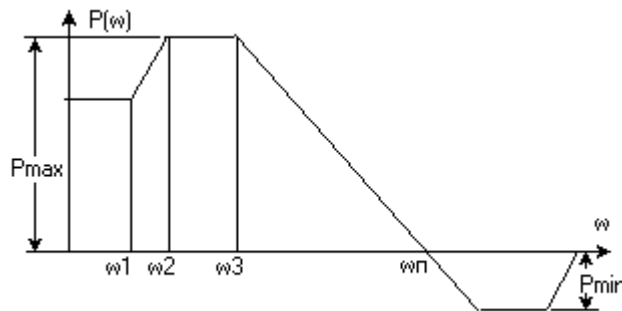


Рис. 6.5

В рис. 6.5: $\omega_{\text{п}}$ – частота положительности.

Лучшее качество имеют системы, у которых $P_3(\omega)$ имеет параметры:

$$\omega_3 / \omega_{\text{п}} \leq 0,8; \quad \omega_1 / \omega_2 \geq 0,4; \quad \omega_2 / \omega_{\text{п}} \geq 0,5. \quad (6.2)$$

Для такой типовой трапеции

$$\sigma = f(P_{\text{max}}); \quad t_{\text{пп}} = f(P_{\text{max}}, \omega_{\text{ср}}); \quad \omega_{\text{ср min}} = (0,6 - 0,9)\omega_{\text{п}}. \quad (6.3)$$

Существуют диаграммы, представляющие собой зависимость $\sigma = f(P_{\text{max}})$ и $t_{\text{пп}} = f(P_{\text{max}}, \omega_{\text{ср}})$. Вид диаграмм представлен на рис. 6.6.

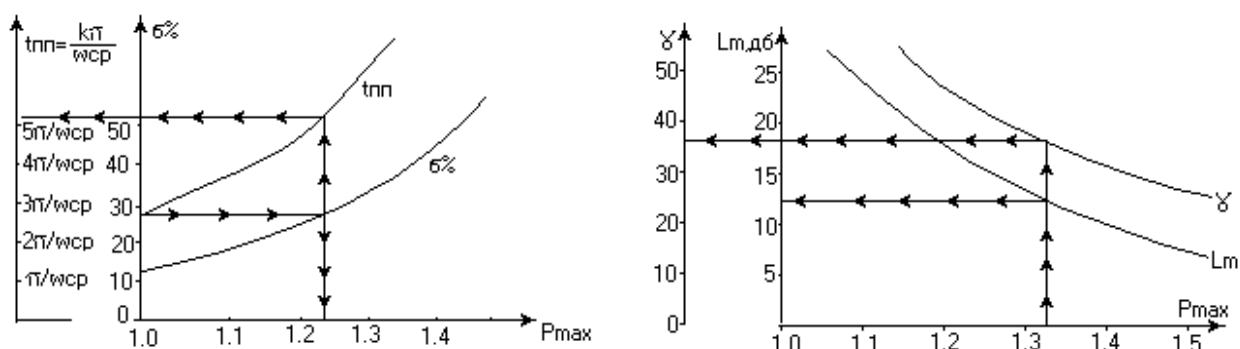


Рис. 6.6

Правило. По заданному $\sigma \rightarrow P_{\max} \rightarrow t_{пп} \rightarrow \omega_{ср \min}$.

Таким образом, $\omega_{ср}$ выбирается по одному из условий:

$\omega_{ср} \approx \omega_{ср \min}$ (больше можно, так как $\omega_{ср}$ определяет $t_{пп}$), или

$$\omega_{ср \min} \leq \omega_{ср} \leq \omega_{ср \max} . \quad (6.4)$$

Протяженность СЧ участка находится исходя из заданных запасов устойчивости. Запас устойчивости по фазе γ должен быть обеспечен на участке $-L_M \leq L_{ж}(\omega) \leq L_M$, где L_M – запас устойчивости по модулю.

Сопряжение НЧ и СЧ участков

Проводим прямые с ординатой $+L_M$ и $-L_M$, параллельные оси ω , наносим на ней точки ω_a , ω_b . Если наклон НЧ части 0 или -20 дБ/дек, то наклон сопрягающей части -20 или -40 дБ/дек. Сопрягающая часть начинается из точки с координатами $(\omega_a, +L_M)$.

После построения сопрягающей части проверяют избыток фазы при частоте ω_a , ординате $L_{ж}(\omega) = L_M$:

$$\gamma_a = \pi - v\pi/2 - (k\pi/2 - \sum_{i=1}^k \omega_i / \omega_a) + (\pi l/2 - \sum_{j=1}^l \omega_j / \omega_a), \quad (6.5)$$

где v – порядок астатизма, ω_i – сопрягаемые частоты $< \omega_a$, при которых наклон $L_{ж}(\omega)$ увеличивается на 20 дБ/дек, k – количество этих частот, ω_j –

частоты сопряжения меньше ω_a , при которых наклон уменьшается на 20 дБ/дек, l – их количество. Должно быть $\gamma_a \geq \gamma_{\text{треб}}$. Если γ_a будет меньше требуемого, то сопрягаемую асимптоту следует сдвинуть влево, в противном случае вправо.

Чем больший диапазон частот занимает НЧ участок, тем лучше система воспроизводит НЧ изменения задающего воздействия $g(t)$.

Высокочастотный участок

Этот участок мало влияет на свойства системы, поэтому асимптоту следует выбирать из условия простоты реализации КУ. Это достигается путем совмещения ВЧ участков $L_{\text{ж}}(\omega)$ и $L_{\text{р0}}(\omega)$. После выбора ВЧ участка следует проверить избыток фазы в точке $(\omega_b, -L_{\text{м}})$.

$$\gamma_b = \pi - \pi g_{\text{ср}} / 4 - \sum_{i=1}^k \omega_b / \omega_i, \quad (6.6)$$

где $g_{\text{ср}}$ – относительный наклон СЧ участка:

при наклоне -20 дБ/дек $g_{\text{ср}} = 1$, -40 – 2; ω_i – сопрягаемые частоты, $\omega_i > \omega_{\text{ср}}$,

k – их число. Если $\gamma_b < \gamma_{\text{треб}}$, ВЧ асимптоту двигают вправо, и наоборот.

Обычно ω_1 (частота сопряжения СЧ и ВЧ участка) $\approx 4\omega_{\text{ср}}$.

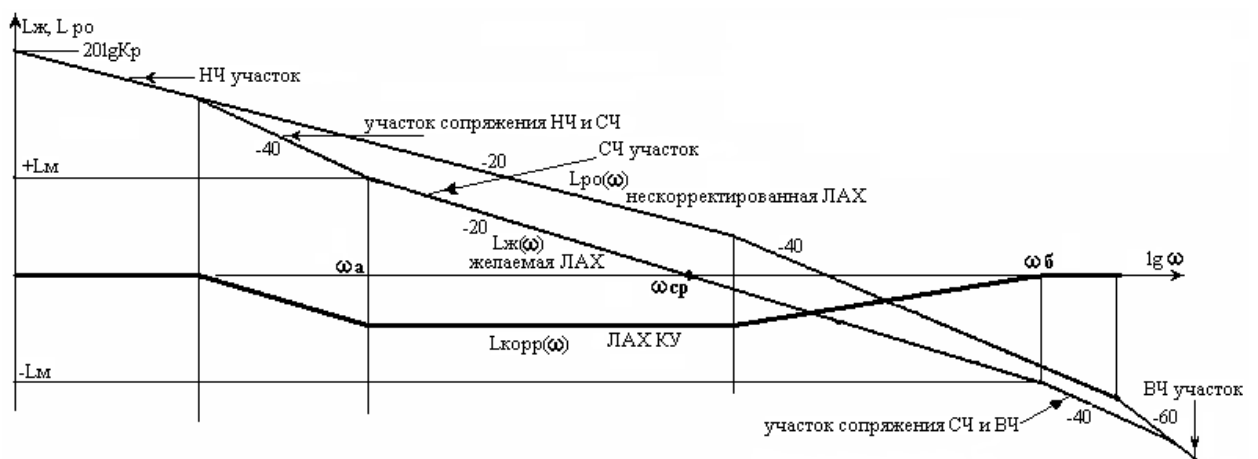


Рис. 6.7

Выбор корректирующего устройства

Передаточная функция разомкнутой системы с последовательным КУ:

$$W = W_0 W_{к1},$$

где $W_{к1}$ – передаточная функция последовательного КУ.

Для ЛАХ: $L(\omega) = L_0(\omega) + L_{к1}(\omega)$,

Желаемая ЛАХ: $L_{ж}(\omega)$ есть ЛАХ разомкнутой системы, которая должна быть получена введением последовательного КУ.

Следовательно, ЛАХ последовательного КУ получается:

$$L_{к1}(\omega) = L_{ж}(\omega) - L_0(\omega). \quad (6.7)$$

Вычитаем из желаемой характеристики ЛАХ неизменной части.

По ЛАХ $L_{к1}(\omega)$ можно определять полиномы $R_{к1}(s)$, $Q_{к1}(s)$ его передаточной функции $W_{к1}(\omega) = R_{к1}(s)/Q_{к1}(s)$.

Каждой сопрягаемой частоте ω_i , при которой наклон ЛАХ увеличивается на 20 дБ/дек, соответствует множитель $(s/\omega_i)+1$ в полиноме $R_{к1}$. Если при какой-то ω_i наклон изменяется на 40 дБ/дек, то ей соответствует квадрат данного множителя.

Затем пересчитываем по формулам перехода между видами КУ:

$$\begin{aligned} W_{к1} &= 1/(1+W_2 W_{к2}) = 1+ W_{к3}/W_3, \\ W_{к2} &= (1-W_{к1})/W_2 W_{к1} = - W_{к3}/W_2(W_3+W_{к3}), \\ W_{к3} &= W_3(W_{к1}-1) = - W_2 W_3 W_{к2}/(1+W_2 W_{к2}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь $W_{к1}$ – передаточная функция последовательного корректирующего устройства,

$W_{к2}$ – встречно-параллельного КУ,

$W_{к3}$ –согласно-параллельного КУ.

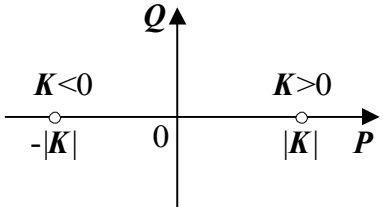
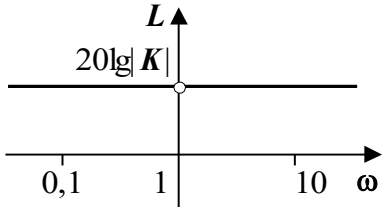
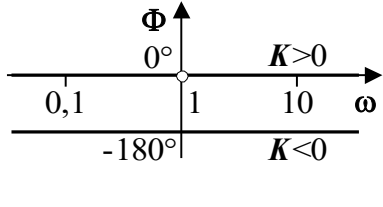
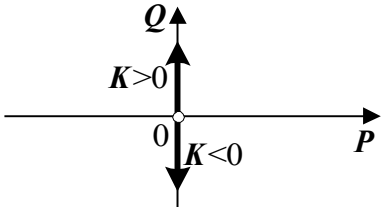
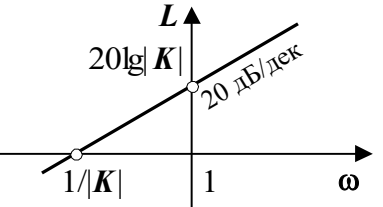
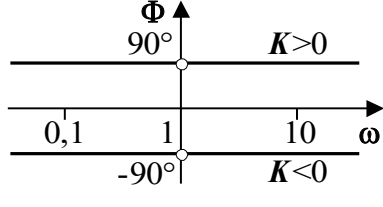
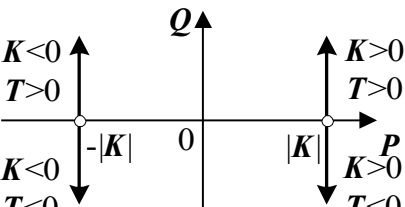
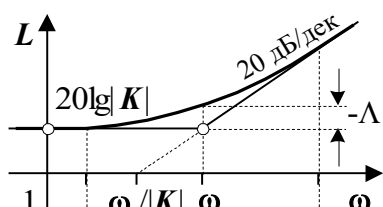
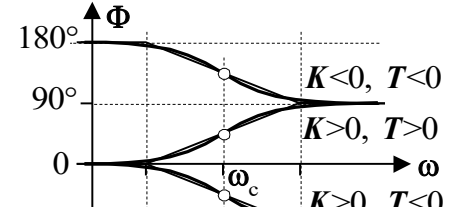
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

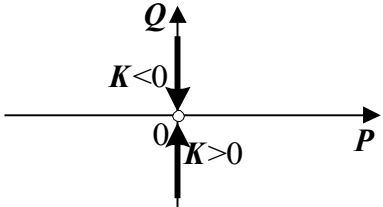
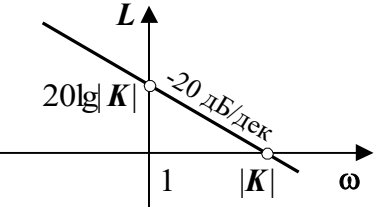
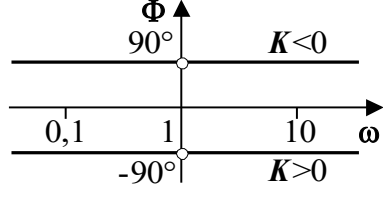
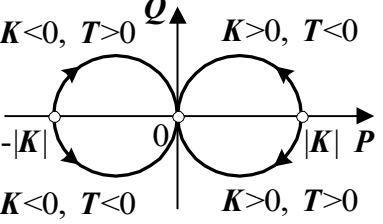
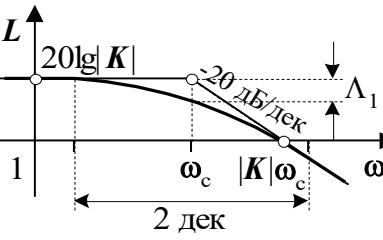
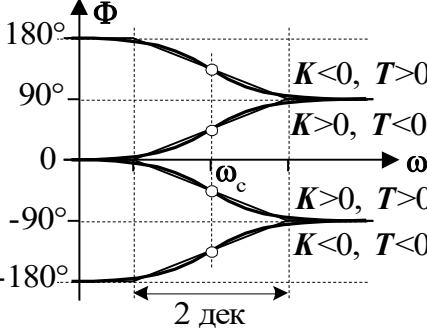
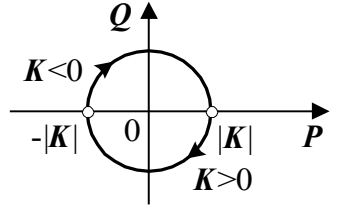
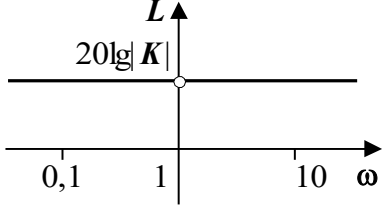
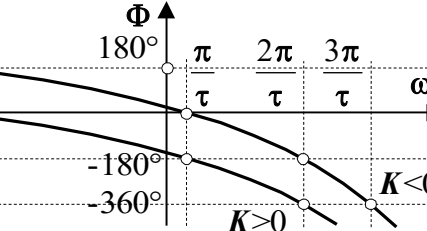
1. Чем задача синтеза САУ отличается от задачи анализа?
2. Что нужно разработать при синтезе САУ?
3. Какая часть системы остается неизменной?
4. Почему метод ЖЛАХ применяется для минимально–фазовых систем?
5. Какая часть системы рассчитывается при синтезе методом ЖЛАХ?
6. Что входит в техзадание при разработке КУ методом ЖЛАХ?
7. Приведите последовательность синтеза системы методом ЖЛАХ.
8. Каковы недостатки метода ЖЛАХ?
9. Какую часть ЛАХ строят первой при методе ЖЛАХ?
10. Что представляет собой низкочастотная асимптота при построении частотной характеристики методом ЖЛАХ?
11. Как осуществляется сопряжение участков ЖЛАХ?
12. На каком частотном интервале лежит частота среза?
13. Что такое частота положительности?
14. Чем определяется минимальная частота среза?
15. Почему частоту среза можно выбрать выше минимальной?
16. Чем определяется максимальная частота среза?
17. Почему при методе ЖЛАХ рассчитывается корректирующее устройство последовательного типа?
18. Как найти передаточные функции корректирующих устройств встречно – параллельного, согласно – параллельного типа при методе ЖЛАХ?

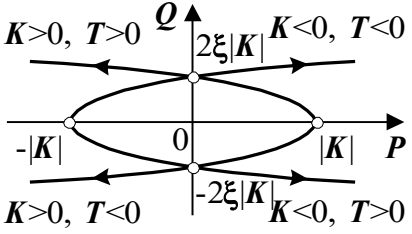
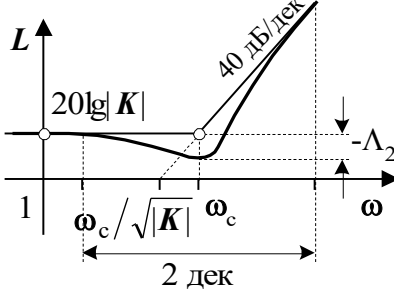
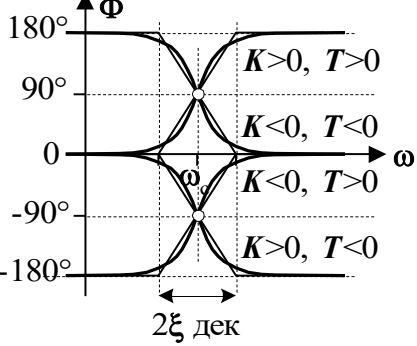
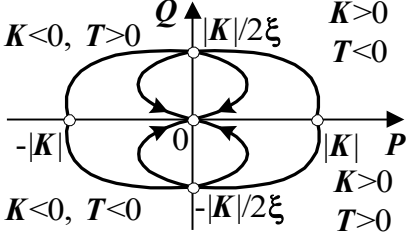
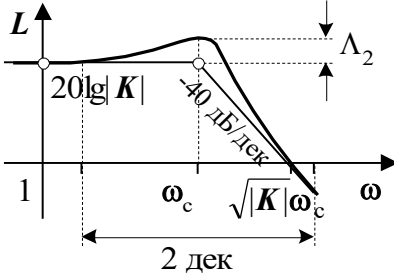
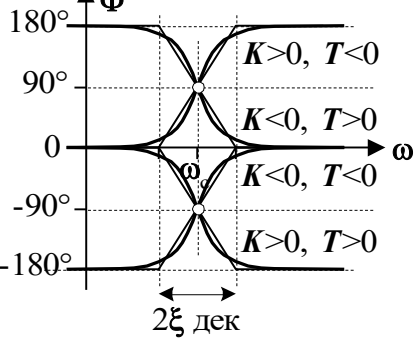
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

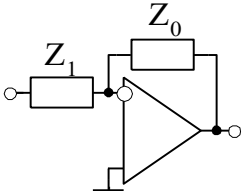
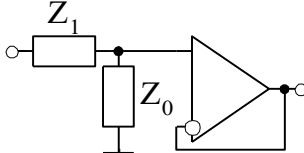
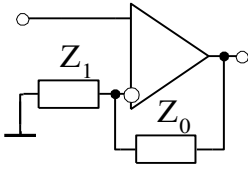
1. **Алексеев, А.Г.** Операционные усилители и их применение / А.Г. Алексеев, Г.В. Войшилло. – М.: Радио и связь, 1989. – 120 с.
2. Теория автоматического управления: учеб. для вузов: в 2 ч. / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов [и др.]: под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1986. – 367с.
3. **Бесекерский, В.А.** Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 768с.
4. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В.А. Бесекерского. - 3-е изд. – М.: Наука, 1969. – 587с.
5. **Макаров, И.М.** Линейные автоматические системы / И.М. Макаров, Б.М. Менский. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
6. **Никулин, Е.А.** Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза систем: учеб. пособие / Е.А. Никулин. – 2-е изд; –НГТУ. Н.Новгород, 2000. – 230с.
7. **Попов, Е.П.** Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
8. **Цыпкин, Я.З.** Основы теории автоматических систем / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1977. – 560 с.
9. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высш. шк., 1977. – 366 с.
10. Сборник задач и упражнений по курсу «Основы теории автоматического управления»: учеб. пособие / А.А. Боголюбов, Г.В. Войнич, Л.А. Носов [и др.]; под ред. Н.Б. Судзиловского. – М.: Издательство МАИ, 1988. – 50 с.

Таблица П1

Звено и его ПФ $W(s)$	АФХ $A(\varphi)$	ЛАХ $L(\omega)$	ЛФХ $\Phi(\omega)$
<p>Безынерционный усилитель</p> <p>K</p>	 <p>$P(\omega) = K, Q(\omega) = 0$</p>	 <p>$L(\omega) = 20\lg K$</p>	 <p>$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{при } K > 0 \\ \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$</p>
<p>Дифференцирующее звено</p> <p>Ks</p>	 <p>$P(\omega) = 0, Q(\omega) = K\omega$</p>	 <p>$L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega$</p>	 <p>$\Phi(\omega) = \begin{cases} 90^\circ & \text{при } K > 0 \\ -90^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$</p>
<p>Форсирующее звено первого порядка</p> <p>$K(1+Ts)$</p>	 <p>$P(\omega) = K, Q(\omega) = KT\omega$</p>	 <p>$L(\omega) = 20\lg K + 10\lg(1 + T^2\omega^2)$</p>	 <p>$\Phi(\omega) = \begin{cases} \arctg(T\omega) & \text{при } K > 0 \\ \arctg(T\omega) \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$</p>

<p>Интегрирующее звено</p> $\frac{K}{s}$	 <p>$P(\omega)=0, Q(\omega)=-K/\omega$</p>	 <p>$L(\omega)=20\lg K -20\lg\omega$</p>	 <p>$\Phi(\omega)=\begin{cases} 90^\circ & \text{при } K < 0 \\ -90^\circ & \text{при } K > 0 \end{cases}$</p>
<p>Апериодическое звено</p> $\frac{K}{1+Ts}$	 <p>$P(\omega)=K/(1+T^2\omega^2)$ $Q(\omega)=-KT\omega/(1+T^2\omega^2)$</p>	 <p>$L(\omega)=20\lg K -10\lg(1+T^2\omega^2)$</p>	 <p>$\Phi(\omega)=\begin{cases} -\arctg(T\omega) & \text{при } K > 0 \\ -\arctg(T\omega)\pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$</p>
<p>Звено чистого запаздывания</p> $Ke^{-\tau s}$	 <p>$P(\omega)=K \cos(\tau\omega)$ $Q(\omega)=-K \sin(\tau\omega)$</p>	 <p>$L(\omega)=20\lg K$</p>	 <p>$\Phi(\omega)=\begin{cases} -180^\circ\tau\omega/\pi & \text{при } K > 0 \\ 180^\circ(1-\tau\omega/\pi) & \text{при } K < 0 \end{cases}$</p>

<p>Форсирующее звено второго порядка</p> $K(1+2\xi Ts+T^2s^2)$	 $P(\omega) = K(1 - T^2\omega^2)$ $Q(\omega) = 2\xi KT\omega$	 $L(\omega) = 20\lg K + 10\lg\left\{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2\right\}$	 $\Phi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{при } K > 0 \\ \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$
<p>Колебательное звено</p> $\frac{K}{1+2\xi Ts+T^2s^2}$	 $P(\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$ $Q(\omega) = \frac{-2\xi KT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$	 $L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left\{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2\right\}$	 $\Phi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{при } K > 0 \\ -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$

№ п/п	Элементы схемы		Принципиальная схема и ее передаточная функция		
	Z_1	Z_0	а) инвертирующий каскад 	б) неинвертирующий каскад с входным делителем 	в) неинвертирующий каскад с делителем в ООС 
1	Любой	Любой	$-\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$	$\frac{Z_0(s)}{Z_0(s)+Z_1(s)}$	$1+\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$
2	R_1	C_0	$-\frac{1}{T_{10}s}$	$\frac{1}{1+T_{10}s}$	$\frac{1+T_{10}s}{T_{10}s}$
3	C_1	R_0	$-T_{01}s$	$\frac{T_{01}s}{1+T_{01}s}$	$1+T_{01}s$
4	R_1	L_0	$-\theta_{01}s$	$\frac{\theta_{01}s}{1+\theta_{01}s}$	$1+\theta_{01}s$
5	L_1	R_0	$-\frac{1}{\theta_{10}s}$	$\frac{1}{1+\theta_{10}s}$	$\frac{1+\theta_{10}s}{\theta_{10}s}$
6	C_1	L_0	$-\tau_{01}^2s^2$	$\frac{\tau_{01}^2s^2}{1+\tau_{01}^2s^2}$	$1+\tau_{01}^2s^2$
7	L_1	C_0	$-\frac{1}{\tau_{10}^2s^2}$	$\frac{1}{1+\tau_{10}^2s^2}$	$\frac{1+\tau_{10}^2s^2}{\tau_{10}^2s^2}$

8	R_1	$R_0 + C_0$	$-\frac{1+T_{00}s}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{00}s}{1+(T_{00}+T_{10})s}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{10})s}{T_{10}s}$
9	$R_1 + C_1$	R_0	$-\frac{T_{01}s}{1+T_{11}s}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{01}+T_{11})s}$	$\frac{1+(T_{01}+T_{11})s}{1+T_{11}s}$
10	C_1	$R_0 + C_0$	$-c_{10}(1+T_{00}s)$	$\frac{1+T_{00}s}{1+c_{01}+T_{00}s}$	$1+c_{10}+T_{01}s$
11	$R_1 + C_1$	C_0	$-\frac{c_{10}}{1+T_{11}s}$	$\frac{1}{1+c_{01}+T_{10}s}$	$\frac{1+c_{10}+T_{11}s}{1+T_{11}s}$
12	R_1	$R_0 \parallel C_0$	$-\frac{r_{01}}{1+T_{00}s}$	$\frac{1}{1+r_{10}+T_{10}s}$	$\frac{1+r_{01}+T_{00}s}{1+T_{00}s}$
13	$R_1 \parallel C_1$	R_0	$-r_{01}(1+T_{11}s)$	$\frac{1+T_{11}s}{1+r_{10}+T_{11}s}$	$1+r_{01}+T_{01}s$
14	C_1	$R_0 \parallel C_0$	$-\frac{T_{01}s}{1+T_{00}s}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{00}+T_{01})s}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{01})s}{1+T_{00}s}$
15	$R_1 \parallel C_1$	C_0	$-\frac{1+T_{11}s}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{11}s}{1+(T_{10}+T_{11})s}$	$\frac{1+(T_{10}+T_{11})s}{T_{10}s}$
16	$R_1 + C_1$	$R_0 + C_0$	$-c_{10} \frac{1+T_{00}s}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{00}s}{1+c_{01}+(T_{00}+T_{10})s}$	$\frac{1+c_{10}+(T_{01}+T_{11})s}{1+T_{11}s}$
17	$R_1 + C_1$	$R_0 \parallel C_0$	$-\frac{T_{01}s}{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{00}+T_{01}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{01}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}$

18	$R_1 \parallel C_1$	$R_0 + C_0$	$-\frac{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}{T_{10}s}$	$\frac{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}{1+(T_{00}+T_{01}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{10}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}{T_{10}s}$
19	$R_1 \parallel C_1$	$R_0 \parallel C_0$	$-r_{01} \frac{1+T_{11}s}{1+T_{00}s}$	$\frac{1+T_{11}s}{1+r_{10}+(T_{10}+T_{11})s}$	$\frac{1+r_{01}+(T_{00}+T_{01})s}{1+T_{00}s}$
20	R_1	$R_0 + C_0 + L_0$	$-\frac{1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}{1+(T_{00}+T_{10})s+\tau_{00}^2s^2}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{10})s+\tau_{00}^2s^2}{T_{10}s}$
21	$R_1 + C_1 + L_1$	R_0	$-\frac{T_{01}s}{1+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{01}+T_{11})s+\tau_{11}^2s^2}$	$\frac{1+(T_{01}+T_{11})s+\tau_{11}^2s^2}{1+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}$
22	C_1	$R_0 + C_0 + L_0$	$-c_{10}(1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2)$	$\frac{1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}{1+c_{01}+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$	$1+c_{10}+T_{01}s+\tau_{01}^2s^2$
23	$R_1 + C_1 + L_1$	C_0	$-\frac{c_{10}}{1+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}$	$\frac{1}{1+c_{01}+T_{10}s+\tau_{10}^2s^2}$	$\frac{1+c_{10}+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{1+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}$
24	R_1	$R_0 \parallel C_0 \parallel L_0$	$-\frac{\theta_{01}s}{1+\theta_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$	$\frac{\theta_{01}s}{1+(\theta_{00}+\theta_{01})s+\tau_{00}^2s^2}$	$\frac{1+(\theta_{00}+\theta_{01})s+\tau_{00}^2s^2}{1+\theta_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$
25	$R_1 \parallel C_1 \parallel L_1$	R_0	$-\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{\theta_{10}s}$	$\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{1+(\theta_{10}+\theta_{11})s+\tau_{11}^2s^2}$	$\frac{1+(\theta_{10}+\theta_{11})s+\tau_{11}^2s^2}{\theta_{10}s}$
26	C_1	$R_0 \parallel C_0 \parallel L_0$	$-\frac{\tau_{01}^2s^2}{1+\theta_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$	$\frac{\tau_{01}^2s^2}{1+\theta_{00}s+(\tau_{00}^2+\tau_{01}^2)s^2}$	$\frac{1+\theta_{00}s+(\tau_{00}^2+\tau_{01}^2)s^2}{1+\theta_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$
27	$R_1 \parallel C_1 \parallel L_1$	C_0	$-\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{\tau_{10}^2s^2}$	$\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{1+\theta_{11}s+(\tau_{10}^2+\tau_{11}^2)s^2}$	$\frac{1+\theta_{11}s+(\tau_{10}^2+\tau_{11}^2)s^2}{\tau_{10}^2s^2}$

СВЕРДЛОВ РОСТИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

**ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
ОСНОВЫ АНАЛИЗА, НАЧАЛА СИНТЕЗА**

Редактор **Е.В. Комарова**

Компьютерный набор и верстка **Р.В. Свердлов**

Подписано в печать **3.07.2021**. Формат 60 x 90¹/₁₆.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0.
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 50 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева.

Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.