Эварт Т.Е., Троицкий А.В., Поздяев В.В.

Численные методы решения инженерных задач

Нижний Новгород 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Р. Е. Алексеева»

АРЗАМАССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

Эварт Т.Е., Троицкий А.В., Поздяев В. В.

Численные методы решения инженерных задач

Рекомендовано УМО по математике педвузов и университетов
Волго-Вятского региона в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Нижний Новгород 2014

УДК 519.6
ББК 22.19
Э 142

Р е ц е н з е н т ы:

доктор педагогических наук, профессор *И.Е.Вострокнутов*;
кандидат технических наук *А.Ю. Мишин*

Эварт Т.Е., Троицкий А.В., Поздяев В.В.

Численные методы решения инженерных задач: учебное пособие / Т.Е. Эварт, А.В. Троицкий, В.В. Поздяев; Нижегород. гос. техн. ун-т. им. Р.Е. Алексеева. – Н.Новгород, 2014. – 110с.

ISBN 978-5-502-00412-1

Учебное пособие «Численные методы решения инженерных задач» является исчерпывающим и подробным руководством по применению Excel для решения инженерных задач. Пособие содержит материалы лабораторных занятий по курсу «Численные методы». Упражнения предшествуют краткие сводки необходимых теоретических сведений. Разобраны решения типовых примеров. В содержательном плане пособие согласовано с курсом лекций.

Для бакалавров высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 231300 – «Прикладная математика» и 230400 – «Информационные системы и технологии», а также для бакалавров других направлений подготовки.

Рис.107. Табл. 5. Библиогр.: 7 назв.

УДК 519.6
ББК 22.19

ISBN 978-5-502-00412-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

***Лабораторная работа* № 1**

1.1. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть X– точное значение, x – приближенное значение некоторого числа.

Абсолютная погрешность приближенного числа равна модулю разности между его точным и приближенным значениями:

$$\Delta x = |X - x|.$$

Однако точное значение X зачастую неизвестно, поэтому вместо абсолютной погрешности используют понятие границы абсолютной погрешности:

$$|X - x| \leq \Delta x^*.$$

Число Δx^* заведомо равно или превышает значение абсолютной погрешности Δxи называется предельной абсолютной погрешностью. Часто применяется запись: $X = x \pm \Delta x^*$.

Следует отметить, что абсолютная погрешность не полностью характеризует результат. Например, абсолютная погрешность в 1 мм никчемна при оценке расстояния от Москвы до Рио-де-Жанейро и абсурдна при поиске расстояний между молекулами твердого вещества. Поэтому основной характеристикой точности является относительная погрешность.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Относительная погрешность иногда измеряется в процентах, тогда

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%.$$

1.2. Действия над приближенными числами

Результат действий над приближенными числами представляет собой также приближенное число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных по нижеследующим правилам.

1. При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются: $\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$.

2. Относительная погрешность разности или суммы двух чисел вычисляются по формулам:

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{|a+b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|}; \quad \delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}, (a \neq b)$$

3. При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются:

$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b, \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b.$$

4. При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени: $\delta(a^k) = k\delta a$.

1.3. Погрешность функции

Общая формула для оценки предельной абсолютной погрешности функции нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$имеет вид:

$$\Delta u^* \approx |df(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i^*\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i^*|,$$

где Δx_i^* - предельная абсолютная погрешность числа $x_i (i = 1,2, \ldots, n)$.

Пример 1.1. В ходе вычислений получены приближенные значения некоторых величин: a=5,256 , b=2,892. Установить, какой из результатов более точен, если известны их истинные значения: A=5,158 и B=2,814.

Для решения задачи использовать табличный процессор Microsoft Excel, рекомендуемый вид рабочего листа приведен на рис. 1.1.

	A	B	C	D	E	F
2	Л.р. №1 Оценка точности вычислений Студента ______________________ , группы ______________					
3						
4	Прибл. знач.:	a=	5,256	b=	2,892	
5	Точное знач.:	A=	5,158	B=	2,814	
6	Абсолют. погр.:	Δa=	0,098	Δb=	0,078	
7	Относит. погр.:	δa=	0,018645	δb=	0,026971	
8		δa=	1,86%	δb=	2,70%	
9						
10	Вывод:	a вычислено точнее b				

Рис. 1.1. Сравнение относительных погрешностей приближенных величин

При решении примера вводятся начальные значения в ячейках **C4:C5; E4:E5**. Остальные значения рассчитываются средствами Microsoft Excel по формулам, приведенным в теоретической справке.

Пример 1.2. Известно, что $x = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c-a}$, где A=1,34±0,02; B=7,98±0,05; C=52,74±0,1.

1. Найти предельную абсолютную погрешность Δx^* функции x.
2. Найти абсолютную погрешность Δx функции x
3. Вычислить относительную погрешность δx функции x
4. Оценить предельную относительную погрешность δx^*функции x.

Решение

Нахождение предельной абсолютной погрешности Δx^* ***функции .***

Исходящая функция x является функцией трех переменных a,b,c. Для оценки предельной абсолютной погрешности воспользуемся формулой:

$$\Delta x^* \approx \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right| \Delta a^* + \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right| \Delta b^* + \left|\frac{\partial x}{\partial c}\right| \Delta c^*.$$

Найдем частные производные функции $x = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c-a}$:

$$\frac{\partial x}{\partial a}[b, c = const] = \frac{(a)'_a \cdot \sqrt[3]{b}(c-a) - a \cdot \sqrt[3]{b}(c-a)'_a}{(c-a)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{b}(c-a) + a \cdot \sqrt[3]{b}}{(c-a)^2} = \frac{c \cdot \sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial b}[a, c = const] = \frac{a}{c-a} \sqrt[3]{b}'_b = \frac{a}{(c-a)} \frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial c}[a, b = const] = a \cdot \sqrt[3]{b} \left(\frac{1}{c-a}\right)'_c = a \cdot \sqrt[3]{b} \frac{-1}{(c-a)^2} = \frac{-a \cdot \sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}$$

Введем исходные данные в блок **A3:B8** (рис. 1.2). В ячейках **C3:C8** вычислим значения $\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial c}\right|$. В ячейку **F10** запишем формулу

$$=\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|\Delta a^{*}+\left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|\Delta b^{*}+\left|\frac{\partial x}{\partial c}\right|\Delta c^{*}$$

для вычисления предельной абсолютной погрешности.

	A	B	C	D	E	F
2	Л.р. №1 Оценка относительной и абсолютной погрешностей Студента ______________________ , группы ______________					
3	a	Δa^{*}	$\lvert\partial x/\partial a\rvert$	$a_в$	$a_н$	
4	1,34	0,02	0,03989	1,36	1,32	
5	b	Δb^{*}	$\lvert\partial x/\partial b\rvert$	$b_в$	$b_н$	
6	7,98	0,05	0,00218	8,03	7,93	
7	c	Δc^{*}	$\lvert\partial x/\partial c\rvert$	$c_в$	$c_н$	
8	52,74	0,1	0,00101	52,84	52,64	
9						
10	$x_в$=	0,05290	Пред. абсолют. погр.		Δx^{*}=	0,0010
11	$x_н$=	0,05129	Абсолют. погр.		Δx=	0,0008
12	x=	0,05210	Относит. погр.		δx=	0,0155
13			Пред. относит. погр.		δx^{*}=	0,0193

Рис. 1.2

Нахождение абсолютной погрешности Δx функции x

В ячейках **D3:D8** (рис. 1.2) рассчитаем верхнюю оценку значений переменных: $a_в$=1,34+0,02(=**A4+B4**), аналогично $b_в$, $c_в$.В ячейке **B10** вычислим верхнюю оценку значения функции $x_B=\frac{a_B\cdot\sqrt[3]{b_B}}{c_B-a_B}$. Нижняя оценка значения функции $x_H=\frac{a_H\cdot\sqrt[3]{b_H}}{c_H-a_H}$ вычисляется в ячейках **E3:E8** и **B11** аналогично.

Значение абсолютной погрешности функции ищется по формуле $\Delta x=\frac{|x_B-x_H|}{2}$в ячейке **F11.** Найденная абсолютная погрешность (ячейка **F11**)должна быть не больше предельной абсолютной погрешности (ячейка **F10**),т.е. должно выполняться условие: $\Delta x \leq \Delta x^*$ **.**

Вычисление относительной погрешности δx функции x

Исходные данные позволяют вычислить значение x при a=1,34; b=7,98; c=52,74 в ячейке **B12** (рис. 1.2), а в ячейке **F12** – рассчитать значение относительной погрешности δx, используя найденное выше значение абсолютной погрешности Δx.

Оценка предельной относительной погрешности δx^* функции x

Предельная относительная погрешность заданной функции, согласно рассмотренным выше формулам, представима в виде

$$\delta x^* = \delta\left(\frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c-a}\right)^* = \delta\left(a \cdot \sqrt[3]{b}\right)^* + \delta(c-a)^* = \delta a^* + \frac{1}{3}\delta b^* + \delta(c-a)^* =$$
$$= \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{3}\frac{\Delta b^*}{|b|} + \frac{\Delta(c-a)^*}{|c-a|} = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{3}\frac{\Delta b^*}{|b|} + \frac{\Delta c^* + \Delta a^*}{|c-a|}$$

Запишите полученную формулу в ячейку **F13** (рис. 1.2). Убедитесь в том, что значение относительной погрешности не превосходит значения предельной относительной погрешности, т.е. $\delta x \leq \delta x^*$.

Пример 1.3. Найти предельную абсолютную погрешность функции $y = b\sqrt{a}$при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\Delta x^* \approx \left(b\sqrt{a}\right)'_a \Delta a^* + \left(b\sqrt{a}\right)'_b \Delta b^* = b\frac{1}{2\sqrt{a}}\Delta a^* + \sqrt{a}\Delta b^* =$$

$$= 7\frac{1}{2\sqrt{4}}0{,}01 + \sqrt{4}\cdot 0{,}04 = 0{,}0175 + 0{,}08 = 0{,}0975$$

Пример 1.4. Найти предельную абсолютную погрешность функции $y = a - b$при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\Delta y^* = \Delta(a-b)^* = \Delta a^* + \Delta b^* = 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}05$$

Пример 1.5. Найти абсолютную погрешность функции $y = \frac{a-b}{c}$при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04; C=5±0,1.

Решение.

$$y_B = \frac{(a+\Delta a^*) - (b+\Delta b^*)}{c+\Delta c^*} = \frac{4{,}01 - 7{,}04}{5{,}1} = -0{,}5941,$$

$$y_H = \frac{(a-\Delta a^*) - (b-\Delta b^*)}{c-\Delta c^*} = \frac{3{,}99 - 6{,}96}{4{,}9} = -0{,}6061,$$

$$\Delta y = \frac{|y_B - y_H|}{2} = \frac{|-0{,}5941 - (-0{,}6061)|}{2} = 0{,}006.$$

Пример 1.6. Найти предельную относительную погрешность функции $y = \frac{a}{a-b}$ при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\delta y^* = \delta\left(\frac{a}{a-b}\right)^* = \delta a^* + \delta(a-b)^* = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{\Delta(a-b)^*}{|a-b|} =$$

$$= \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{\Delta a^* + \Delta b^*}{|a-b|} = \frac{0{,}01}{4} + \frac{0{,}01 + 0{,}04}{|4-7|} \approx 0{,}0025 + 0{,}0167 = 0{,}0192.$$

Пример 1.7. Найти предельную относительную погрешность функции $y = \frac{a}{\sqrt{b}}$при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\delta y^* = \delta\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^* = \delta a^* + \delta(\sqrt{b})^* = \delta a^* + \frac{1}{2}\delta b^* = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta b^*}{|b|} =$$

$$= \frac{0{,}01}{4} + \frac{1}{2}\frac{0{,}04}{7} \approx 0{,}0025 + 0{,}0029 = 0{,}0054$$

Пример 1.8. Известно, что A=4±0,01; B=8±0,04; C=5±0,1. Найти предельную относительную погрешность δy^*следующих функций:

1) $y = a \cdot \sqrt[3]{b}$, 2) y=c-a, 3) $y = \frac{a}{c+a}$;

найти предельную абсолютную погрешность Δy^*для функций:

4) $= \frac{\sqrt[3]{b}}{c}$, 5) y=$3ac$; 6) y=$a(c$-$b)$.

1.4. Варианты заданий

Найти предельную абсолютную погрешность Δx^* функции x.

Найти абсолютную погрешность Δx функции x

Вычислить относительную погрешность δx функции x

Оценить предельную относительную погрешность δx^* функции x.

Таблица 1.1

№ п/п	Выражение	Значения параметров		
		A	B	C
1	$x = \frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$	3,85±0,04	2,043±0,004	96,6±0,2
2	$x = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$	2,28±0,6	84,6±0,02	68,7±0,05
3	$x = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$	4,632±0,03	23,3±0,04	11,3±0,6
4	$x = \frac{a^2 b}{c}$	0,323±0,005	3,147±0,008	1,78±0,05
5	$x = \frac{ab^3}{\sqrt{c}}$	0,323±0,005	3,147±0,008	1,78±0,05
6	$x = \frac{ab}{c^2}$	0,258±0,01	3,45±0,004	1,374±0,007
7	$x = \frac{a^2 b}{c - b}$	2,712±0,005	0,37±0,02	13,21±0,08
8	$x = \frac{a^2 b}{c^3}$	3,804±0,003	4,05±0,005	2,18±0,01
9	$x = \sqrt{\frac{a \cdot c}{b}}$	0,834±0,004	138±0,03	1,84±0,01
10	$x = \frac{a - b}{b \cdot c}$	54,8±0,02	2,45±0,01	0,68±0,04
11	$x = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c^2}$	13,28±0,02	2,37±0,007	5,13±0,01
12	$x = \frac{a\sqrt{b}}{c^2}$	0,231±0,008	2,13±0,01	5,91±0,05
13	$x = \frac{a}{\sqrt{c} + b}$	1,182±0,005	2,18±0,009	0,19±0,01
14	$x = \frac{a + \sqrt{c}}{b^2}$	0,95±0,01	2,3±0,03	1,195±0,005

Окончание табл. 1.1

№ п/п	Выражение	Значения параметров		
		A	B	C
15	$x = \frac{a + b}{\sqrt{c}}$	1,19±0,05	2,3±0,1	5,191±0,08
16	$x = \frac{a}{b + \sqrt{c}}$	13,52±0,02	5,1±0,03	9,273±0,008
17	$x = \frac{a}{\sqrt{c + b}}$	1,18±0,01	2,75±0,05	3,62±0,007
18	$x = a + \frac{b}{\sqrt{c}}$	1,95±0,03	2,18±0,01	9,193±0,008
19	$x = a + b + c^2$	0,193±0,006	1,19±0,01	2,276±0,009
20	$x = a + \frac{\sqrt{c}}{b}$	2,56±0,04	1,785±0,09	3,4±0,1
21	$x = \frac{a}{b + \sqrt{c}}$	0,171±0,004	0,91±0,007	1,1±0,01
22	$x = \frac{\sqrt{a}}{b + \sqrt{c}}$	1,65±0,06	0,09±0,04	13,5±0,08
23	$x = \sqrt{a} + \frac{b^2}{c}$	1,18±0,05	5,1±0,01	0,9±0,005
24	$x = \sqrt{ac} + \frac{b}{a}$	13,7±0,05	6,2±0,01	0,721±0,008
25	$x = \frac{b}{c + \sqrt{a}}$	0,18±0,005	1,231±0,008	7,3±0,01
26	$x = \frac{a + \sqrt{b}}{\sqrt{c}}$	13±0,08	7,1±0,02	0,831±0,007
27	$x = \frac{a}{b} + \sqrt{c}$	15,76±0,03	7,3±0,05	1,141±0,009
28	$x = 1 + \sqrt{a} + \frac{b}{c}$	0,841±0,008	1,13±0,01	5,21±0,04
29	$x = \frac{a + \sqrt{c}}{b}$	1,692±0,005	2,13±0,008	13,1±0,02
30	$x = \frac{a \cdot c}{\sqrt[3]{b}}$	3,85±0,02	2,043±0,005	9,61±0,04

1.5. Контрольные вопросы

1. Запись основных математических функций в Excel.
2. Определение абсолютной и относительной погрешности.
3. Основные правила вычисления абсолютной и относительной погрешностей.

ГЛАВА 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лабораторная работа №2

Уравнение с одним неизвестным можно записать в каноническом виде

$$y(x) = 0$$

Решение уравнения заключается в нахождении корней, т.е. таких значений x, которые обращают уравнение в тождество. В зависимости от того, какие функции входят в уравнение, разделяют два больших класса уравнений - алгебраические и трансцендентные. Функция называется алгебраической, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень. К трансцендентным функциям относятся показательная, логарифмическая, тригонометрические прямые и обратные и т.п.

Найти точные значения корней можно лишь в исключительных случаях. Как правило, используются методы приближенного вычисления корней с заданной степенью точности ε. Это означает, что если установлено, что искомый корень лежит внутри интервала $[a,b]$, где а - левая граница, a b - правая граница интервала, и длина интервала $(b\text{-}a)$ <=ε, то за приближенное значение корня можно принять любое число, находящееся внутри этого интервала.

Процесс нахождения приближенных значений корней разбивается на два этапа:

1. Отделение корней, т.е. нахождение отрезков, на которых находиться один и только один корень уравнения.
2. Уточнение корней до заданной степени точности.

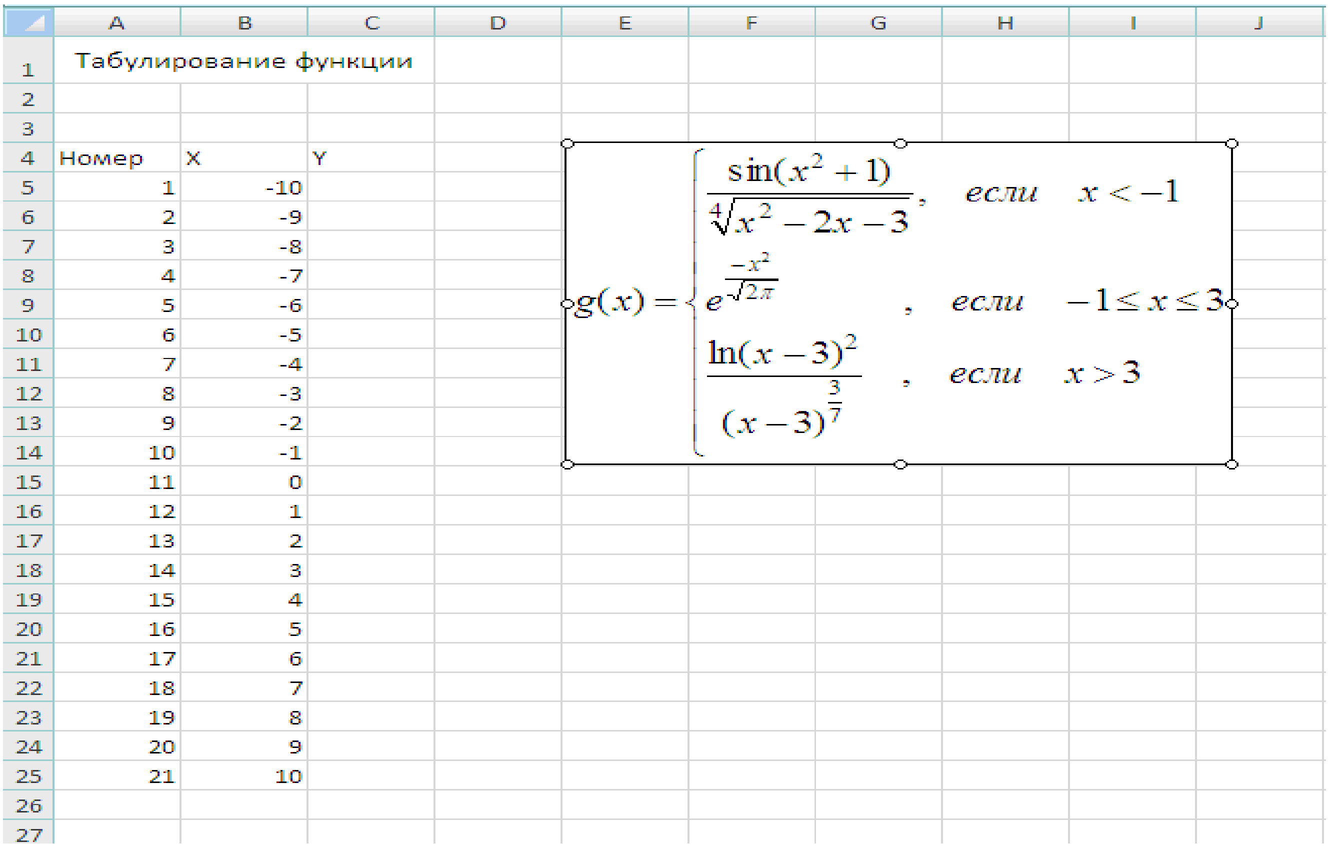
2.1. Построение графиков функций

Пример 2.1. Вычислить значения функции $g(x)$ на интервале [– 10; 10] с шагом 1. Построить график функции

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+1)}{\sqrt[4]{x^2-2x-3}}, & \text{если } x<-1\\ e^{\frac{-x^2}{\sqrt{2\pi}}}, & \text{если } -1\le x\le 3\\ \dfrac{\ln(x-3)^2}{(x-3)^{\frac{3}{7}}}, & \text{если } x>3\end{cases}$$

На каждом интервале функция определена.

На новом листе введите наименование столбцов, внесите нумерацию и значения x (**B5:B25**). Запишите формулу, воспользовавшись Microsoft Equation 3.0, как показано на рис. 2.1.



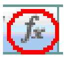
	A	B	C
1	Табулирование функции		
2			
3			
4	Номер	X	Y
5	1	-10	
6	2	-9	
7	3	-8	
8	4	-7	
9	5	-6	
10	6	-5	
11	7	-4	
12	8	-3	
13	9	-2	
14	10	-1	
15	11	0	
16	12	1	
17	13	2	
18	14	3	
19	15	4	
20	16	5	
21	17	6	
22	18	7	
23	19	8	
24	20	9	
25	21	10	
26			
27			

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+1)}{\sqrt[4]{x^2-2x-3}}, & \text{если} \quad x<-1\\ e^{\frac{-x^2}{\sqrt{2\pi}}}, & \text{если} \quad -1\le x\le 3\\ \dfrac{\ln(x-3)^2}{(x-3)^{\frac{3}{7}}}, & \text{если} \quad x>3\end{cases}$$

Рис. 2.1.

Для записи ***первой ветви*** данной функции, следует использовать функцию **ЕСЛИ.**

Для этого необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Выделить ячейку **C5**. Щелкнуть на кнопке  (Вставить функцию). В секции **Категории** Мастера функций выбрать **Логические**. В секции **Выберите функцию** выбрать функцию **ЕСЛИ**.

В окне функции **ЕСЛИ** в секции **Лог_выражение** следует записать выражение **B5<-1** (рис. 2.2).

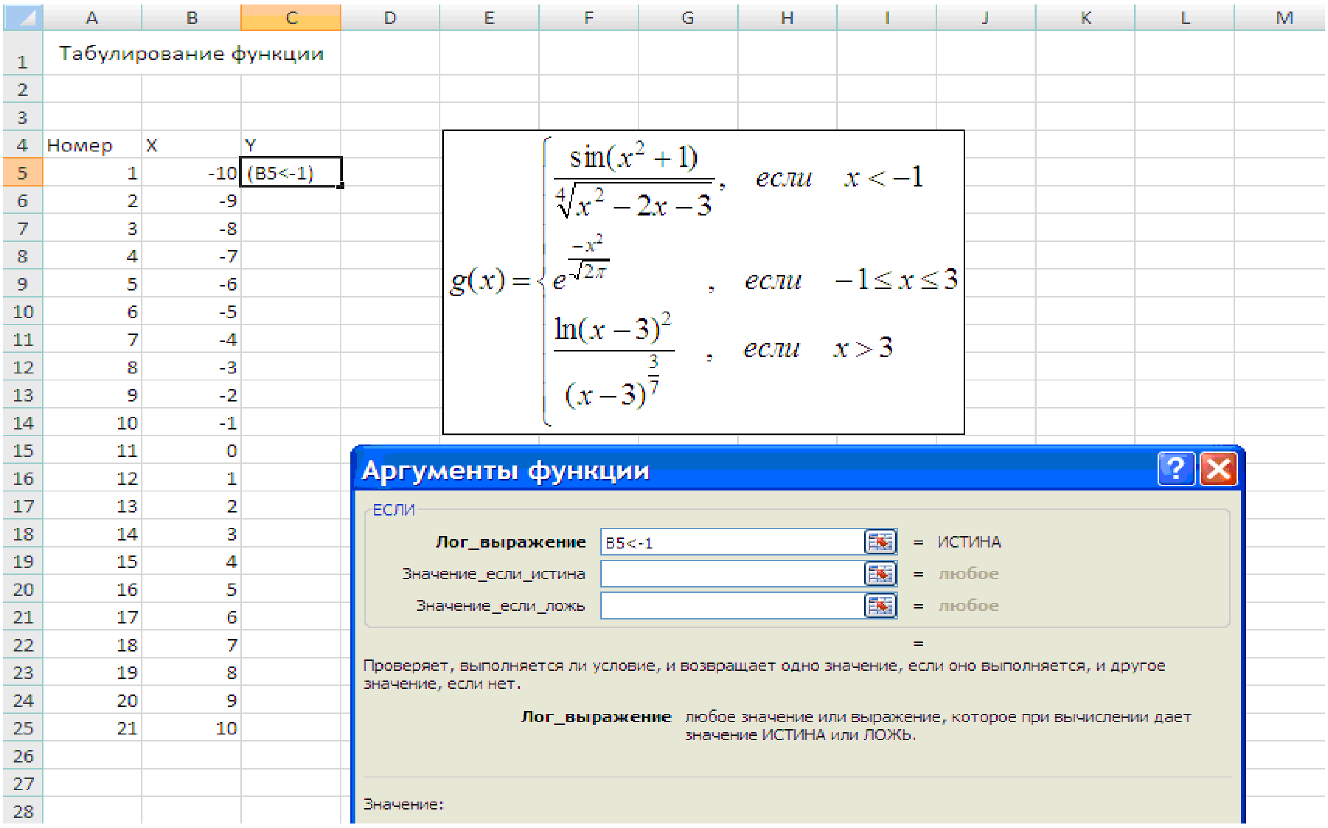


Рис. 2.2

Для возведения в целую степень можно использоваться символом ^. Например, $\mathbf{X^2}$ записывается как **X^2**.

Для возведения в дробную степень следует использовать функцию **СТЕПЕНЬ.** Например, $X^{2/7}$ записывается с помощью функции **СТЕПЕНЬ**, у которой в строке ***Число*** X а в строке ***Степень*** 2/7.

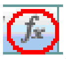
Выражение $\sqrt[4]{X}$ записывается как $X^{1/4}$.

2. Щекнуть левой кнопкой мыши в строку **Значение_если_истина,** а затем щелкнуть на кнопке **Выбор функции** на панели **“Строка формул”**.

Выбрать функцию **SIN**. Откроется окно **Аргументы функции**. В строке ***Число*** записать выражение **(B5^2+1)**, нажать <*OK*>. Окно **Аргументы функции** будет закрыто.

Для вызова окна щелкнуть левой кнопкой мыши **Строке формул** на имени функции **ЕСЛИ**, а затем на кнопке **Выбор функции.** Поставить знак / и вызвать функцию **СТЕПЕНЬ**, у которой в строке ***Число*** записать выражение **(B5^2 - 2*B5 - 3)**, а в строке ***Степень*** 1/4. На рис. 2.3 окно Аргументы функции после того, как добавлены функции **SIN** и **СТЕПЕНЬ.**

После нажатия кнопки <*OK*>, в ячейке **C5** будет значение **0,137441**.

Чтобы восстановить окно (рис. 2.3) для дальнейшей записи в него функций, щелкнуть левой кнопкой мыши **Строке формул** на имени функции **ЕСЛИ**, а затем на кнопке **Вставить функцию** .

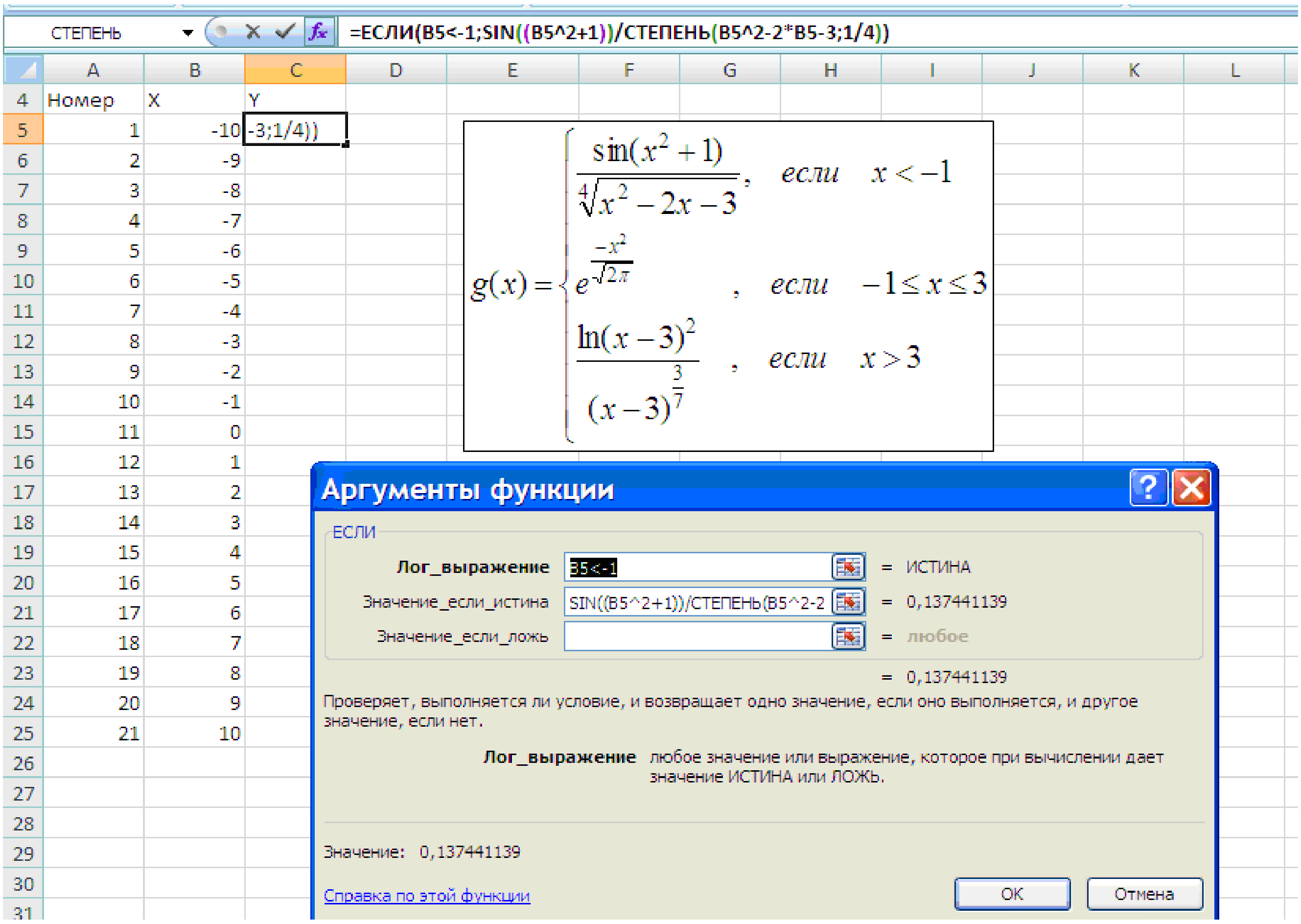


Рис. 2.3

3. Для записи ***второй и третьей ветвей*** данной функции, следует в строке **Значение_если_ложь** использовать функцию **ЕСЛИ,** т. к. предстоит выбор одной из двух функций. Для этого необходимо щелкнуть на кнопке **Выбор функции** и выбрать функцию **ЕСЛИ**. Открывается окно (рис. 2. 4).

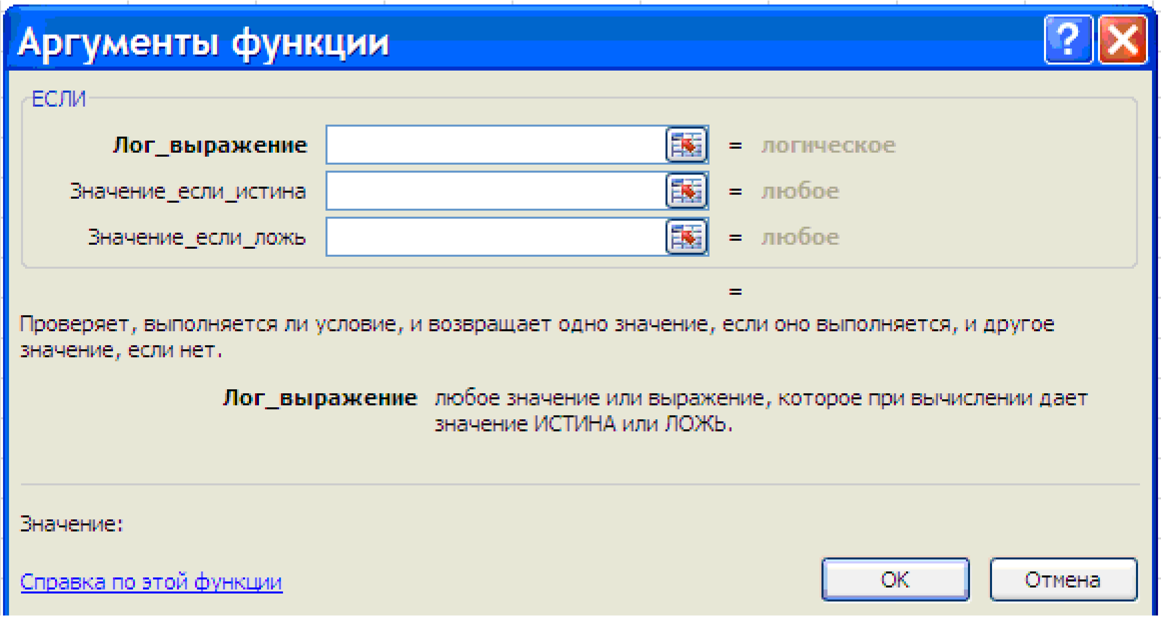


Рис. 2.4

В строку **Лог_выражение** (рис.2.5)следует ввести выражение

И(B5>=-1; B5<=3)

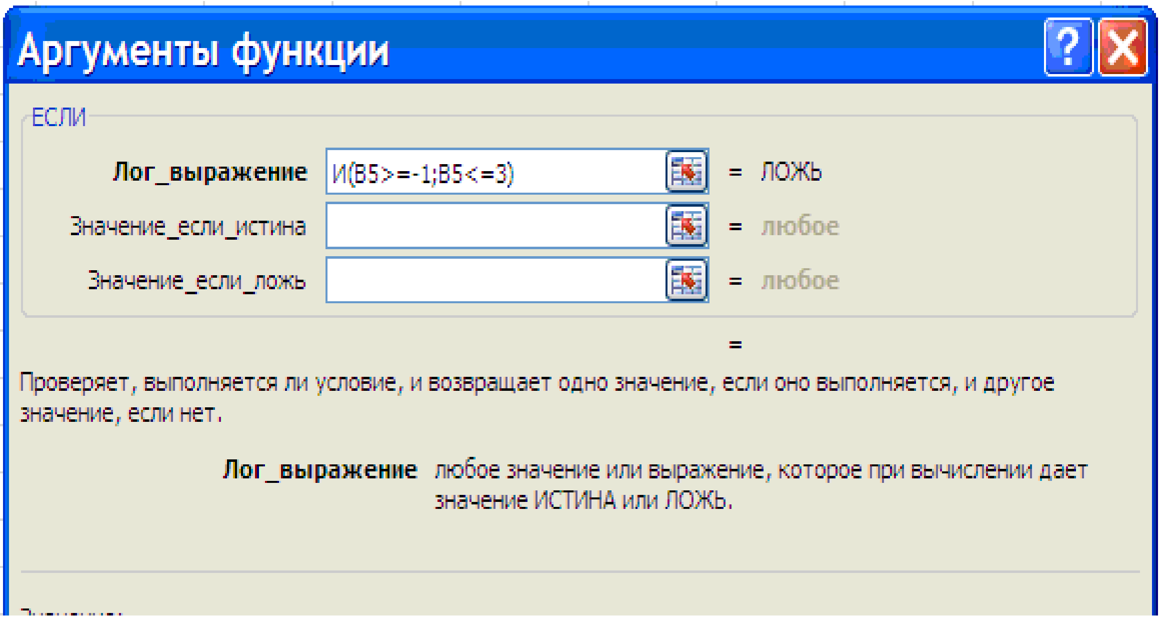
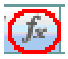


Рис. 2.5

В строку **Значение_если_истина** ввести формулу $e^{\frac{-x^2}{\sqrt{2\pi}}}$. Для этого щелкнув на кнопке **Выбор формулы**, выбираем функцию **EXP** и в строку число вводим выражение:

–(B5^2) Скобки обязательны!!!

Чтобы восстановить окно функции **EXP** для дальнейшей записи в него функции **КОРЕНЬ**, щелкнуть левой кнопкой мыши **Строке формул** на имени функции **EXP**, а затем на кнопке **Вставить функцию** . Поставить знак / (рис. 2.6).

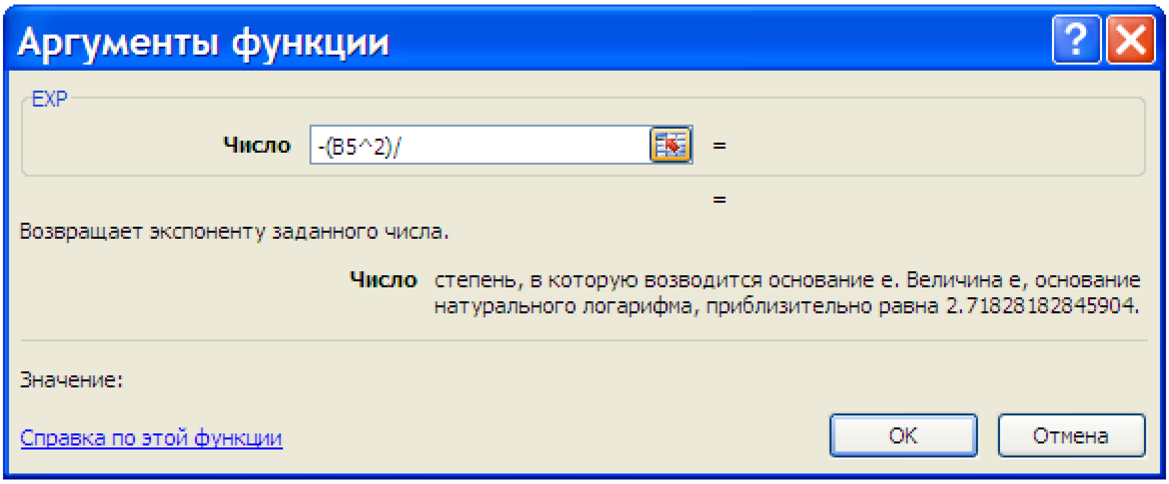


Рис. 2.6

Затем следует щелкнуть на кнопке ***Выбор функции*** и выбрать функцию **КОРЕНЬ**, в строку **Число** записать выражение 2* (рис. 2.7).

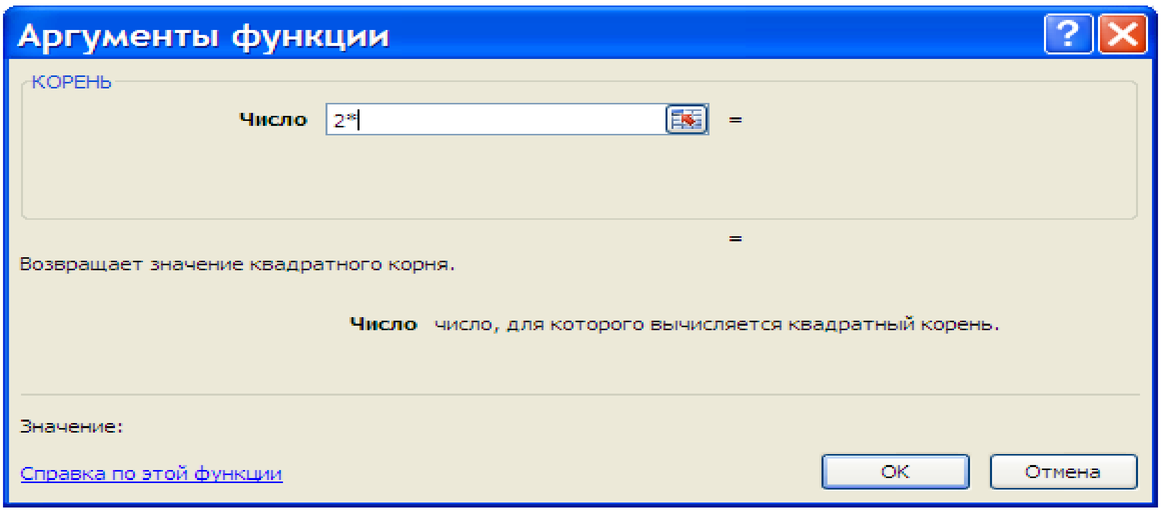


Рис. 2.7

Для ввода числа π щелкнуть на кнопке ***Выбор функции*** и выбрать функцию **ПИ()**. В открывшемся окне (рис. 2.8) нажать <*OK*>.

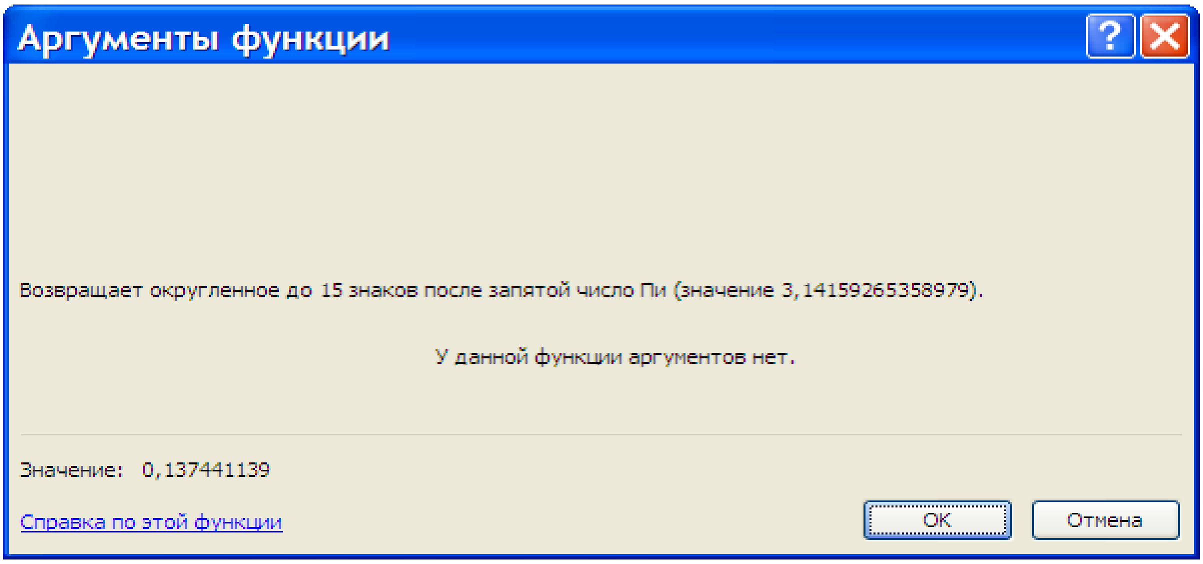
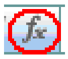


Рис. 2.8

Окно закроется. Чтобы восстановить окно для записи последней ветви формулы, необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши в **Строке формул** на последней функции **ЕСЛИ**, на а затем на кнопке  (Вставить функцию) (рис. 2.9).

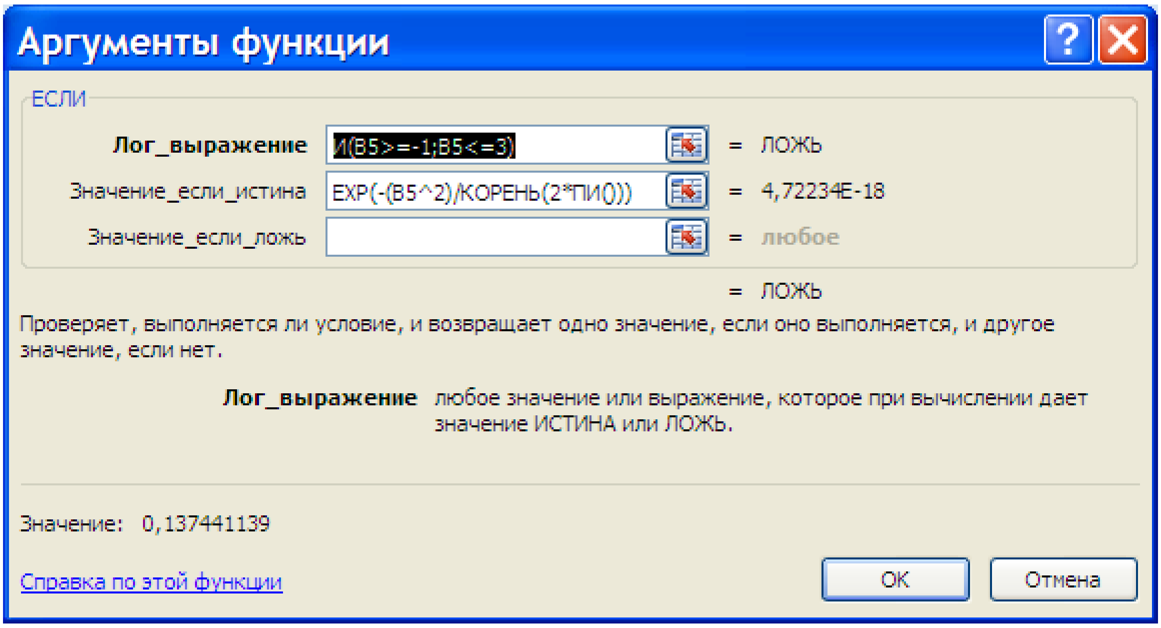


Рис. 2.9

В строку **Значение_если_ложь** ввести третью ветвь функции – формулу $\frac{\ln(x-3)^2}{(x-3)^{3/7}}$

На рис. 2.10 ввод числителя этой функции.

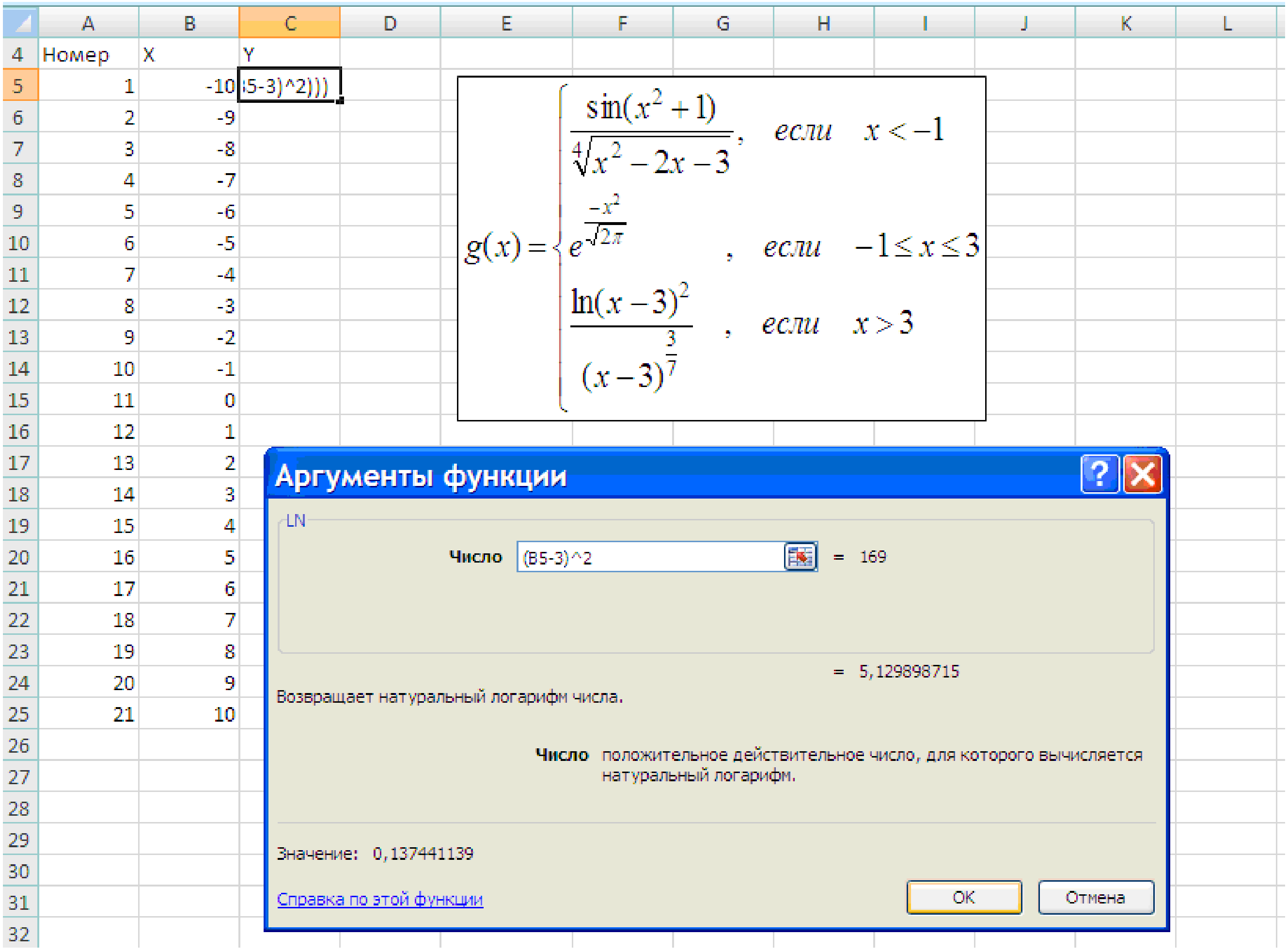


Рис. 2.10

После того как ввод формулы будет закончен в **С5** будет значение 0,137441. Скопировать **С5** в диапазон **С6:С25**. Построить график (рис. 2.11).

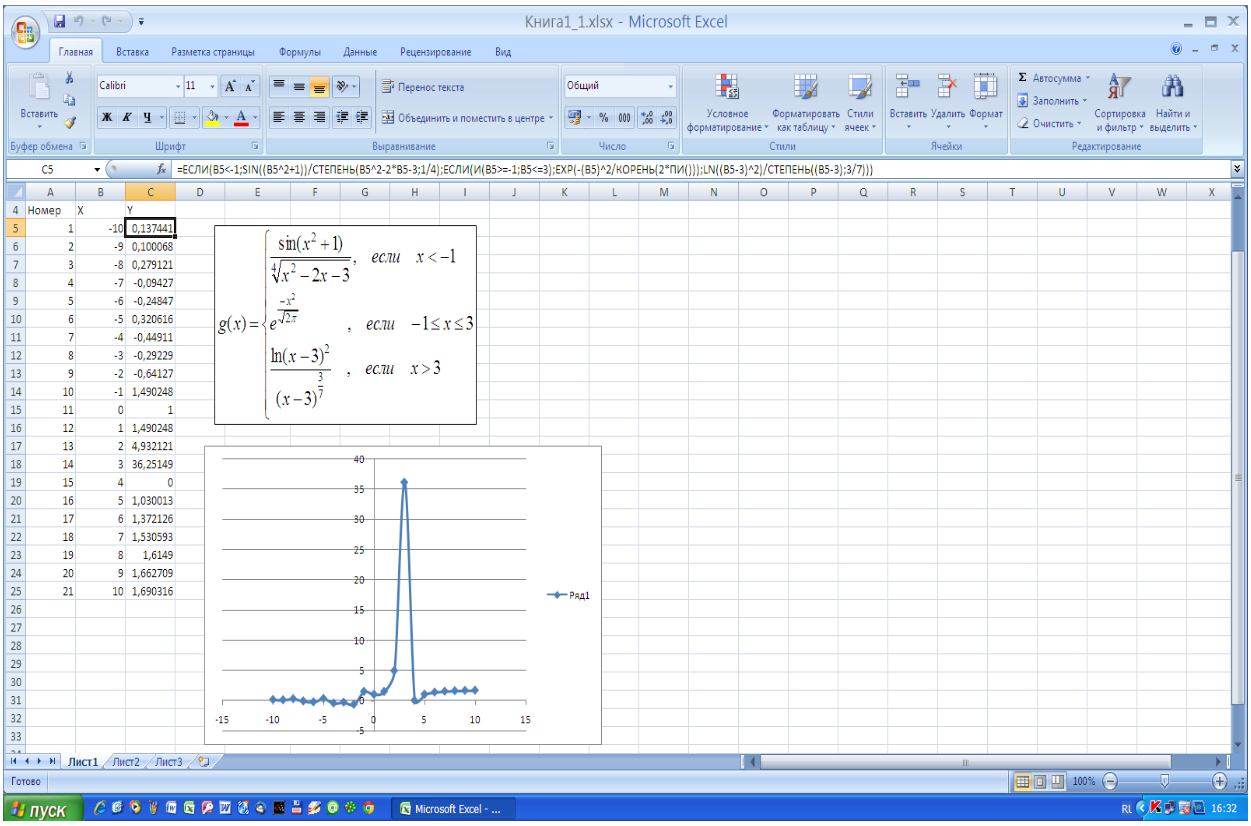


Рис. 2.11

2.2. Отделение корней уравнений

Методы решения алгебраических и трансцендентных (нелинейных) уравнений рассмотрим на примере уравнения $x^2 = \sqrt{x+4}$.

При использовании численных методов в качестве исходных данных необходимо указать отрезок, содержащий только один корень уравнения $y(x) = 0$. Поиск такого отрезка называется отделением корня уравнения. Его можно выполнить одним из двух способов:

- Графически;
- Аналитически.

2.2.1 Графический метод

Действительным корням уравнения $y\ (x) = 0$ соответствуют точки пересечения графика функции $y = y\ (x)$ с осью Ox.

Пример 2.2. Выполнить отделение корней уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ графическим методом.

Решение

Вычислим значение функции $x^2 - \sqrt{x+4}$ на некотором отрезке $[a,\ b]$ и найдем «соседние» точки, в которых функция $y = y(x)$ принимает значения разных знаков.

Для функции $x^2 - \sqrt{x+4}$ областью определения является полуинтервал [-4; +∞). Для вычислений выберем отрезок [-4;6] с шагом 1.

Для построения графика выбираем команду:

Вставка → секция **Диаграммы** → **Точечная** → **Точечная с гладкими кривыми** (рис. 2.12).

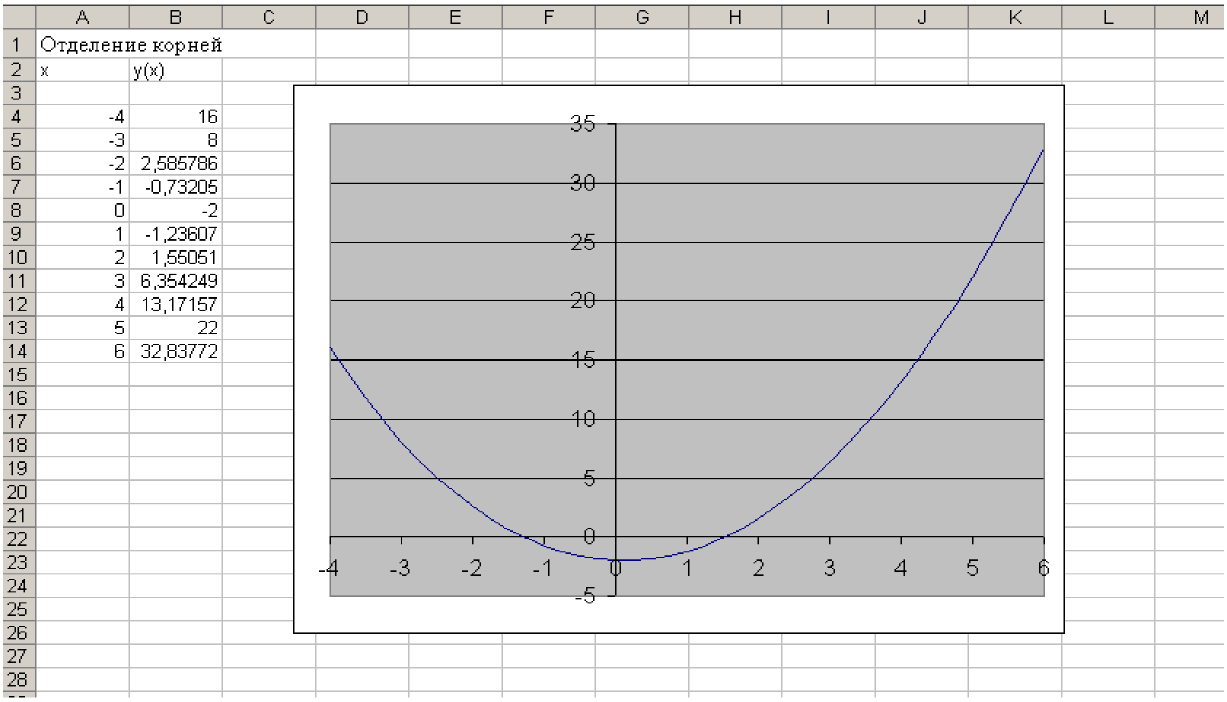


Рис. 2.12

Точки пресечения графика функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ с осью Ox находятся на отрезках [-2,-1] и [1,2].

2.2.2 Аналитический метод

В основу аналитического метода составляют теоремы математического анализа.

***Теорема* 1 (Теорема Больцано-Коши).** *Если функция* $y = y(x)$ *непрерывна на* *отрезке* и *на концах указанного отрезка принимает значения разных знаков, т.е.:*

$$y(a) \cdot y(b) < 0,$$

то на интервале (a;b) она хотя бы один раз обращается в нуль.

Теорема не дает ответа на вопрос о количестве корней уравнения $y(x) = 0$ на отрезке $[a;b]$, поэтому в дополнение к ней рассматривается теорема 2.

***Теорема* 2.** *Непрерывная монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция y = y(x) имеет и притом единственный нуль на отрезке* $[a;b]$ *тогда и только тогда, когда на концах указанного отрезка она принимает значения разных знаков.*

Таким образом, должны выполняться два условия:

1) $y(a) \cdot y(b) < 0$;
2) 2) $y'(x) > 0$
или $y'(x) < 0$ для любых $x\epsilon[a,b]$.

Условия 1-2 выполняются, когда функция на концах отрезка $[a;b]$ принимает значения разных знаков и является монотонно возрастающей или монотонно убывающей на этом отрезке.

Пример 2.3. Выполнить отделение корней уравнения $x^2 = \sqrt{x+4}$ аналитическим методом.

Решение

1. Выбираем отрезок из области определения функции $x^2 - \sqrt{x+4}$, например, [-4;6], на котором будем вычислять значение фукции с некоторым шагом. Значение шага возьмем равным 1.
2. Введем исходные данные – ячейки **A7:C8** (рис. 2.13).

	A	B	C	D	E	F

5	Лабораторная работа №2 студента _______________, группы___________					
6	Исходные данные					
7	*a*	*b*	Шаг			
8	-4	6	1			
9						

Рис. 2.13.

3. В ячейку **B11** устанавливается ссылка на ячейку **A8** т.е. формула «=**A8»**, чтобы вычисления начались от начала отрезка (рис. 2.15).
4. В ячейку **B12** вводится формула, с помощью которой будет найдено следующее значение x, а в случае выхода за пределы отрезка – появится надпись «Стоп».

$$x = \begin{cases} x + h, & x \le x_{\text{кон}} \\ \text{Стоп}, & x > x_{\text{кон}} \end{cases}.$$

Создание формулы с использованием **Мастера функций** показано на рис. 2.14.

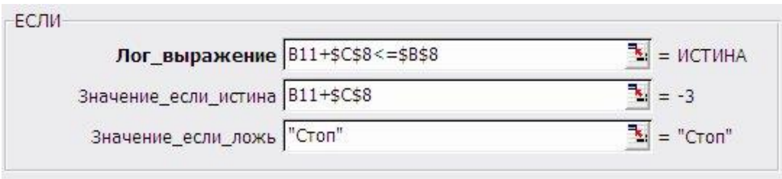


Рис. 2.14.

5. Полученная формула распространяется вниз после появления слова «Стоп». В формуле использована абсолютная ссылка на ячейку **C8**. (устанавливается с помощью клавиши F4).
6. В ячейку **C11** вводится формула вычисления функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ при значении аргумента x, записанном в ячейке **B11**, т.е. формула «=B11*B11-КОРЕНЬ(B11+4)».

Формула копируется в диапазон **C12:C21**.

7. Вводится формула в столбец с заголовком **«Комментарий»**. Здесь будут определяться отрезки, на концах которых функция принимает значения разных знаков: $y(x) \cdot y(x+h) < 0$.

   Так как для проверки данного условия требуется два значения y, то формула вводится на строку ниже, в ячейку **D12**, и распространяется вниз. Т.е. в ячейку **D12** записывается формула

«=ЕСЛИ(C11*C12<=0;"Корень на отрезке " &B11&".."&B12;"----")».

Амперсанд «**&**», который позволяет вывести в надписи «Корень на отрезке» значения x из соответствующего столбца.

8. В столбцах **E** и **F** записываются формулы вычисления значений первой и второй производных:

$$y' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{(x+4}},$$

$$y'' = 2 + \frac{1}{4\sqrt{(x+4)^3}} = 2 + \frac{1}{4}(x+4)^{-3/2}.$$

В точке x= - 4 не существуют ни первая, ни вторая производные, поэтому для данной функции формулы записываются, начиная с x= - 3. Т.е.

В **E12** записывается формула « = 2*B12- 1/(2*КОРЕНЬ(B12+4))».

В **F12** записывается формула «=2+1/4*(B12+4)^(-3/2)».

	A	B	C	D	E	F
10	№	x	y	Комментарий	y'	y''
11	1	-4	16,000			
12	2	-3	8,000	---	-6,500	2,250
13	3	-2	2,586	---	-4,354	2,088
14	4	-1	-0,732	Корень на отрезке -2..-1	-2,289	2,048
15	5	0	-2,000	---	-0,250	2,031
16	6	1	-1,236	---	1,776	2,022

17	7	2	1,551	Корень на отрезке 1..2	3,796	2,017
18	8	3	6,354	---	5,811	2,013
19	9	4	13,172	---	7,823	2,011
20	10	5	22,000	---	9,833	2,009
21	11	6	32,838	---	11,842	2,008
22		Стоп				

Рис. 2.15

В результате вычислений найден отрезок $[a,b]$=[1,2], который содержит один корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

Вычислены значения первой производной y'(x=1) = 1,776 и y'(x=2) = 3,796, проверено условие $y'(1)\cdot y'(2) > 0$, которое с некоторыми допущениями показывает, что отрезок $[a,b]$=[1,2] содержит единственный корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

На отрезке [1,2] функция y = $y(x)$ монотонно возрастает, т.е. $y'(x) > 0$ (рис. 2.15).

Второй отрезок $[a,b]$ = [-2,-1] также содержит единственный корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

2.3. Метод бисекции (метод деления отрезка пополам)

В пунктах 2.2.1-2.2.2 выполнено отделение корней уравнения $y(x) = 0$. Пусть $[a,b]$ – один из полученных отрезков, содержащих только один корень данного уравнения. Тогда любую точку отрезка $[a,b]$ можно принять за приближенное значение корня, при этом предельная абсолютная погрешность такого приближения определяется неравенством: $\Delta x^* \le |b - a|$.

Рассмотрим метод бисекции − один из методов уточнения корня.

Согласно этому методу, найденный отрезок $[a,b]$ делится пополам точкой $c = (a+b)/2$ (на рис. 2.16 – точка c_1) и далее рассматриваются два отрезка $[a,c]$ и $[c,b]$. Затем определяется, в каком из полученных отрезков находится корень уравнения. Если $y(a) \cdot y(c) < 0$, то корень на отрезоке $[a,c]$, если $y(c) \cdot y(b) < 0$, то корень на отрезоке $[c,b]$ и процесс деления повторяется.

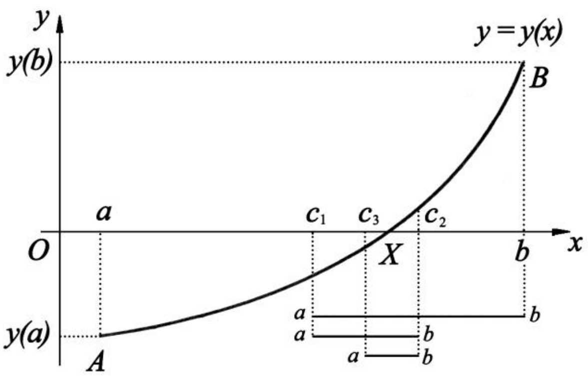


Рис. 2.16. Геометрическая интерпретация метода бисекции

В результате получим систему вложенных отрезков (рис. 2.16).

Корень считается найденным, когда длина отрезка станет меньше заданной погрешности, то есть $|b-a| < \varepsilon$. За *приближенное значение корня принимается середина последнего отрезка*.

Пример 2.4. Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод бисекции на отрезке [1;2].

Решение

На рабочий лист ввести исходные данные.

1. Отрезок $[a, b]$=[1, 2] и требуемую точность ε = 0,001 (**A8:C8**, рис. 2.17).
2. Заполнить диапазон **A10:H10** (рис. 2.17).
3. В диапазоне **A11:F40** установить числовой формат и 3 знака после запятой, а в диапазоне **G11:G40** − 4 знака после запятой.
4. В ячейку **A11** записать начало отрезка, т.е. ввести формулу « =A8».
5. В ячейку **B11** записать конец отрезка, т.е. ввести формулу « =B8».
6. В ячейке **C11** рассчитывается значение середины отрезка, т.е. в ячейку **C11** необходимо ввести формулу « =(A11+B11)/2».
7. В ячейке **D11** вычисляется значение функции в начале отрезка, т.е. в нее необходимо ввести формулу « =A11*A11 – КОРЕНЬ(A11+4)».

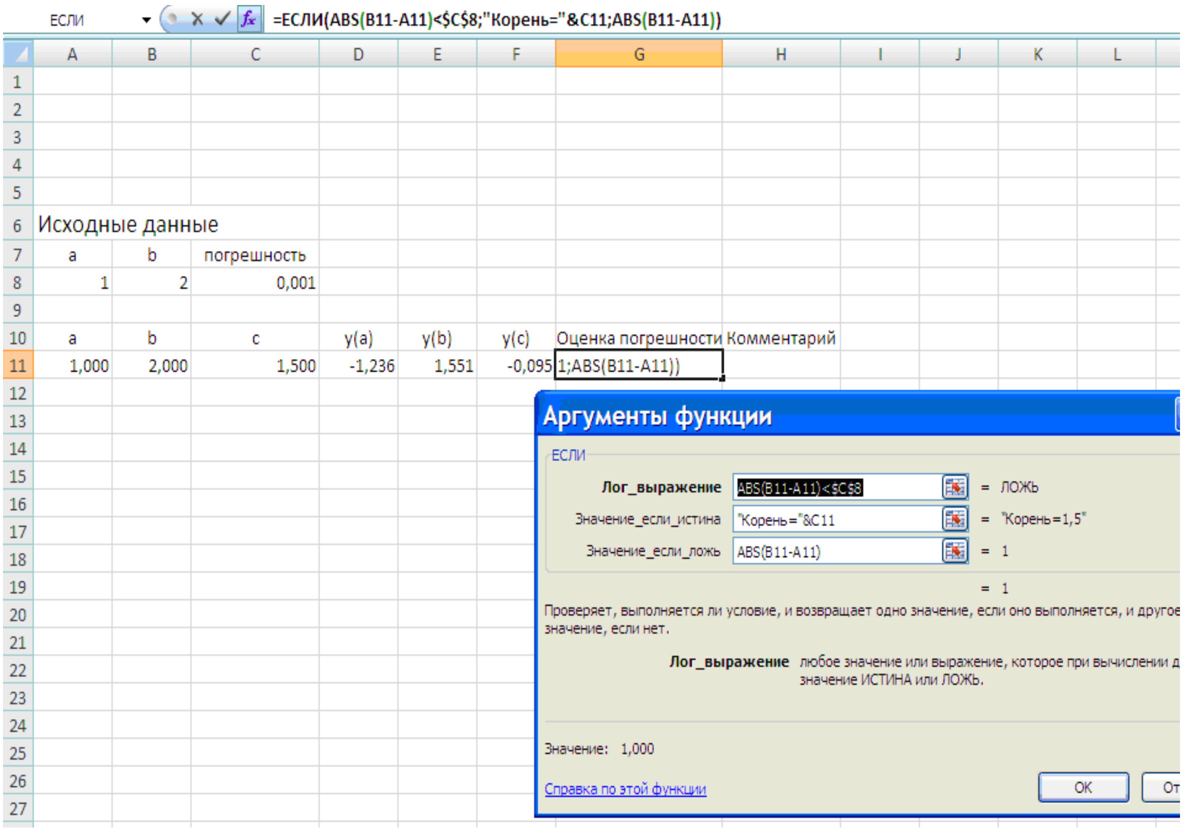


Рис. 2.17

8. В ячейке **E11** вычисляется значение функции в конце отрезка, т.е. в нее необходимо ввести формулу « =B11*B11 – КОРЕНЬ(B11+4)».

9. В ячейке **F11** вычисляется значение функции в середине отрезка, т.е. в нее необходимо ввести формулу « =C11*C11 – КОРЕНЬ(C11+4)».

10. В ячейке **G11** записывается формула оценки погрешности, с помощью которой проверяется выполнение условия $|b-a|<\varepsilon$. В том случае, есть последнее неравенство верно, то корень считается найденным и выдается ответ, иначе вычисляется значение $|b-a|$, т.е. в **G11** записывается формула с использованием функции ЕСЛИ (рис. 2.17)

=ЕСЛИ(ABS(B11-A11)<$C$8;"Корень="&C11;ABS(B11-A11))

11. В ячейку **H11** вводится комментарий, выдающий сообщение об ошибочности начальных данных (рис. 2.18).

=ЕСЛИ(D11*E11>0;"Корни не определены";" ")

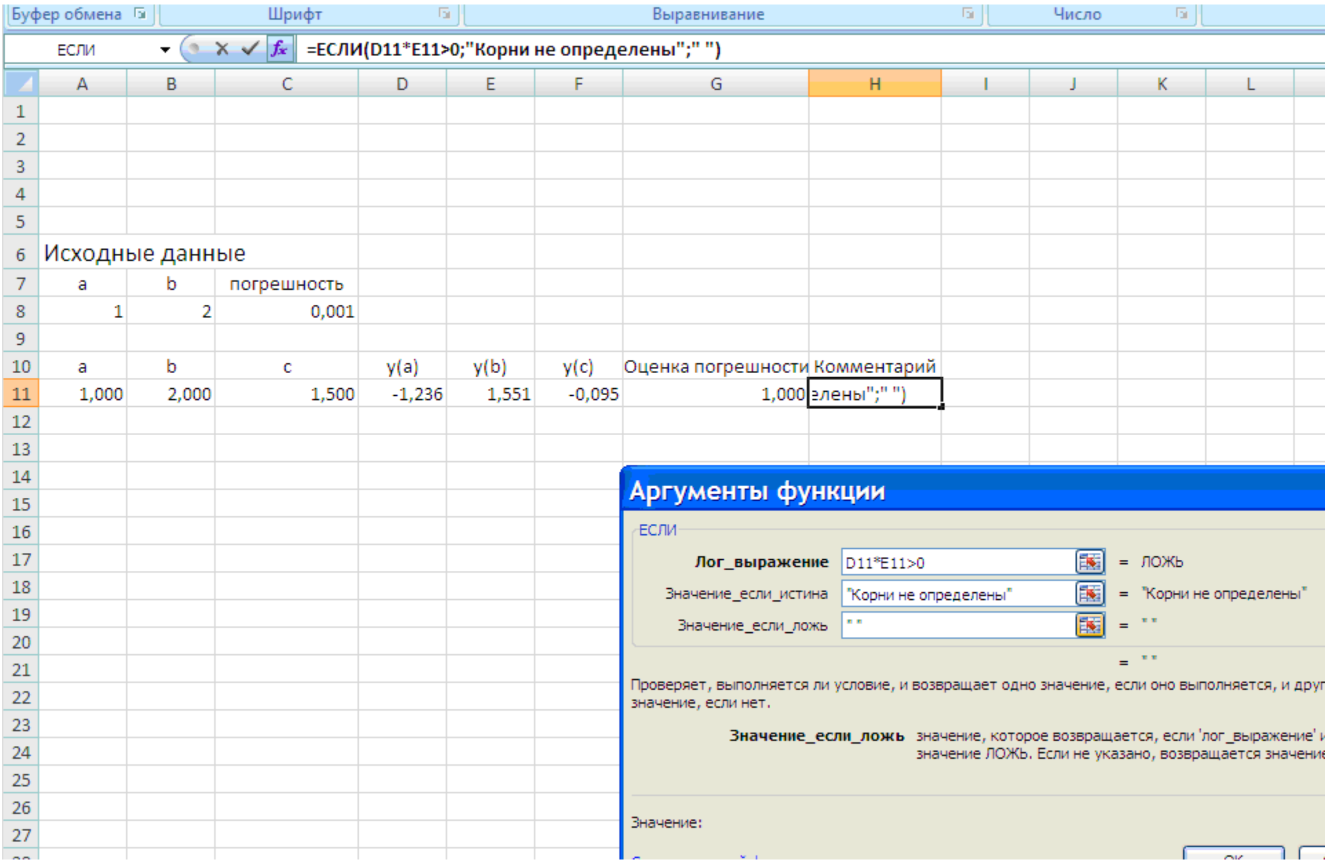


Рис. 2.18

12. В ячейках **A12:B12** () из отрезков [*a, c*] и [*c, b*] выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Полученный отрезок обозначается снова как [*a, b*].

В **A12** помещается формула « =ЕСЛИ(D11*F11<0;A11;C11) ».

В **B12** помещается формула «ЕСЛИ(E11*F11<0;B11;C11».

13. Скопировать ячейки **C11:H11** в **C12:H12**.

14. Выделить диапазон A12:H12 и протащить его по вертикали до появления в столбце сообщения « Корень….» (рис. 2.19).

G11 | f_x =ЕСЛИ(ABS(B11-A11)<$C$8;"Корень="&C11;ABS(B11-A11))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6	Исходные данные							
7	a	b	погрешность					
8	1	2	0,001					
9								
10	a	b	c	y(a)	y(b)	y(c)	Оценка погрешности	Комментарий
11	1,000	2,000	1,500	-1,236	1,551	-0,095	1,0000	
12	1,500	2,000	1,750	-0,095	1,551	0,665	0,5000	
13	1,500	1,750	1,625	-0,095	0,665	0,269	0,2500	
14	1,500	1,625	1,563	-0,095	0,269	0,083	0,1250	
15	1,500	1,563	1,531	-0,095	0,083	-0,007	0,0625	
16	1,531	1,563	1,547	-0,007	0,083	0,038	0,0313	
17	1,531	1,547	1,539	-0,007	0,038	0,015	0,0156	
18	1,531	1,539	1,535	-0,007	0,015	0,004	0,0078	
19	1,531	1,535	1,533	-0,007	0,004	-0,002	0,0039	
20	1,533	1,535	1,534	-0,002	0,004	0,001	0,0020	
21	1,533	1,534	1,534	-0,002	0,001	0,000	Корень=1,53369140625	
22								
23								
24								

Рис. 2.19

Пример 2.5. Ввести такие значения $[a,b]$, чтобы данный отрезок не содержал корней. Например [8, 10]. Убедится, что в ячейке **H12** появляется предупреждение «Корни не отделены». Вернуть $[a,b]$ в исходное состояние.

Пример 2.6. Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод бисекции на отрезке [-2;-1].

Ответ: x= –1,2837.

2.4. Метод хорд

В методе хорд отрезок, на котором находиться корень, делится на две части точкой c, которая находится по формуле

$$c = \frac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}.$$

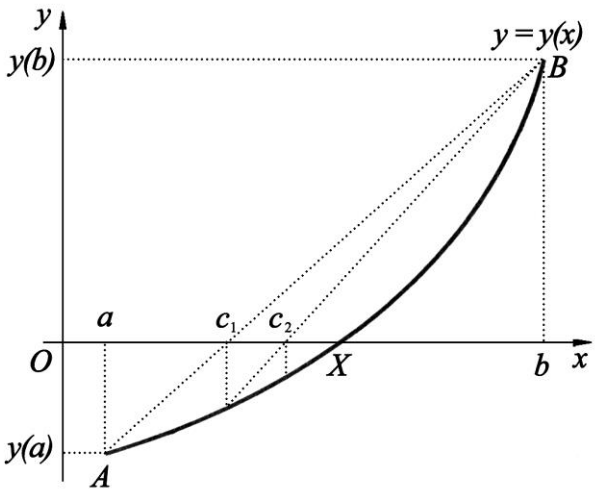


Рис. 2.20 Геометрическая интерпретация метода хорд

Геометрически, c - это точка пересечения хорды, проходящей через точки $A(a,\ y(a))$ и $B(b,\ y(b))$, с осью Ox (на рис. 2.20 — точка c_1).

Далее рассматриваются два отрезка: $[a,c]$ и $[c,b]$. В дальнейшем решении участвует тот из них, на концах которого функция $y(x)$ принимает значения разных знаков:

$y(a)\cdot y(c) < 0$ или $y(c)\cdot y(b) < 0$.

Полученный отрезок переобозначается как $a,\ b$ и снова находится c. В результате каждый новый отрезок будет все ближе к искомому корню. Корень будем считать найденным, когда выполнится условие $|c_{i+1} - c_i| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение c_{i+1}.

Обратите внимание на то, что при использовании метода хорд один из концов отрезка закреплен и используется на каждой итерации.

Пример 2.7. Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод хорд.

2.5. Метод Ньютона (касательных)

Данный метод, так же как метод бисекции и метод хорд, позволяет определить корень уравнения $y(x) = 0$ с заданной точностью ε.

Пусть $[a,b]$ — один из отрезков, содержащий только один корень уравнения $y(x) = 0$.

В качестве начального приближения к корню выберем $x_0 \in [a, b]$, для которого выполняется условие $y(x_0) \cdot y''(x_0) > 0$. Как правило, в качестве x_0 выбирают $x_0 = a$ или $x_0 = b$, т.е. левый или правый конец отрезка.

Следующее приближение x_1 находится по формуле Ньютона $x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}$. Общая формула метода имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y(x_k)}{y'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots .$$

Каждое следующее приближение x_{k+1} будет расположено все ближе и ближе к точке, соответствующей искомому корню.

Вычисления прекращаются тогда, когда для найденного значения x_{k+1}выполняется условие $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение x_{k+1}.

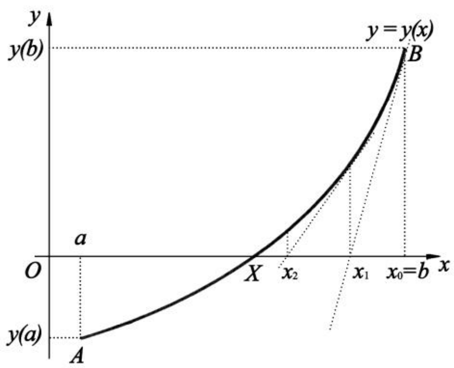


Рис. 2.21. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

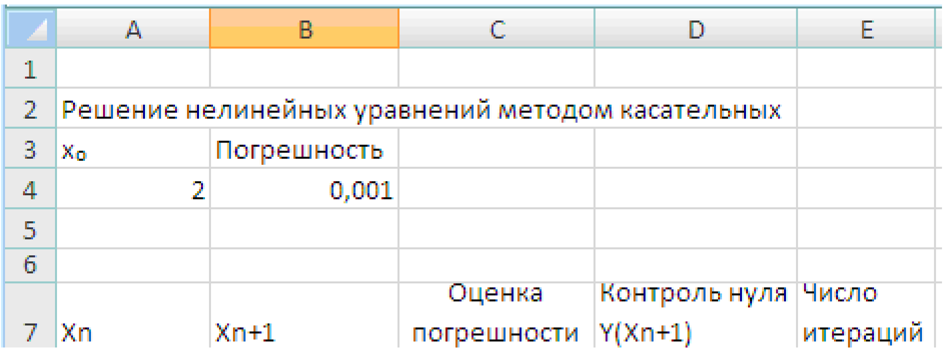
Геометрическая интерпретация метода (рис. 2.21) заключается в следующем: задается начальное приближение x_0, после чего строится касательная к функции $y = y(x)$ в точке x_0. Следующее приближение x_1 — это точка пересечения касательной с осью абсцисс. Далее строится новая касательная и получается приближение x_2, и т.д.

Пример 2.9. Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод касательных.

Решение

Был найден отрезок [a,b]=[1,2], на котором находится корень уравнения. Проверим выполнение условия $y(x_0) \cdot y''(x_0) > 0$ для левого и правого концов данного отрезка, т.е. для a=1, b=2. Значения функции и второй производной в указанных точках нам уже известны: y(x=1) = -1,236; y''(x=1) = 2,022; y(x=2)=1,551; y''(x=2) = 2,017. Как видим, $y(1) \cdot y''(1) < 0$, а $y(2) \cdot y''(2) > 0$.

Таким образом, условие метода выполняется для правого конца отрезка, а, значит, в качестве начального приближения к решению выберем x_0=2.



	A	B	C	D	E
1					
2	Решение нелинейных уравнений методом касательных				
3	x₀	Погрешность			
4	2	0,001			
5					
6					
7	Xn	Xn+1	Оценка погрешности	Контроль нуля Y(Xn+1)	Число итераций

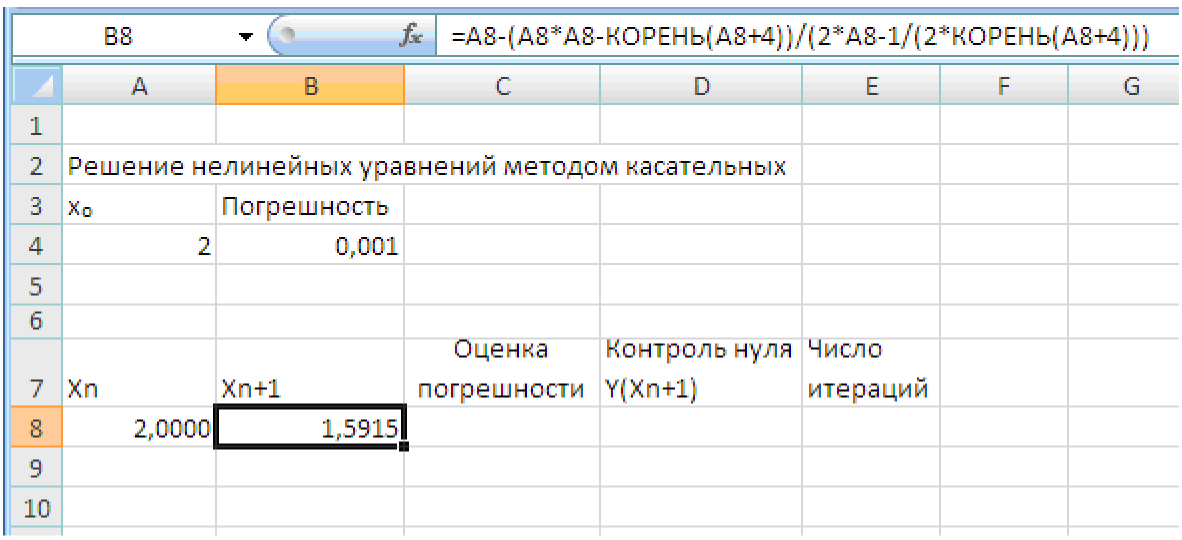
Рис. 2.22

В диапазон **A2:E7** ввести исходные данные как на рис. 2.22.

В диапазоне ячеек **A8:D2** установить числовой формат с 4 знаками после запятой.

В ячейку **A8** установить ссылку на ячейку **A4**, т.е. ввести формулу «=**A4**»

В ячейку **B8** ввести формулу метода касательных $x_1 = x_0 - \frac{x_0^2-\sqrt{x_0+4}}{2x_0-1/(2\sqrt{x_0+4})}$, т.е. «=A8-(A8*A8-КОРЕНЬ(A8+4)/(2*A8-1/(2*КОРЕНЬ(A8+4)))» (рис. 2.23).



B8 | fx | =A8-(A8*A8-КОРЕНЬ(A8+4))/(2*A8-1/(2*КОРЕНЬ(A8+4)))

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Решение нелинейных уравнений методом касательных						
3	x₀	Погрешность					
4	2	0,001					
5							
6							
7	Xn	Xn+1	Оценка погрешности	Контроль нуля Y(Xn+1)	Число итераций		
8	2,0000	1,5915					
9							
10							

Рис. 2.23

В ячейку **C8** ввести формулу для определения точности вычислений (рис. 2.24).

```
=ЕСЛИ(ABS(B8-A8)<$B$4;"Корень="&ОКРУГЛ(B8;4);ABS(B8-A8))
```

Функция ОКРУГЛ(_) округляет значение в ячейке до нужного количества десятичных разрядов.

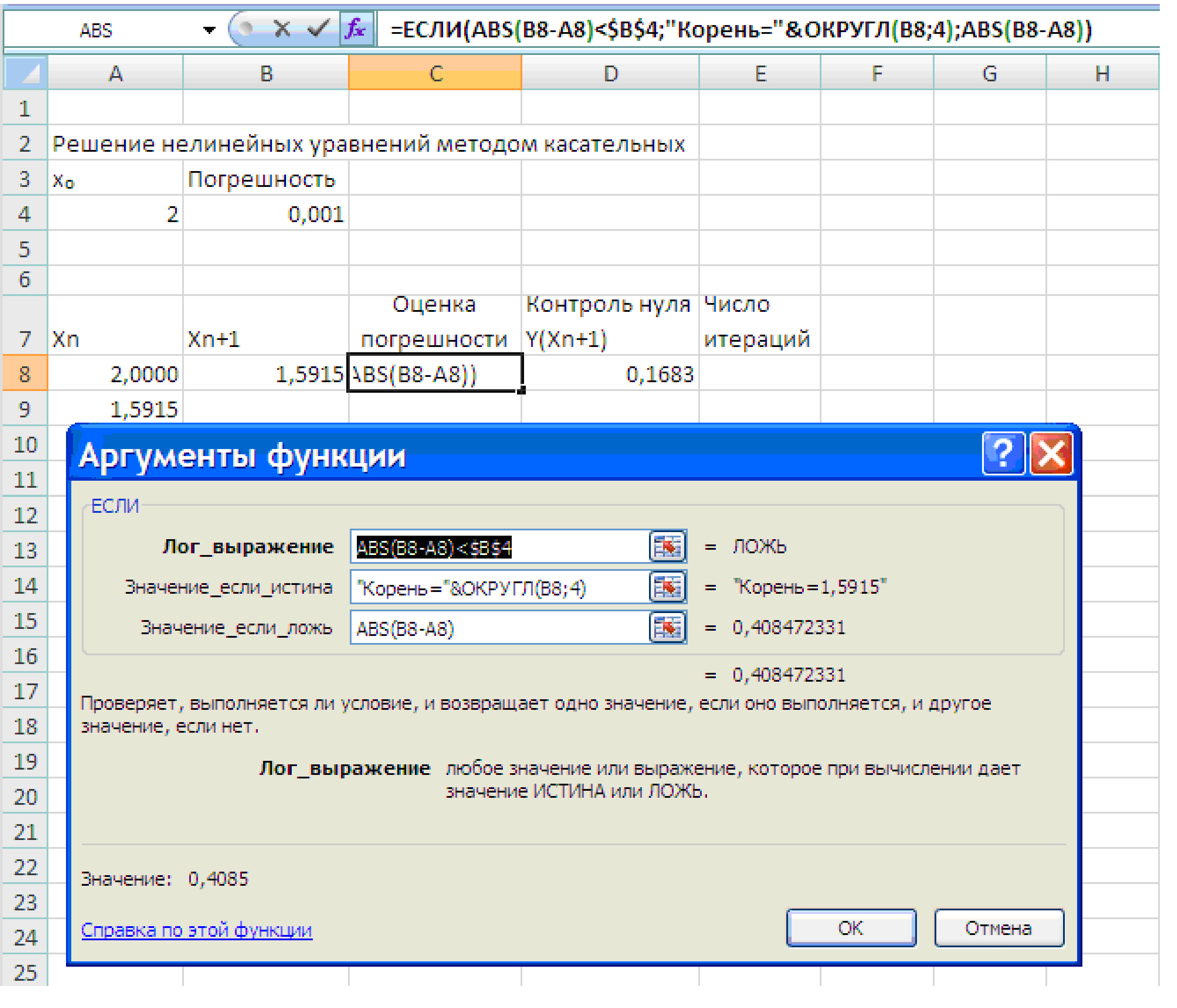


Рис. 2.24

В ячейке **D8** установить формулу для вычисления значения функции в найденной точке (контроль нуля) «=B8*B8-КОРЕНЬ(B8-4)».

В ячейке **A9** установить ссылку на найденное значение x_1, т.е. записать формулу «=B8».

Скопировать диапазон **B8:D8** в диапазон **B9:D9**.

Выделить диапазон **A9:E9** и протащить его по вертикали до появления в столбце **C** сообщения « Корень….» (рис. 2.25).

	A	B	C	D	E
1					
2	Решение нелинейных уравнений методом касательных				
3	x_0	Погрешность			
4	2	0,001			
5					
6					
7	Xn	Xn+1	Оценка погрешности	Контроль нуля Y(Xn+1)	Число итераций
8	2,0000	1,5915	0,4085	0,1683	1
9	1,5915	1,5349	0,0566	0,0032	2
10	1,5349	1,5338	0,0011	0,0000	3
11	1,5338	1,5338	Корень=1,5338	0,0000	4
12					

Рис. 2.25

Корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ находится в точке x=1,5338.

Пример 2.10. Найти второй корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ на отрезке [-2, -1] с точностью ε=0,001, используя метод касательных.

2.6. Комбинированный метод хорд и касательных

Комбинированный метод сочетает в себе принципы метода хорд и метода касательных, и позволяет решать нелинейные уравнения $y(x)$=0 с заданной точностью ε.

Приближение к искомому корню происходит одновременно с двух сторон отрезка, на котором отделен корень уравнения.

Следует учесть, что начальным приближением в методе касательных служит тот конец отрезка, для которого выполняется условие $y(x_0) \cdot y''(x_0) > 0$.

Пусть $y(a) \cdot y''(a) > 0$, тогда приближение по методу касательных будет происходить слева, а по методу хорд — справа. Итерационные формулы:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{y(a_k)}{y'(a_k)}, \quad b_{k+1} = \frac{a_k \cdot y(b_k) - b_k \cdot y(a_k)}{y(b_k) - y(a_k)}.$$

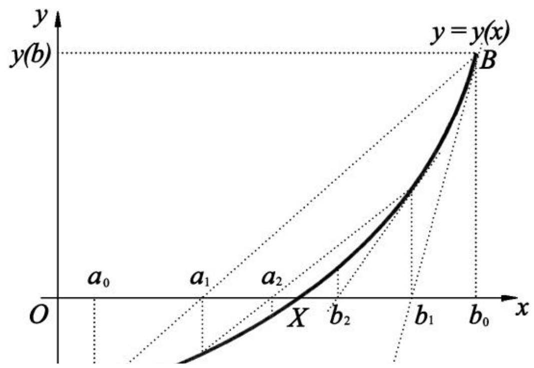


Рис. 2.26. Геометрическая интерпретация комбинированного метода хорд и касательных

Если же $y(b) \cdot y''(b) > 0$, то метод касательных применяется справа, а метод хорд — слева (рис. 2.26) и формулы запишутся наоборот:

$$b_{k+1} = b_k - \frac{y(b_k)}{y'(b_k)},$$

$$a_{k+1} = \frac{a_k \cdot y(b_k) - b_k \cdot y(a_k)}{y(b_k) - y(a_k)}.$$

Вычисления прекращаются тогда, когда для найденных значений выполняется условие $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается середина отрезка $[b_{k+1}, a_{k+1}]$.

В данном методе один из концов отрезка не является закрепленным. Для построения хорды используются значения приближений, полученные с помощью метода касательных на предыдущей итерации.

Пример 2.11. Найти решение уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, используя комбинированный метод хорд и касательных.

Решение

В параграфе 2.2 показано, что $y(-2)=2{,}586$, $y''(x=-2) = 2{,}088$. Таким образом, на отрезке [-2, -1] выполняется условие $y(a) \cdot y''(a) > 0$. Тогда новый отрезок $[a,b]$, находится по формулам $a_{k+1} = a_k - \frac{y(a_k)}{y'(a_k)}$ (ячейка **A9**) и .$b_{k+1} = \frac{a_k \cdot y(b_k) - b_k \cdot y(a_k)}{y(b_k) - y(a_k)}$ (ячейка **B9**).

1. В диапазоне ячеек **A8:F15** устанавливается числовой формат с тремя знаками после точки.

2. В ячейку **A8** записывается ссылка на ячейку **A4,** формула «=A4».
3. В ячейку **B8** записывается ссылка на ячейку **B4,** формула «=B4».
4. В ячейку **C8** вводится формула «=A8*A8-КОРЕНЬ(A8+4)».
5. В ячейку **D8** вводится формула «=B8*B8-КОРЕНЬ(B8+4)».
6. В ячейку **E8** вводится формула для вычисления производной функции в точке a_k«=2*A8-1/(КОРЕНЬ(A8+4))».
7. В ячейку **F8** вводится формула оценки погрешности:

=ЕСЛИ(ABS(A8-B8)<$C$4;"Корень"&ОКРУГЛ(B8;4);ABS(B8-A8))

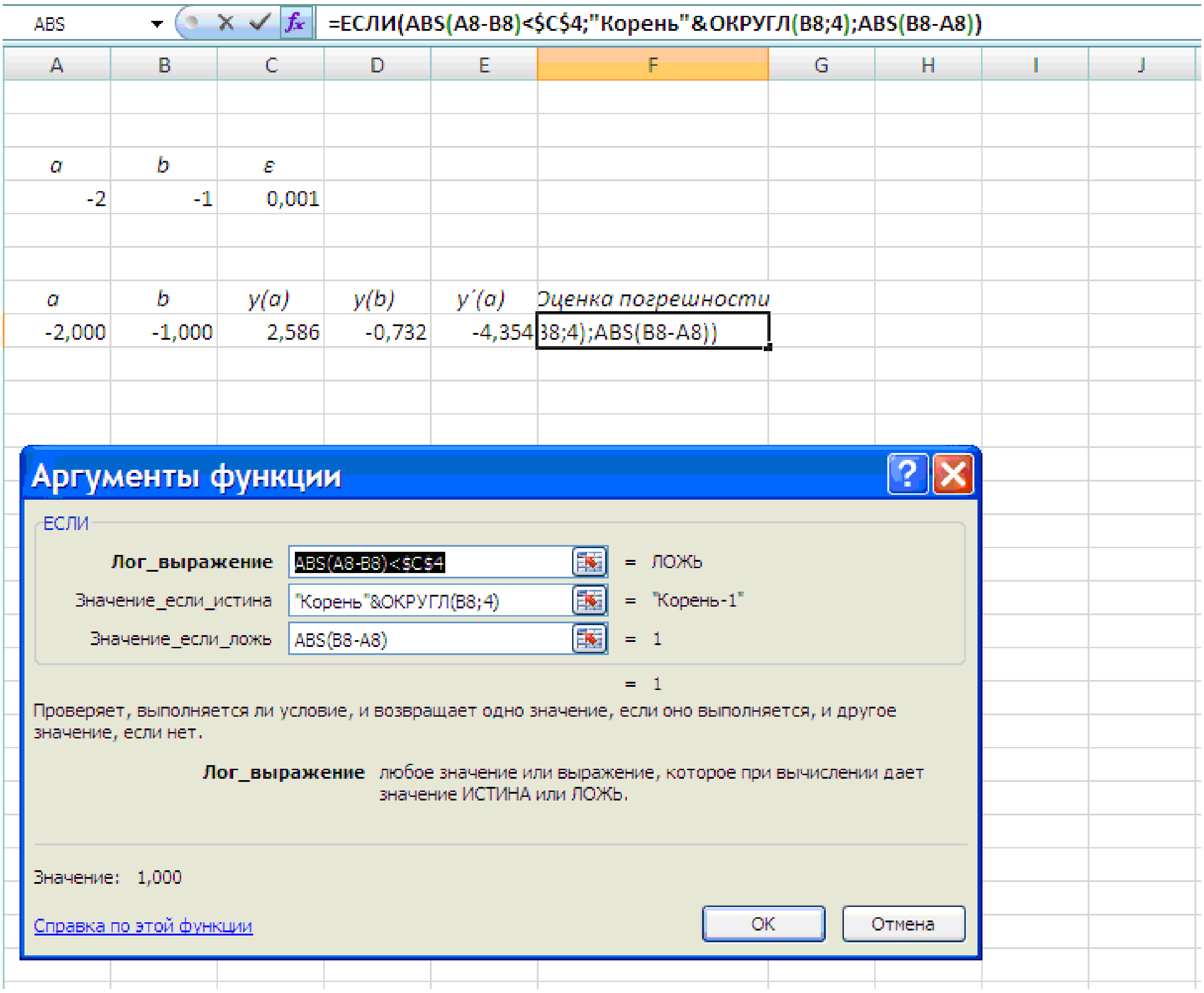


Рис. 2.27

8. В ячейку **A9** вводится формула $a_{k+1} = a_k - \dfrac{y(a_k)}{y'(a_k)}$, т.е. «=A8-C8/E8».

9. В ячейку **B9** вводится формула $b_{k+1}=\dfrac{a_k\cdot y(b_k)-b_k\cdot y(a_k)}{y(b_k)-y(a_k)}$, т.е. «=(A8*D8-B8*C8)/(D8-C8).

10. Скопировать диапазон **C8:F8** в диапазон **C9:F9**.

11. Выделить диапазон **A9:F9** и протащить его по вертикали до появления в столбце **F** сообщения « Корень….» (рис. 2.28).

F12 f_x

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	*a*	*b*	*ε*			
4	-2	-1	0,001			
5						
6						
7	*a*	*b*	*y(a)*	*y(b)*	*y´(a)*	*Оценка погрешности*
8	-2,000	-1,000	2,586	-0,732	-4,354	1,000
9	-1,406	-1,221	0,366	-0,177	-3,123	0,185
10	-1,289	-1,281	0,014	-0,008	-2,881	0,008
11	-1,284	-1,284	0,000	0,000	-2,871	Корень=-1,2838

Рис.2.28

При поиске корня уравнения $x^2-\sqrt{x+4}=0$ на отрезке [1, 2] (рис. 2.29) метод касательных применяется справа, начиная с точки b=2, так как $y(2)\cdot y''(2)=1{,}551\cdot 2{,}017>0$. В ячейки **A9** и **B9** записываются формулы

$$a_{k+1}=\frac{a_k\cdot y(b_k)-b_k\cdot y(a_k)}{y(b_k)-y(a_k)},$$

$$b_{k+1}=b_k-\frac{y(b_k)}{y'(b_k)}.$$

Выполнить самостоятельно.

	A	B	C	D	E	F
3	*a*	*b*	погрешность			
4	1	2	0.001			
5						
6						
7	*a*	*b*	*y(a)*	*y(b)*	*y'(b)*	Оценка погреш.
8	1	2	-1,236	1,551	3,796	1,000
9	1,444	1,592	-0,249	0,168	2,972	0,148
10	1,532	1,535	-0,005	0,003	2,857	0,003
11	1,534	1,534	0,000	0,000	2,855	корень=1,5338

Рис. 2.29

2.7. Метод итераций

Метод итераций, позволяет определить корень уравнения $y(x)$=0 с заданной точностью ε. Формула метода итераций имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k + c \cdot y(x_k).$$

В случае, если известен отрезок $[a,\ b]$, содержащий только один корень уравнения, за начальное приближение x_0 можно взять середину отрезка $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Важную роль в рассматриваемой формуле играет коэффициент c, который находится следующим образом:

$$c = \pm \frac{1}{\max_{[a,b]}|y'(x)|} = \pm \frac{1}{\max_{[a,b]}[|y'(a)|, |y'(b)|]}.$$

Знак перед дробью берется обратным к знаку производной.

Уточнение корня заканчивается при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение x_{k+1}.

Существует другой вариант применения метода итераций, который состоит в представлении уравнения $y(x)$=0 в виде x=$\varphi(x)$. В этом случае формула метода имеет вид

$$x_{k+1} = \varphi(x_k).$$

Итерации также продолжаются до выполнения условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Сложность последнего способа заключается в том, что на отрезке [a,b] функция $x = \varphi(x)$ должна удовлетворять условию $|\varphi'(x)| < 1$, тогда процесс итераций будет сходиться к корню уравнения $y(x)$=0.

Пример 2.12. Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод итераций.

Решение

Ввести исходные данные (рис. 2.30).

1. В диапазоне **A2:D15** установить числовой формат с 4 знаками после запятой.
2. В ячейках **C3** и **D3** ввести формулу вычисления первой производной функции $y(x)$ в точках a и b

$$y' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{(x+4)}}.$$

Т.е. в **C3** ввести формулу «=2*A3-1/(КОРЕНЬ(A3+4))», а
в **D3** ввести формулу «=2*B3-1/(КОРЕНЬ(B3+4))».

3. Используя функцию «МАКС» (категория «Статические»), в **E3** определить максимальную по модулю производную.
4. В **A6** ввести формулу расчета начального приближения x_0 «=(A3+B3)/2».
5. В **B6** ввести погрешность «0,001».
6. В **C6** ввести формулу для вычисления коэффициента «=ЕСЛИ(C3>0;-1/E3;1/E3)» (рис.2.30).
7. В **A10** ввести ссылку на **A6** «=A6».
8. **B10** набрать формулу метода итераций $= x_n + c \cdot (x_n^2 - \sqrt{x_n + 4})$, т.е. «=A6+$C$6*(A6*A6-КОРЕНЬ(A6+4))».

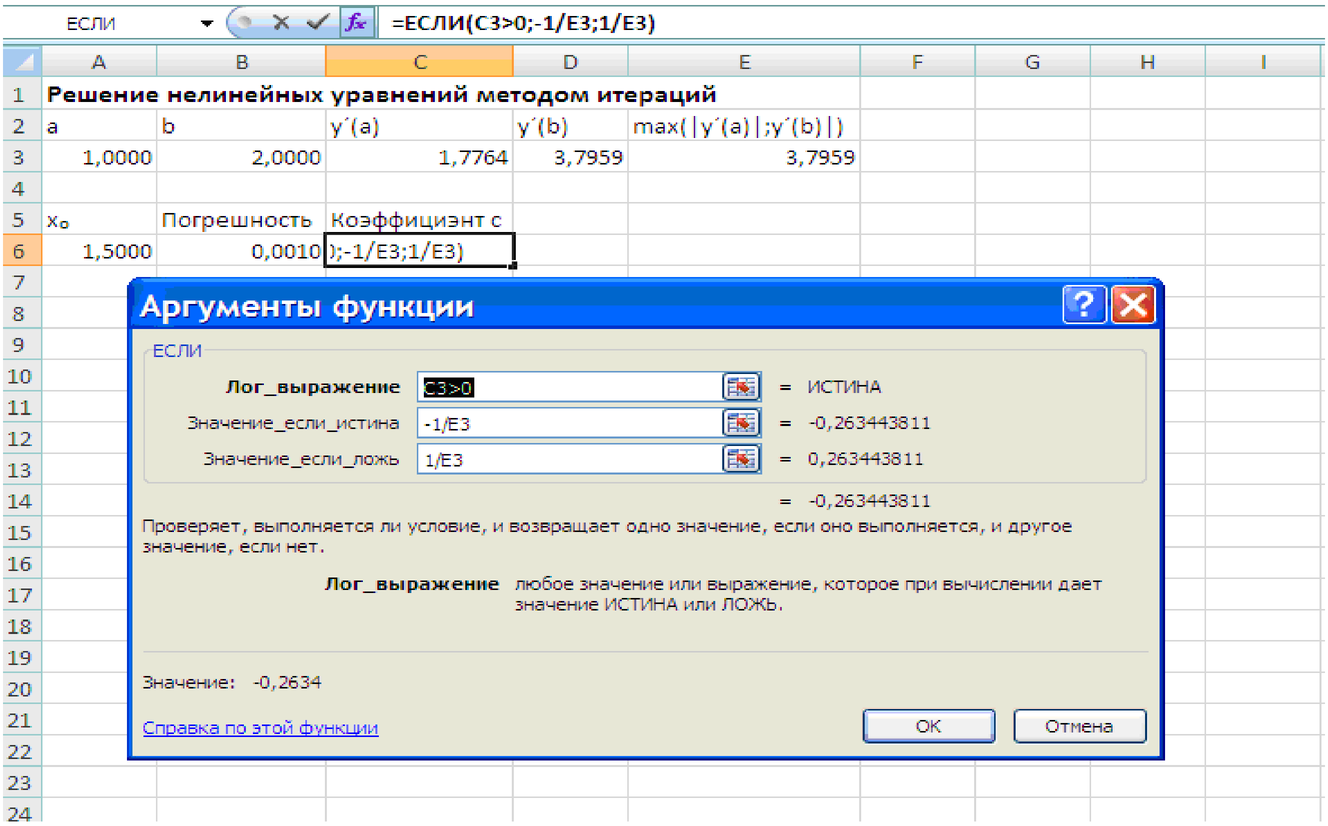


Рис. 2.30

9. В **C10** записать формулу вычисления погрешности (рис.2.31).

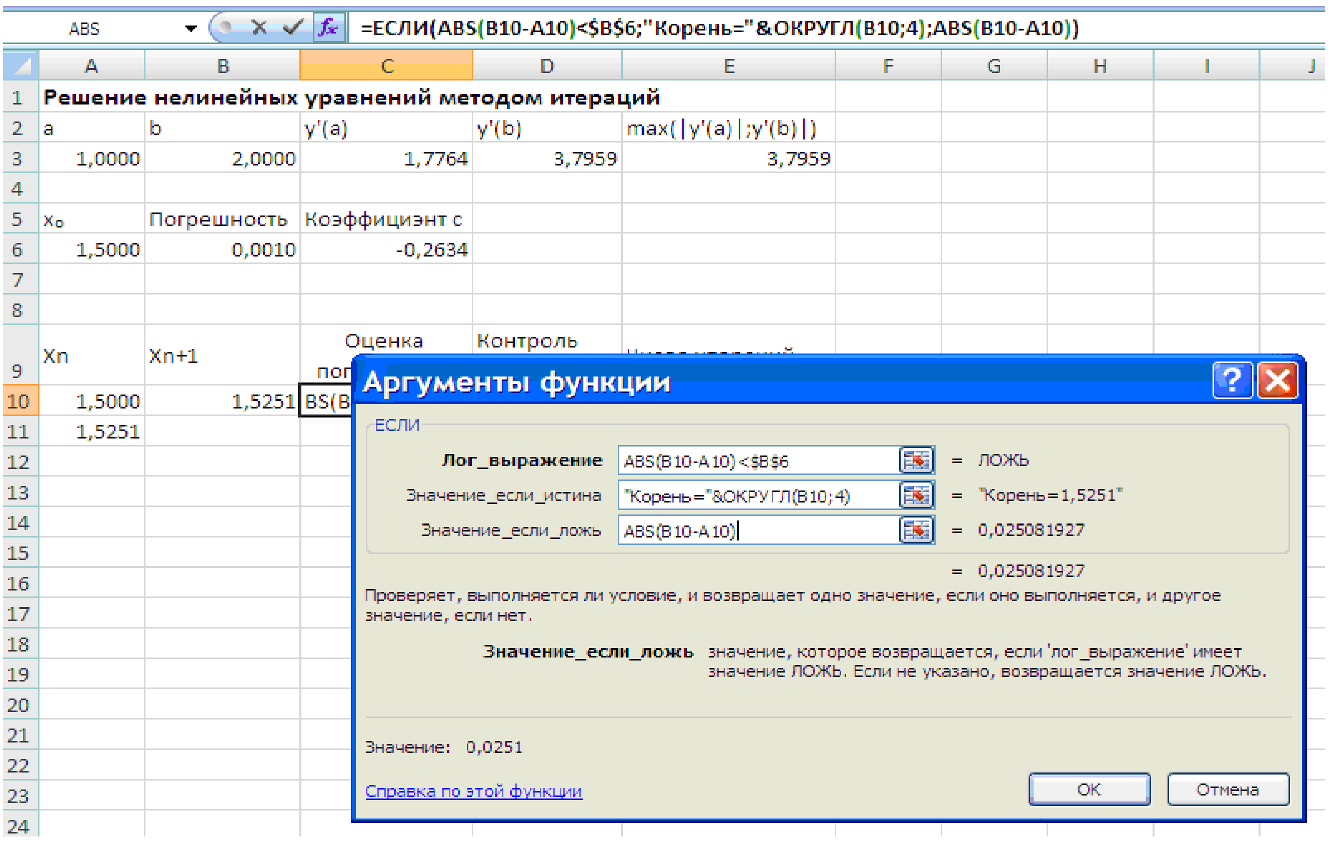


Рис. 2.31

10.В **D10** записать формулу контроля нуля

«=B10*B10-КОРЕНЬ(B10+4)».

11.В ячейке **A11** установить ссылку на ячейку **B10**.

12.Скопировать диапазон **B10:D10** в диапазон **B11:D11**.

13.Выделить диапазон **A11:E11** и протащить его по вертикали до появления в столбце **C** сообщения « Корень….» (рис. 2.32).

D10 f_x =B10*B10-КОРЕНЬ(B10+4)

	A	B	C	D	E
1	**Решение нелинейных уравнений методом итераций**				
2	a	b	y'(a)	y'(b)	max(|y'(a)|;y'(b)|)
3	1,0000	2,0000	1,7764	3,7959	3,7959
4					
5	x_0	Погрешность	Коэффициэнт с		
6	1,5000	0,0010	-0,2634		
7					
8					
9	Xn	Xn+1	Оценка погрешности	Контроль нуля Y(Xn+1)	Число итераций
10	1,5000	1,5251	0,0251	-0,0247	1
11	1,5251	1,5316	0,0065	-0,0062	2
12	1,5316	1,5332	0,0016	-0,0015	3
13	1,5332	1,5336	Корень=1,5336	-0,0004	4
14					
15					
16					
17					

Рис. 2.32

Пример 2.13. Найти второй корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ на отрезке [-2, -1] с точностью ε = 0,001 , используя метод итераций.

2.8. Команда Подбор параметра

Анализ «что-если» – процесс изменения содержимого некоторых ячеек и анализа влияния этих изменений на результат вычислений по формулам на Рабочем листе.

Подбор параметра позволяет путем подбора значений в некоторой ячейке получить нужный результат в зависимой ячейке (целевой ячейке).

На рис. 2.33 представлена последовательность действий для вызова команды *Подбор параметра*.

Вкладка **Данные** → *секция* **Работа с данными** → *кнопка* **Анализ “что если”**, → **Подбор параметра**.

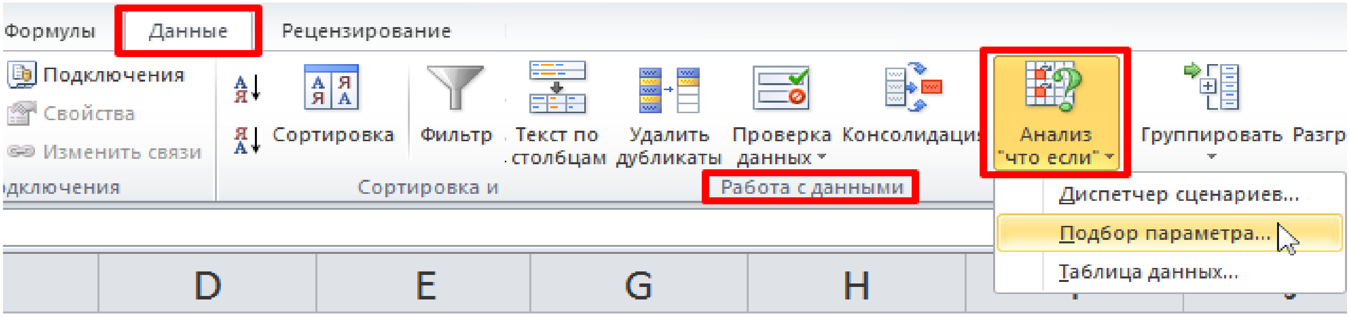


Рис. 2.33

2.8.1. Точность решений

Подбор параметра прекращает вычисления после 100 итераций или при получении результата с относительной погрешностью 0,001.

Чтобы изменить эти параметры, то нужно выбрать команду

Кнопка **Office** → *Кнопка* **Параметры Excel**

В открывшемся окне (рис. 2.34) изменить **Относительную погрешность.**

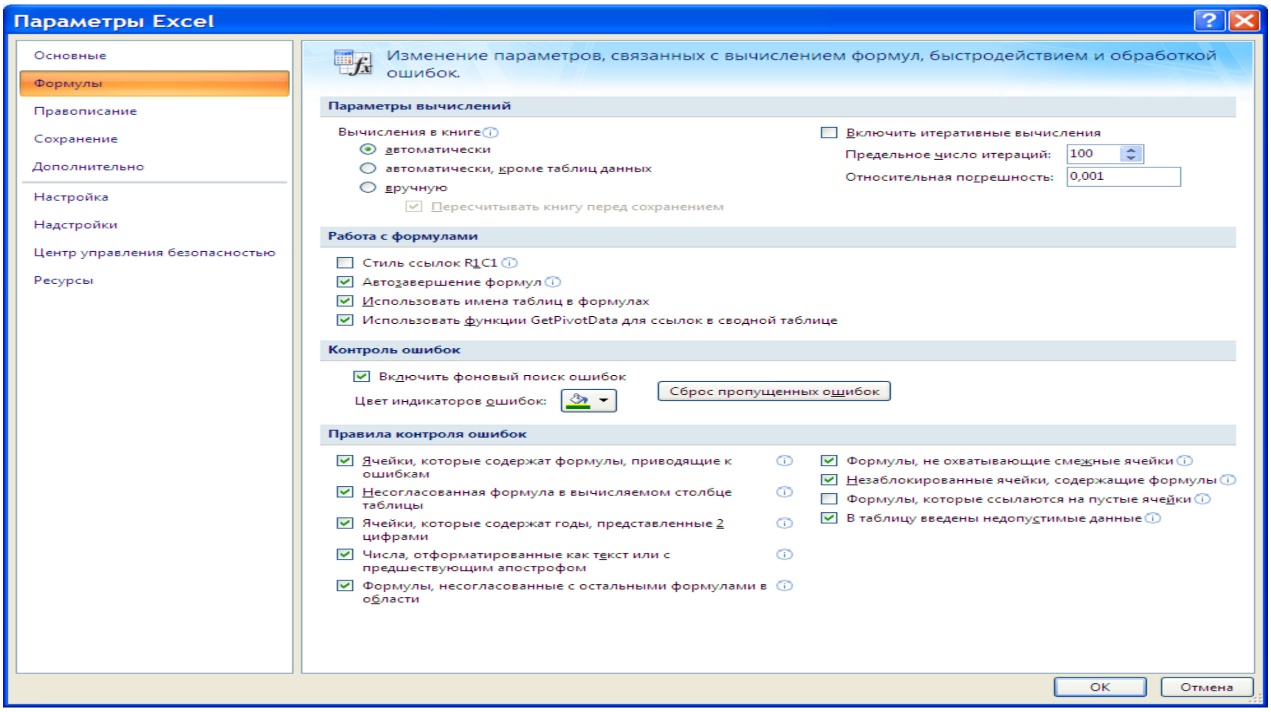


Рис. 2.34

2.8.2. Пример использования команды Подбор параметра

Пример 2.14. Решить уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

если известно, что $x \in [1.5;6]$.

Для решения задачи воспользуемся командой **Подбор параметра**.

В диапазон ячеек **B1:D1** введем и отформатируем заголовок **Подбор параметра**.

1. В **B3** записать текст «x», в ячейку **C3** текст «F(x)» (рис. 2.35).
2. В ячейку **B4** следует занести любое значение $x \in [1{,}5;6]$. Например, 2.
3. В ячейку **C4** следует записать формулу, представляющую левую часть уравнения. С учетом того, что значение *x* находиться в ячейке **B4** формула представится в виде.

=B4^2-4*B4+3

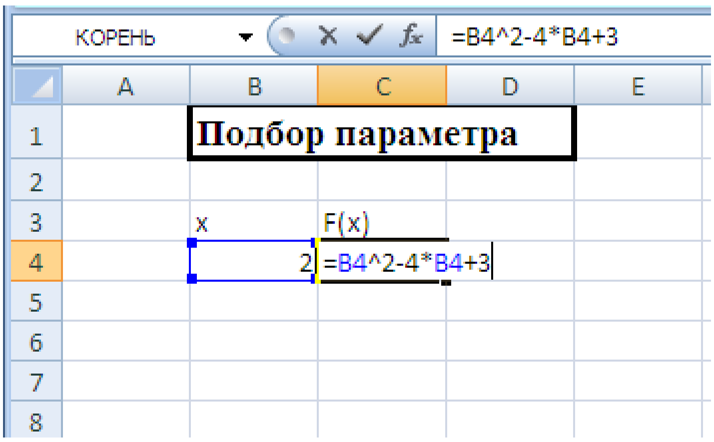


Рис. 2.35.

4. Выбрать команду:

Вкладка **Данные** → *секция* **Работа с данными** → *кнопка* **Анализ “что если”** → **Подбор параметра**.

Появится окно **Подбор параметра** (рис. 2.36).

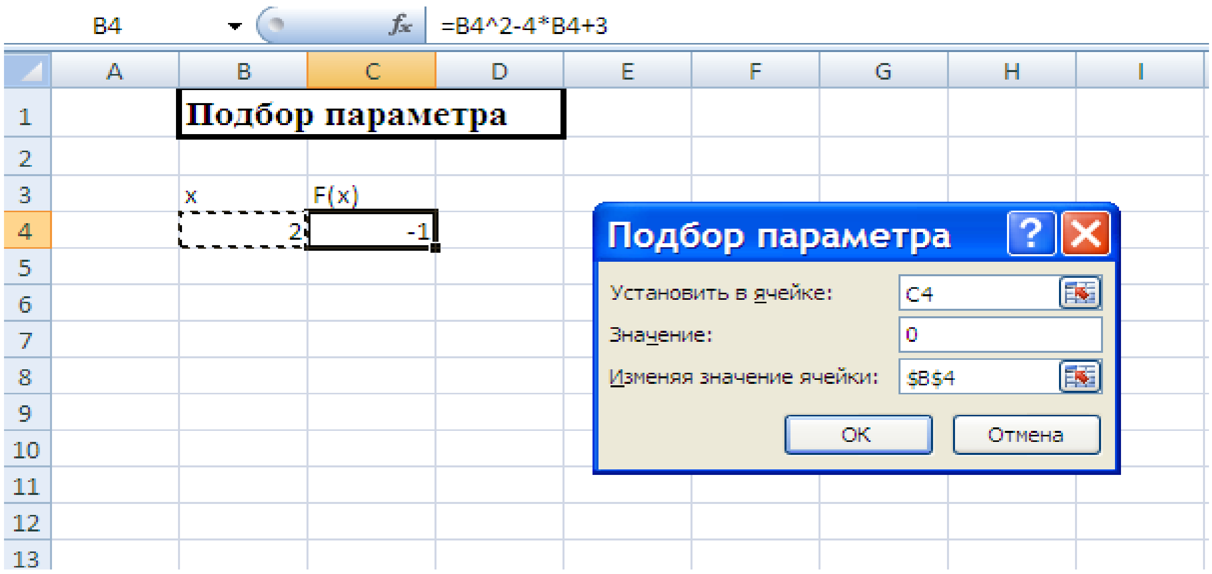


Рис. 2.36

5. В поле **Установить в ячейке**: указать ячейку **С4**, в которой записана формула.
6. В поле **Значение** указать число, стоящее в правой части уравнения, т.е. ноль.
7. В поле **Изменяя значение ячейки** указать ячейку **В4**, в которой занесено начальное значение переменной (рис. 2.36).
8. Щелкнуть <*OK*>. Посмотреть результат подбора, отображенный в диалоговом окне **Результат подбора параметра** (рис. 2.37).
9. Щелкнуть <*OK*>, чтобы сохранить решение (x=3.000371).

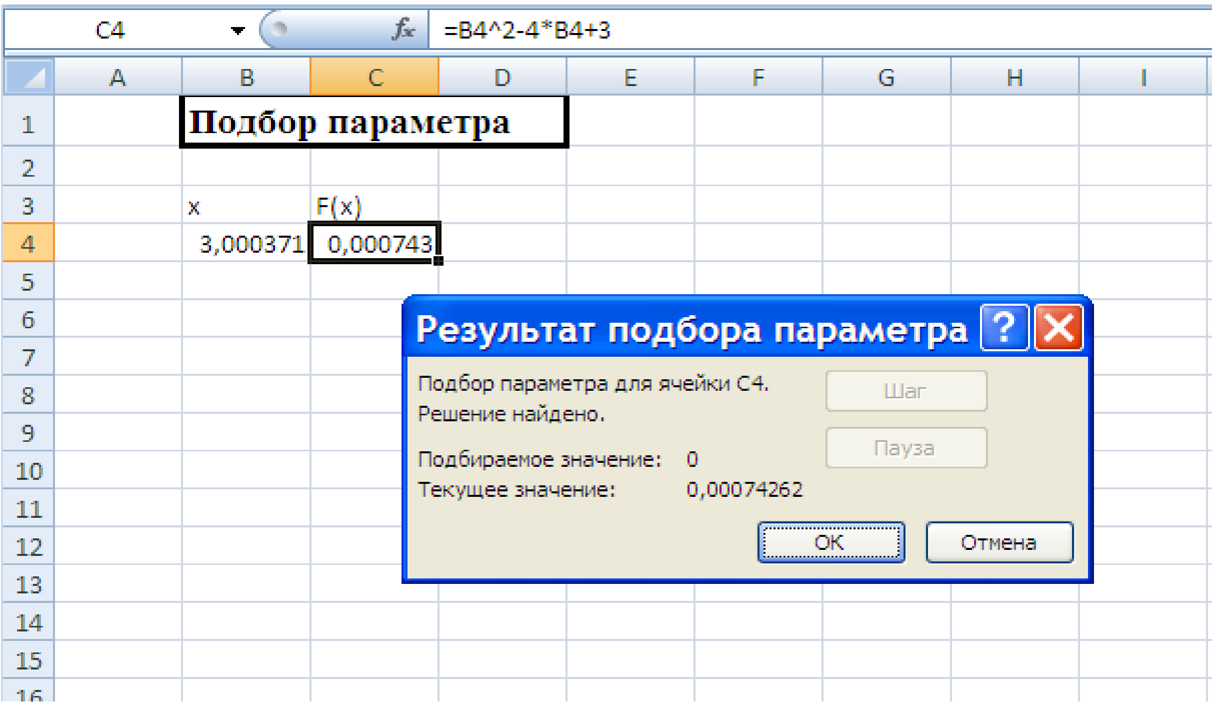


Рис. 2.37

10.Выполнить проверку результата для этого:

– В ячейку **C9** записано полученное значение *x*.

– В ячейку **E9** формула, представляющая левую часть уравнения (рис. 2.38).

Как видно из рис. 2.39 результат вычислен с точность до 4 знака после точки.

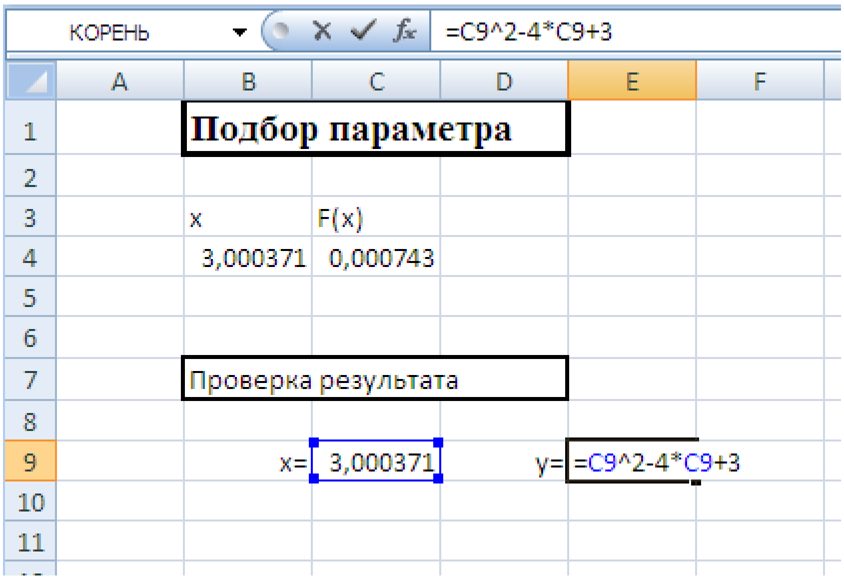


Рис. 2.38

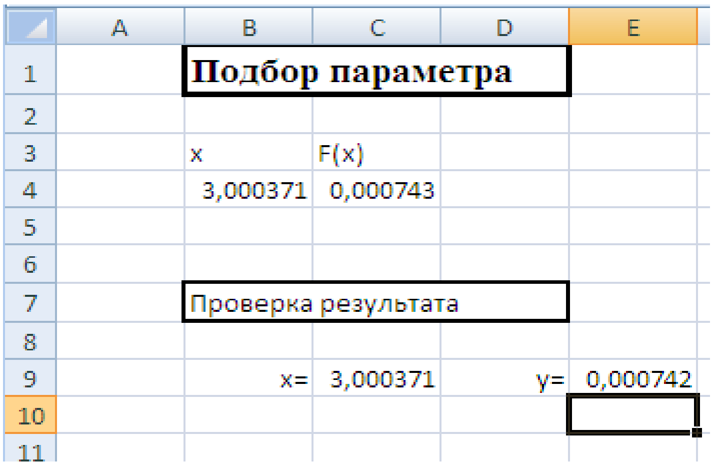


Рис.2.39

2.9 Надстройка Поиск решения

Команды **Поиск решения** в стандартной установке программы, может не быть, установим её:

Кнопка Office  →*Кнопка* ***Параметры Excel***→***Надстройки***→ ***Перейти***.

В открывшемся окне следует поставить флажок ***Поиск решения*** (рис. 2.40).

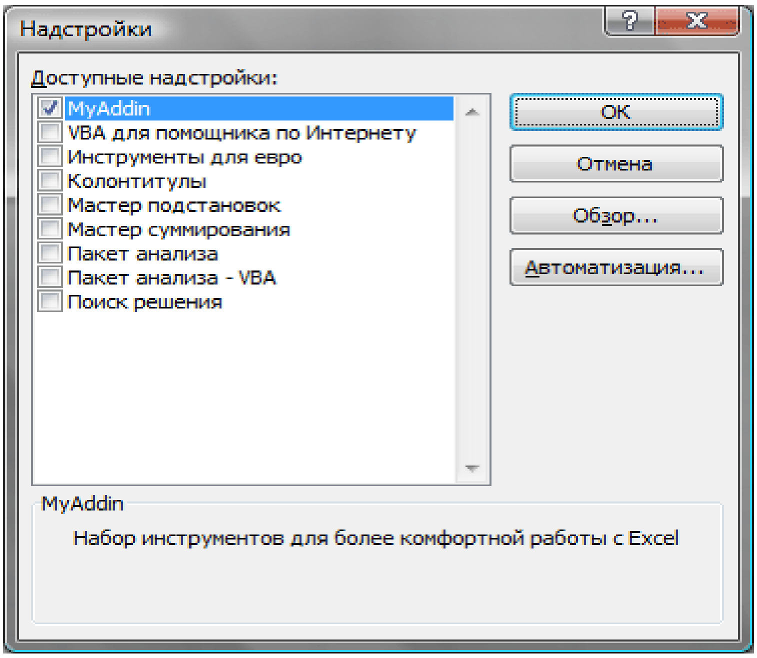


Рис. 2.40

Теперь можем вызвать команду **Поиск решения**, вкладка **Данные** группа **Анализ**, кнопка **Поиск решения** (рис. 2.41):

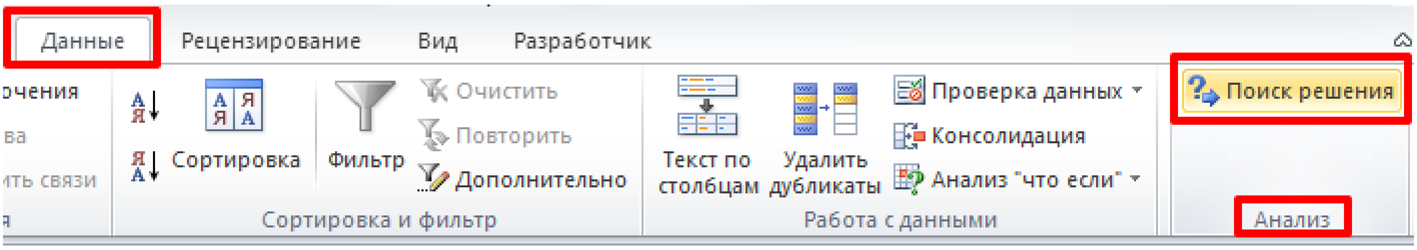


Рис. 2.41

Пример 2.15. Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод касательных.

Решение.

Был найден отрезок [a,b]=[1,2], на котором находится корень уравнения.

1. Ввести в ячейку **B2** заголовок «Поиск решения» (рис. 2.42).
2. Ввести в ячейку **B4** текст «x», а ячейку **C4** – «F(x)».
3. Занести в ячейку **B5** начальное приближение к корню, например 1,5.
4. Ввести в ячейку **C5** формулу «=B5*B5-КОРЕНЬ(B5+4)».
5. Выполнить команду:

Вкладка **Данные** → группа **Анализ** → кнопка **Поиск решения**.

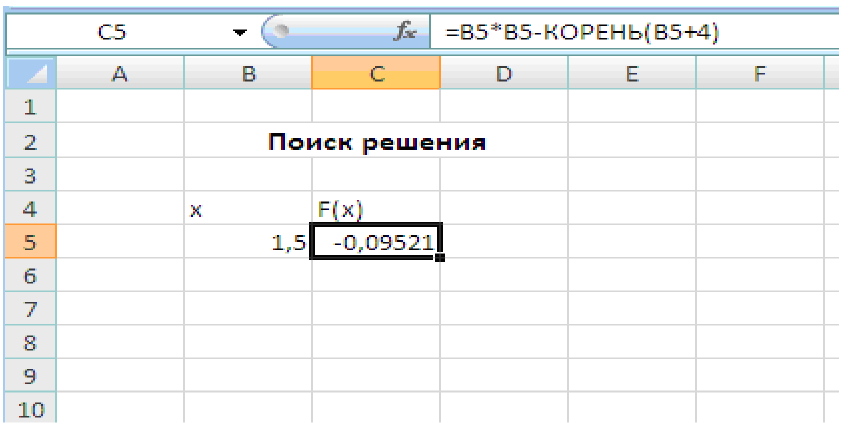


Рис. 2.42

6. В поле «Установить целевую ячейку» указать ячейку $C$5, в которой занесена формула.

В поле «Равной:» установить «значению 0».

В поле «Изменяя ячейки:» указать ячейку **$B$5**, в поле «Ограничения:» указать два ограничения **$B$5<=2** и **$B$5>=1**.

7. Нажать кнопку «Выполнить».
8. На рис. 2.44 результат.

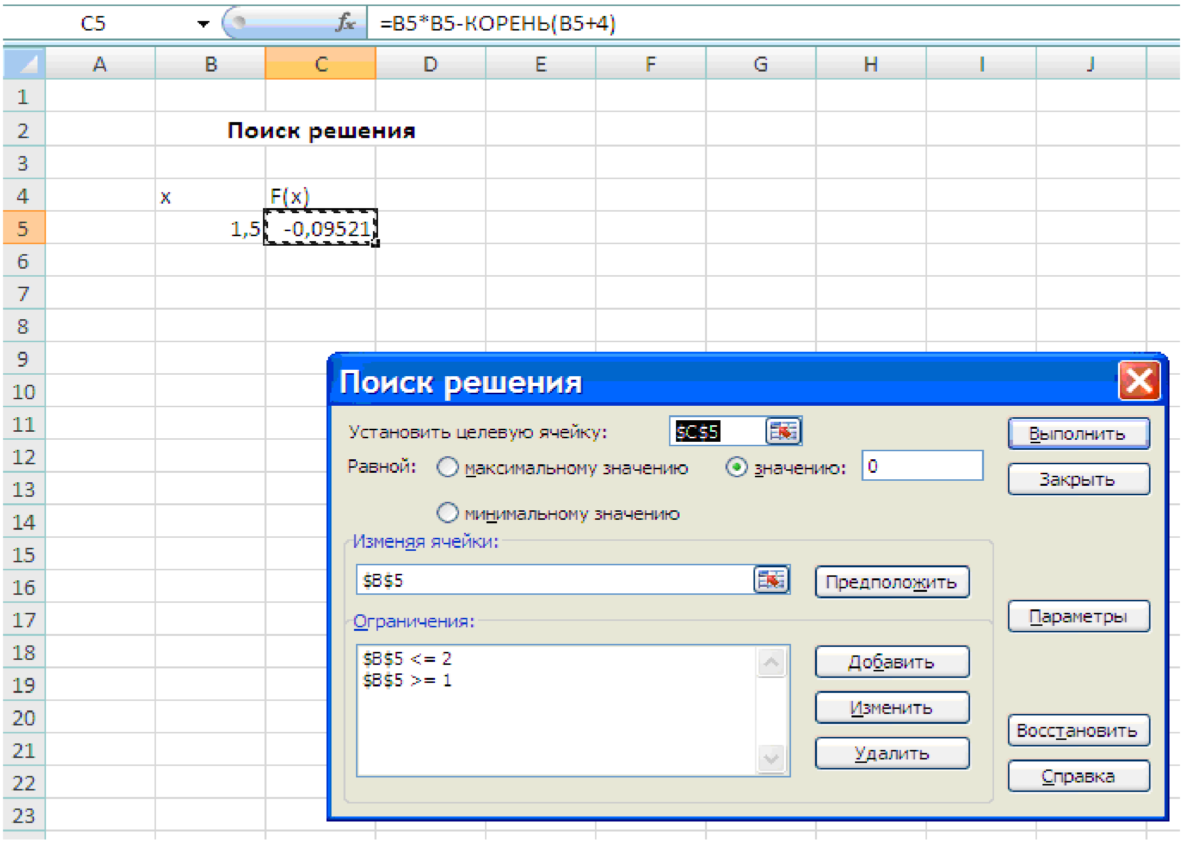


Рис. 2.43

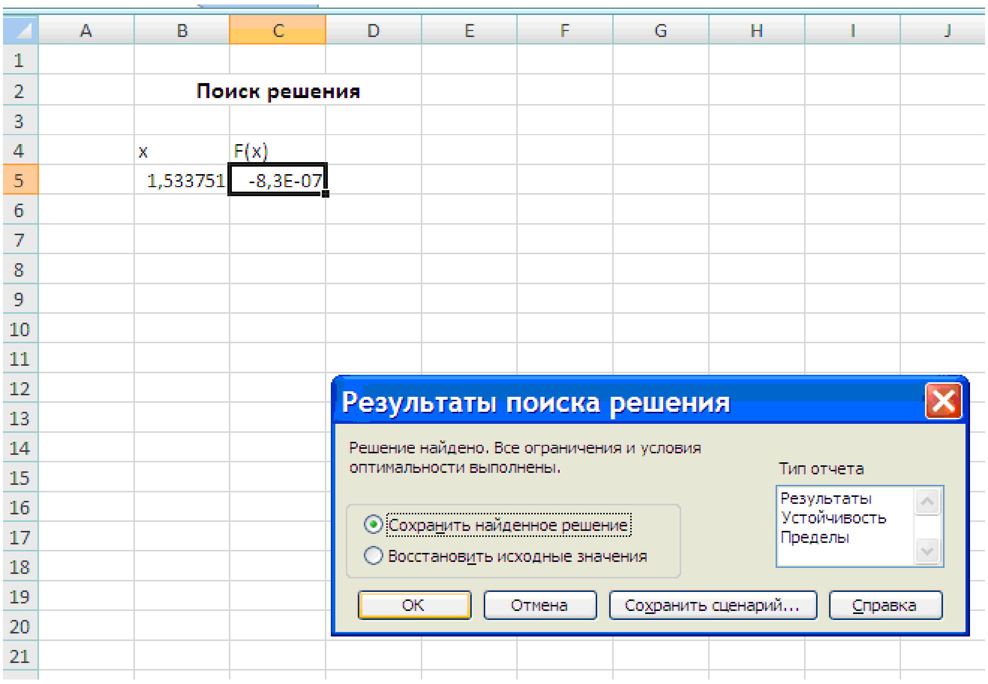


Рис. 2.44

2.10. Варианты заданий

Выполнить отделение корней для функции своего варианта. Выполнить уточнение корней с точностью 0,001, используя все рассмотренные методы.

Таблица 2.1.

№ п/п	Уравнение	№ п/п	Уравнение
1	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	16	2-x=ln(x)
2	$x + 2 = e^{2x}$	17	X+lg(x)=0,5
3	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$	18	$(x+1)^2 = \frac{1}{2}e^{-x}$
4	3x+cos(x)+1=0	19	$(2\text{-}x)e^x = 1$
5	$x^3 - 12x - 5 = 0$	20	$x^2 + 4\sin(x) + 1 = 0$
6	$(x+1)^3 + \ln(x) = 0$	21	$4\cos(x)\text{-}2x^3 = 0$
7	$x \cdot 2^x = 1$	22	$x^3 + 6x^2 - 5 = 0$
8	$\sqrt{x+1} = x$	23	2cos2x-3x=0

Окончание табл. 2.1

9	x- cos (x)=0	24	$x^3 + 3e^{2x} = 0$
10	$x + \ln\frac{x}{2} = 0$	25	$\sqrt{x+1} = 2x$
11	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$	26	$x^3 - 3e^{-2x} = 0$
12	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$	27	$x^3 + 2\sin(3x) + 2 = 0$
13	$x^3 + \cos(x) = 0$	28	cos(x)-x+2=0
14	$x^3 - 3x^2 + 3{,}5 = 0$	29	$(x-1)^2 - e^{-(x+1)} = 0$
15	$x^3 - 12x^2 - 10 = 0$	30	$(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$

2.11. Контрольные вопросы

1. Расчетно-графическое отделение корней средствами Excel.
2. Графический метод отделения корней уравнения.
3. Аналитический метод отделения корней уравнения.
4. Решение нелинейных уравнений методом бисекции в Excel.
5. Графическое представление метода бисекции.
6. Решение нелинейных уравнений методом хорд в Excel.
7. Графическое представление метода хорд.
8. Решение нелинейных уравнений методом касательных в Excel.
9. Графическое представление метода касательных при решении нелинейных уравнений.
10. Сравнение метода касательных и метода бисекций применительно к решению нелинейных уравнений.
11. Решение нелинейных уравнений методом простых итераций.
12. Сравнение пройденных методов решения нелинейных уравнений.
13. В чем заключается геометрический смысл метода половинного деления?
14. Всегда ли позволяет метод половинного деления вычислить отделенный корень уравнения с заданной погрешностью?

15. Как выбираются концы отрезка следующего интервала в методе половинного деления?
16. Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы методом половинного деления можно было гарантированно решить уравнение: $f(x)=0$?
17. Что необходимо для нахождения хотя бы одного действительного корня уравнения: $f(x)=0$ методом половинного деления?
18. Можно ли найти корень методом половинного деления, если он находится на границе интервала?
19. Какие корни позволяет определить метод хорд?
20. В чем заключается геометрический смысл метода хорд?
21. Всегда ли метод хорд позволяет вычислить отделенный корень с заданной погрешностью?
22. Как выбираются концы отрезка интервала в методе хорд?
23. Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$ для того, чтобы методом хорд можно решить уравнение: $f(x) = 0$?
24. Какой конец хорды неподвижен при реализации метода?
25. В чем заключается геометрическая интерпретация метода Ньютона?
26. Из чего следует исходить, когда выбирается в методе Ньютона первое приближение x_0?
27. Что необходимо для того, чтобы уравнение: $f(x) =0$ решалось методом Ньютона?
28. В каких случаях применение метода Ньютона не рекомендуется?
29. Что называется сходимостью метода итераций?

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лабораторная работа № 3

3.1. Метод простых итераций

Рассмотрим применение метода простых итераций на примере решения системы линейных уравнений размерности 3×3. Согласно данному методу, исходная система преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} x_1^1 = (b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)/a_{11} \\ x_2^1 = (b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0)/a_{22} \\ x_3^1 = (b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0)/a_{33}, \end{cases}$$

Где $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0$.

Полученные формулы позволяют найти первое приближение к решению (x_1^1, x_2^1, x_3^1). В качестве начального приближения (x_1^0, x_2^0, x_3^0), как правило, используются значения (b_1, b_2, b_3)или (0,0,0).

Вычисление (k+1)-го приближения производится по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)/a_{11} \\ x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k)/a_{22} \\ x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k)/a_{33}, \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$\max\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} < \varepsilon$$

где $\Delta_1 = \left|x_1^{k+1} - x_1^k\right|,\ \Delta_2 = \left|x_2^{k+1} - x_2^k\right|,\ \Delta_1 = \left|x_3^{k+1} - x_3^k\right|$.

Отметим, что для сходимости метода простых итераций достаточно выполнение условия доминирования диагональных элементов системы. Данные условия для системы размерности 3×3 имеют вид:

$$|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}|,\ |a_{21}| \geq |a_{22}| + |a_{23}|,\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}|.$$

Если указанные условия не соблюдаются (в том числе, если $a_{ii} = 0$,

i = 1, 2, 3), их выполнения можно добиться путем применения к уравнениям системы элементарных преобразований, таких как: перестановка строк; умножение любой строки на ненулевой коэффициент и сложение с другой строкой.

Пример 3.1. Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 0{,}63x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}34 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}1\,x_3 = 0{,}32 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}7x_3 = 0{,}72 \end{cases}$$

методом простых итераций с точностью ε=0,001.

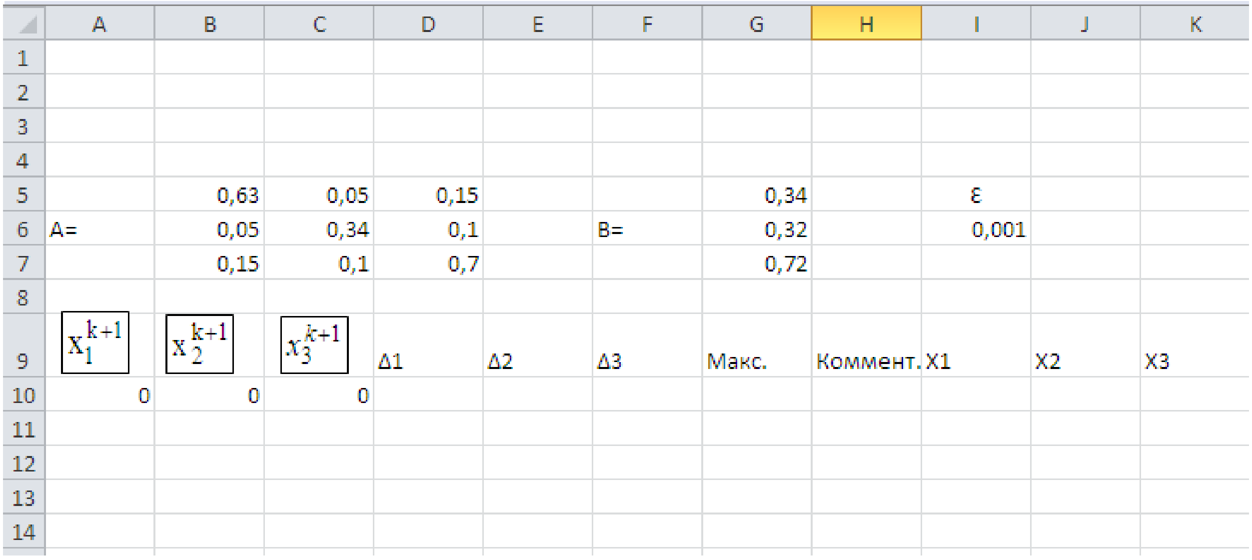
Решение.

Установить в диапазоне **A1:K40** числовой формат с 3 знаками после запятой.

1. В диапазон **B5:D7** вводится матрица левой части заданной системы уравнений. В диапазон **G5:G8** вводится вектор правовой части. В ячейку **I6** вводится точность вычислений (рис. 3.1).

2. В стоку 9 вводятся заголовки столбцов. В при вводе в диапазон **A9:C9** используется редактор формул (рис. 3.1).

3. В диапазон **A10:C10** вводятся начальные приближения к решению. Выбираем их нулевыми.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3											
4											
5		0,63	0,05	0,15			0,34		ε		
6	A=	0,05	0,34	0,1		B=	0,32		0,001		
7		0,15	0,1	0,7			0,72				
8											
9	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	x_3^{k+1}	Δ1	Δ2	Δ3	Макс.	Коммент.	X1	X2	X3
10	0	0	0								
11											
12											
13											
14											

Рис. 3.1

4. В ячейку **A11** (рис. 3.2)согласно первому уравнению системы (3.1) записывается формула

=($G$5-$C$5*B10-$D$5*C10)/$B$5.

> Обратите внимание на то, что ссылки на коэффициенты системы должны иметь абсолютную адресацию.

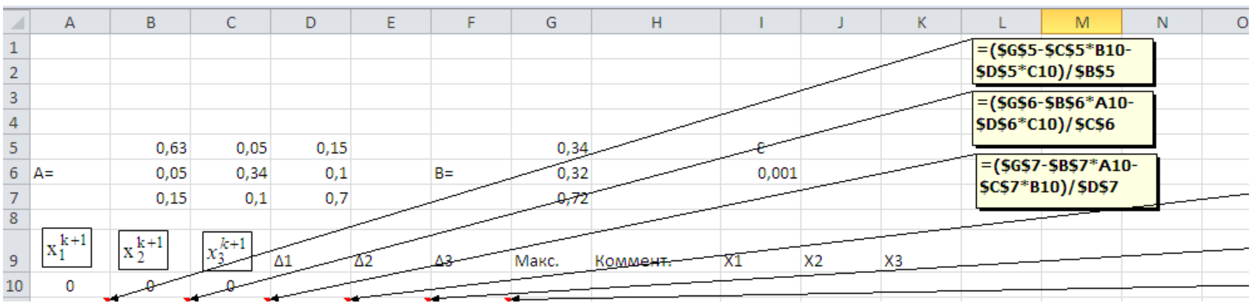


Рис.3.2

5. В ячейку **B11**(рис. 3.2) согласно второму уравнению системы (3.1) записывается формула

=($G$6-$B$6*A10-$D$6*C10)/$C$6.

6. В ячейку **C11**согласно третьему уравнению системы (3.1) записывается формула

=($G$7-$B$7*A10-$C$7*B10)/$D$7.

7. В диапазон **D11:F11** записываются выражения для Δ_1, Δ_2, Δ_3 (формула 3.3) используемые при определении окончания процесса итераций (рис. 3.3).

=ABS(A11-A10),

=ABS(B11-B10),

=ABS(C11-C10).

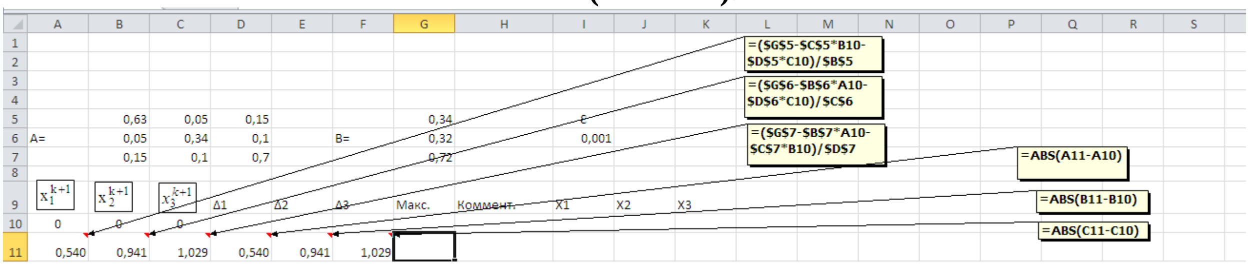


Рис.3.3

8. В ячейке **G11** с помощью функции **МАКС()** вычисляется максимальное из значений Δ_1, Δ_2, Δ_3, которые находятся в диапазоне **D11:F11**. Максимальное значение определяет окончание итерационного процесса (формула 3.3).

На рис.3.4 показано окно функции **МАКС()**.

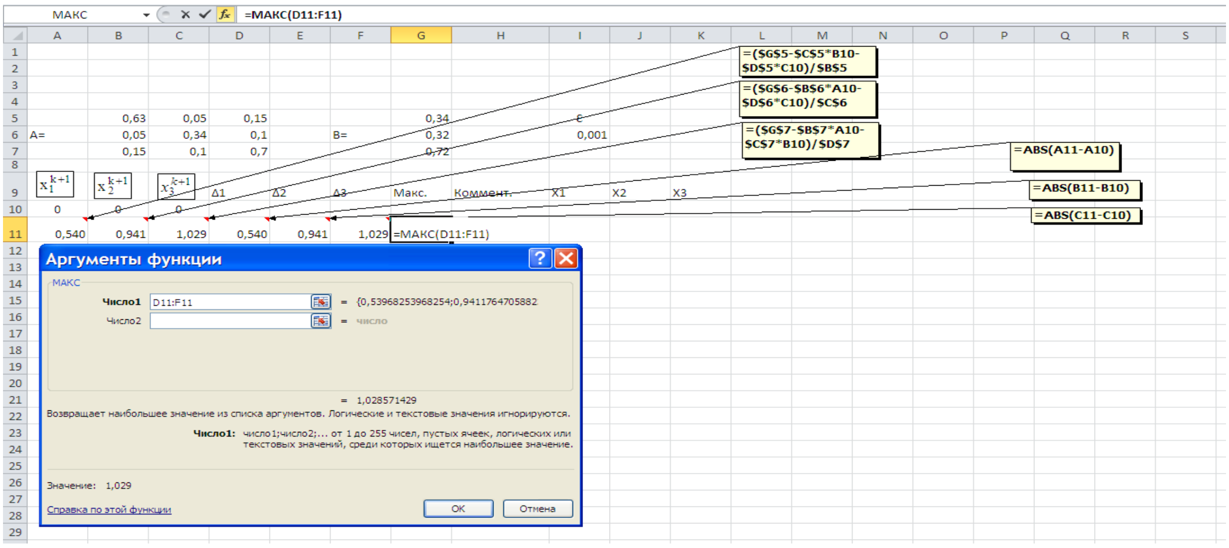


Рис.3.4

9. В ячейку **H11** (рис. 3.5) записывается формула (3.2)

=ЕСЛИ (G11<$I$6;"Стоп";"Продолжение").

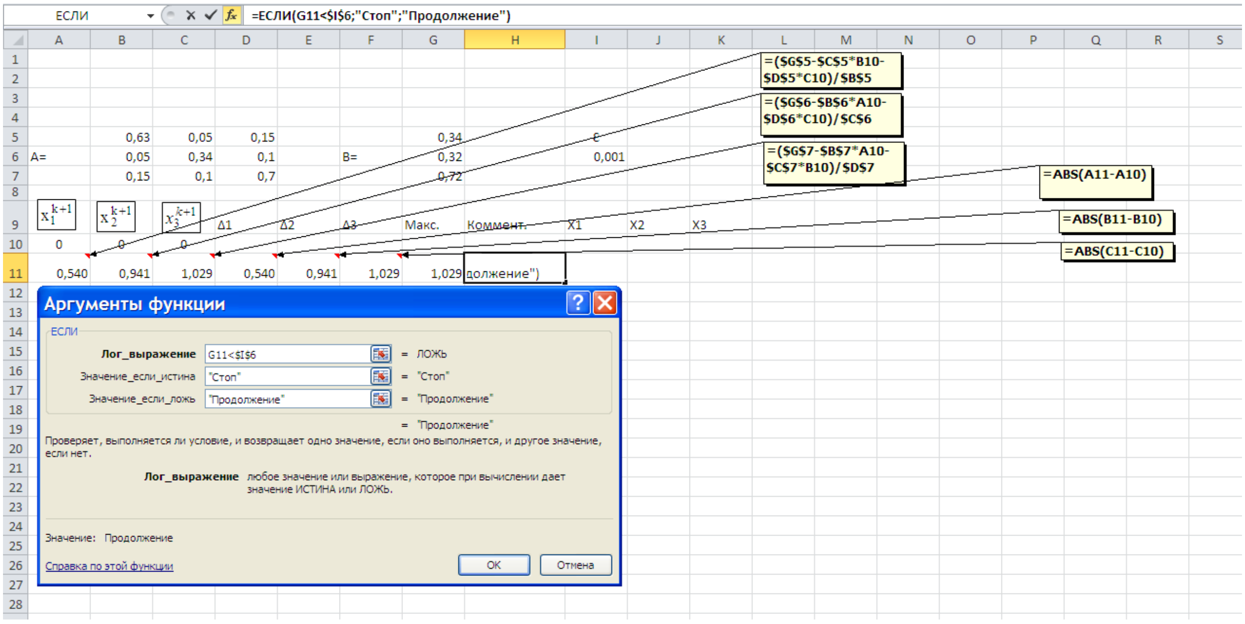


Рис. 3.5

10. В ячейку **I11** записывается функция **ЕСЛИ()**, с помощью которой определяется неизвестное x_1.

$$x_1 = \begin{cases} "\ldots" & , \quad \textit{если} \quad max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \ge \varepsilon, \\ x_1^{k+1} & , \quad \textit{если} \quad max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) < \varepsilon. \end{cases}$$

=ЕСЛИ(G11<$I$6;"X1="&ОКРУГЛ(A11;3);"…").

На рис. 3.6. показано окно с аргументами этой функции.

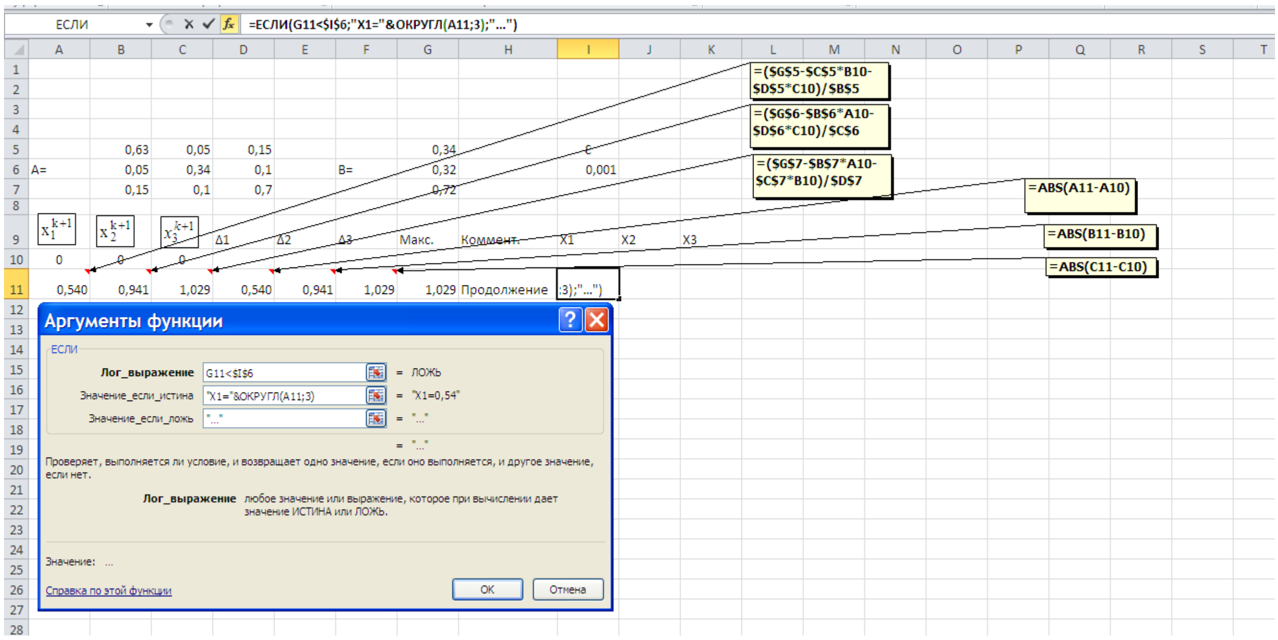


Рис.3.6

11. В ячейку **J11** записывается функция **ЕСЛИ()**, с помощью которой определяется неизвестное x_2.

=ЕСЛИ(G11<$I$6;"X2="&ОКРУГЛ(B11;3);"…").

На рис. 3.7 показано окно с аргументами этой функции.

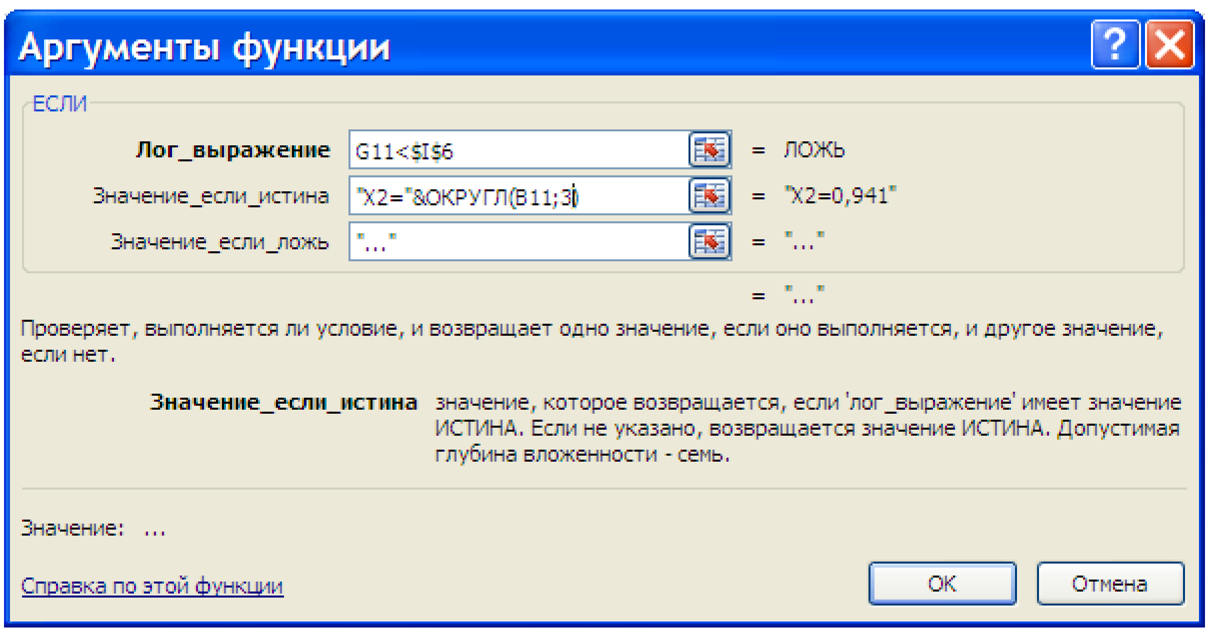


Рис.3.7

12. В ячейку **К11** записывается функция **ЕСЛИ()**, с помощью которой определяется неизвестное x_3.

=ЕСЛИ(G11<$I$6;"X3="&ОКРУГЛ(C11;3);"...").

На рис. 3.8 показано окно с аргументами этой функции.

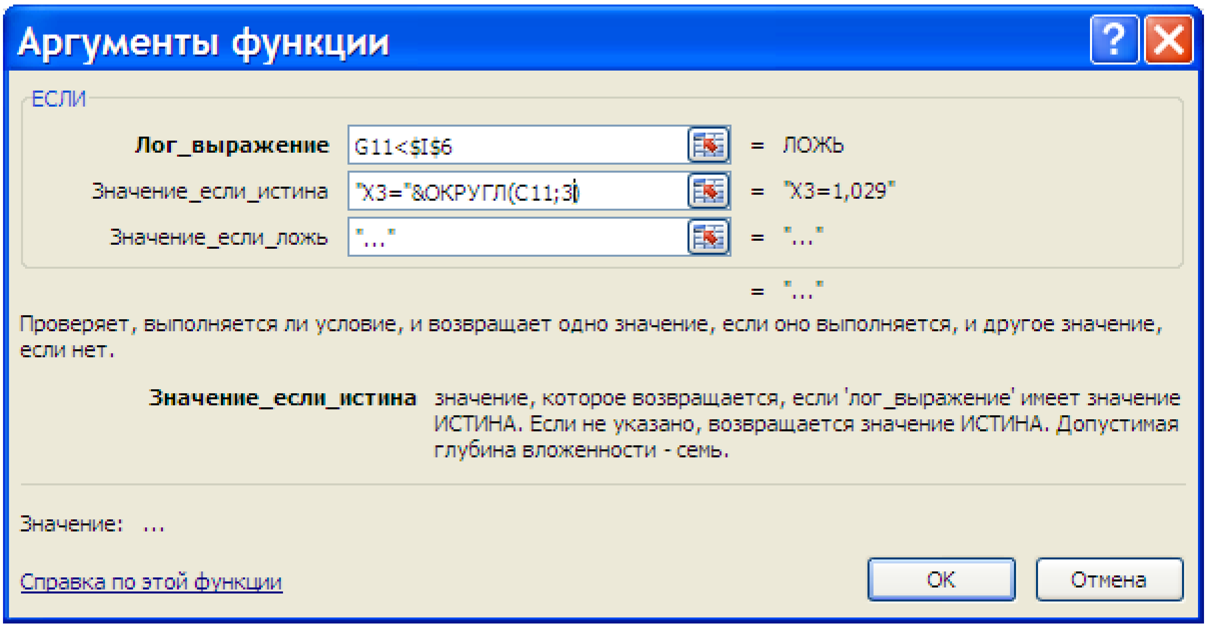


Рис.3.8

13. Выделяется диапазон **А11:К11** (рис. 3.9). Диапазон распространяется вниз до появления слова **«Стоп»** (рис. 3.10).

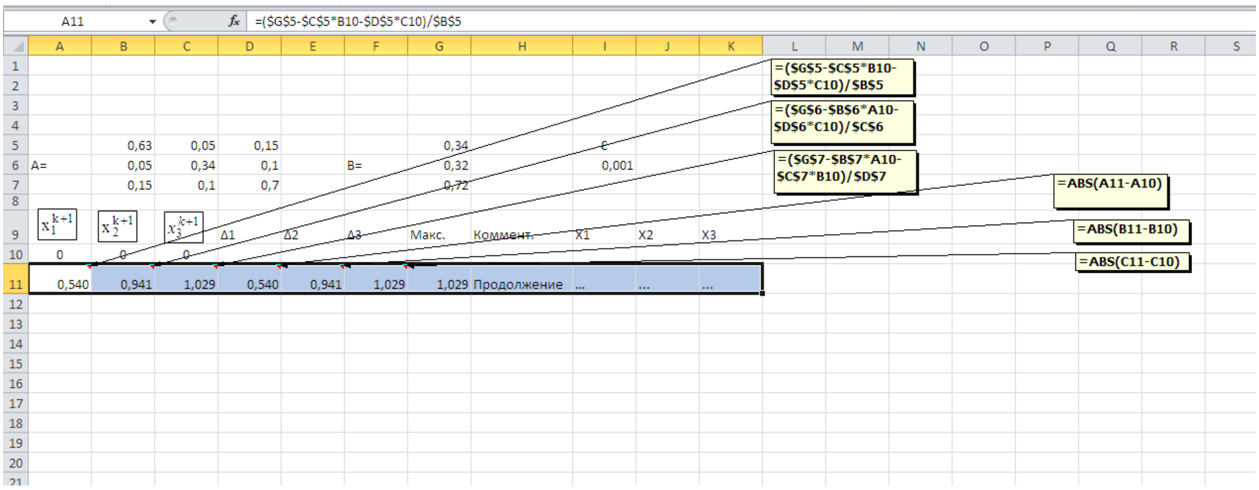
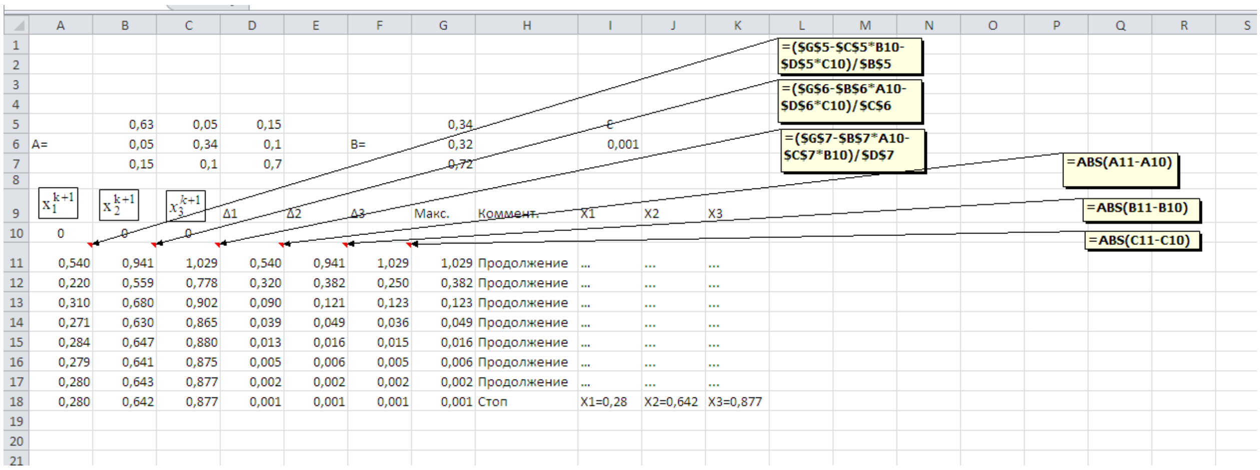


Рис.3.9



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3											
4											
5		0,63	0,05	0,15			0,34		ε		
6	A=	0,05	0,34	0,1		B=	0,32		0,001		
7		0,15	0,1	0,7			0,72				
8											
9	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	x_3^{k+1}	Δ1	Δ2	Δ3	Макс.	Коммент.	X1	X2	X3
10	0	0	0								
11	0,540	0,941	1,029	0,540	0,941	1,029	1,029	Продолжение	...	...	...
12	0,220	0,559	0,778	0,320	0,382	0,250	0,382	Продолжение	...	...	...
13	0,310	0,680	0,902	0,090	0,121	0,123	0,123	Продолжение	...	...	...
14	0,271	0,630	0,865	0,039	0,049	0,036	0,049	Продолжение	...	...	...
15	0,284	0,647	0,880	0,013	0,016	0,015	0,016	Продолжение	...	...	...
16	0,279	0,641	0,875	0,005	0,006	0,005	0,006	Продолжение	...	...	...
17	0,280	0,643	0,877	0,002	0,002	0,002	0,002	Продолжение	...	...	...
18	0,280	0,642	0,877	0,001	0,001	0,001	0,001	Стоп	X1=0,28	X2=0,642	X3=0,877
19											
20											
21											

Рис.3.10

3.2 Метод Зейделя

Отличие метода Зейделя от метода простых итераций заключается в том, что при вычислении x_2^{k+1} используется значение x_1^{k+1}, полученное на текущей итерации, а при вычислении x_3^{k+1}— значения x_1^{k+1}, x_2^{k+1}:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)/a_{11} \\ x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k)/a_{22} \\ x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1})/a_{33}, \end{cases}$$

Данная модификация позволяет ускорить сходимость итерационного процесса.

Пример 3.2. Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 0{,}63x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}34 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}1\,x_3 = 0{,}32 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}7x_3 = 0{,}72 \end{cases}$$

методом Зейделя с точностью ε=0,001.

Решение.

Установить в диапазоне **A1:K40** числовой формат с 3 знаками после запятой.

1. Диапазон **A1:K9** заполнить так же, как в предыдущем примере 3.1.

2. В диапазон **A10:C10** вводятся начальные приближения к решению. ***Выбираем их нулевыми.***

3. В ячейку **A11** (рис. 3.11) согласно первому уравнению системы (3.4) записывается формула

=($G$5-$C$5*B10-$D$5*C10)/$B$5.

4. В ячейку **B11** согласно второму уравнению системы (3.4) записывается формула

=($G$6-$B$6***A11**-$D$6*C10)/$C$6.

5. В ячейку **C11**согласно третьему уравнению системы (3.4) записывается формула

=($G$7-$B$7***A11**-$C$7***B11**)/$D$7.

6. В диапазон **D11:F11** записываются выражения для Δ_1, Δ_2, Δ_3 (формула 3.3) используемые при определении окончания процесса итераций (рис. 3.3).

=ABS(A11-A10),

=ABS(B11-B10),

=ABS(C11-C10).

7. В ячейке **G11** с помощью функции **МАКС()** вычисляется максимальное из значений Δ_1, Δ_2, Δ_3, которые находятся в диапазоне **D11:F11**. Максимальное значение определяет окончание итерационного процесса (формула 3.3).

На рис.3.11 показано окно функции **МАКС()**.

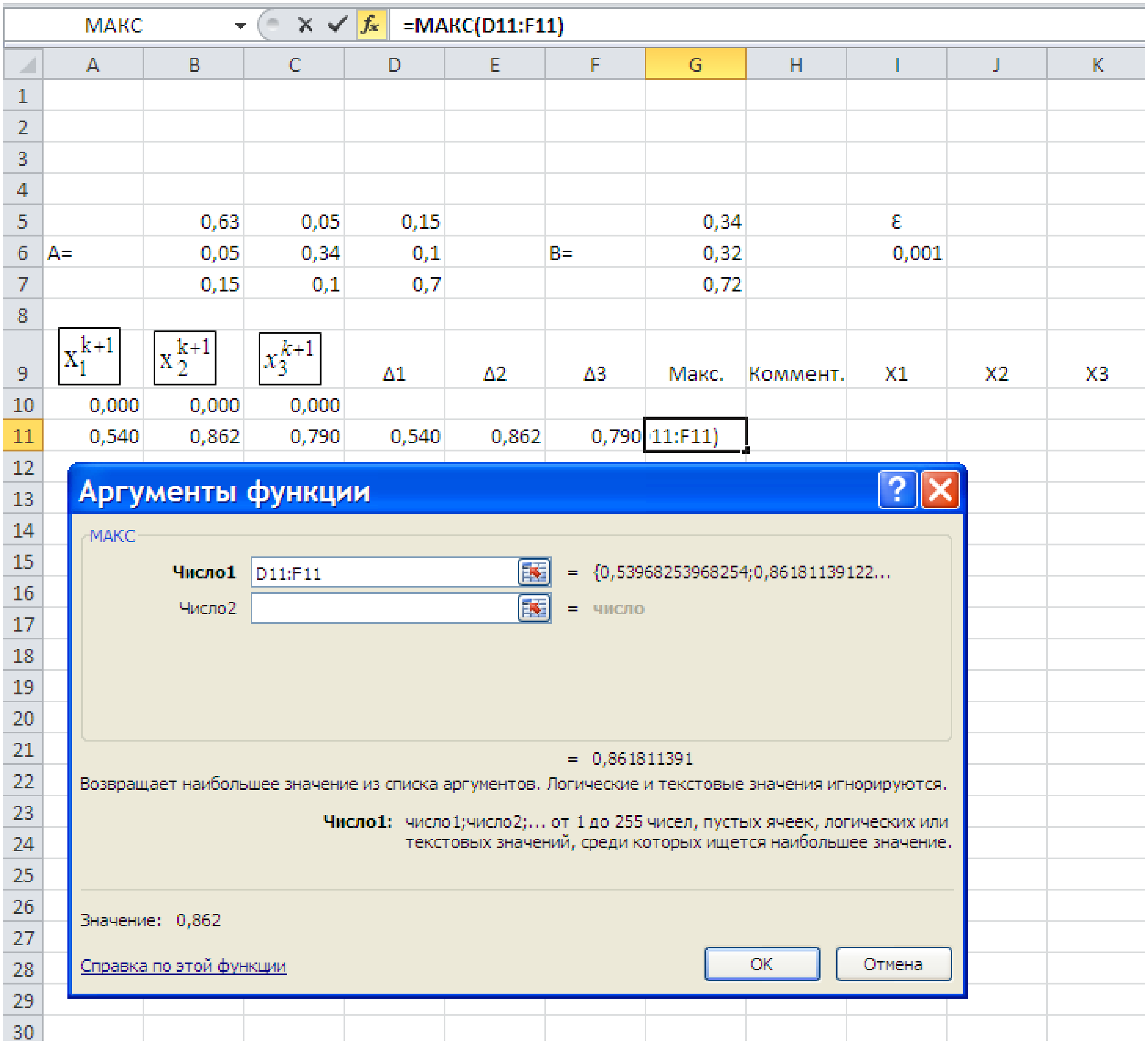


Рис.3.11

8. В ячейку **H11** (рис.3.12) записывается формула (3.2)

=ЕСЛИ (G11<$I$6;"Стоп";"Продолжение").

9. В ячейку **I11** (рис.3.13) записывается функция **ЕСЛИ()**, с помощью которой определяется неизвестное x_1.

$$x_1 = \begin{cases} "\ldots" \quad , & \textit{если} \quad max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \geq \varepsilon, \\ x_1^{k+1} \quad , & \textit{если} \quad max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) < \varepsilon. \end{cases}$$

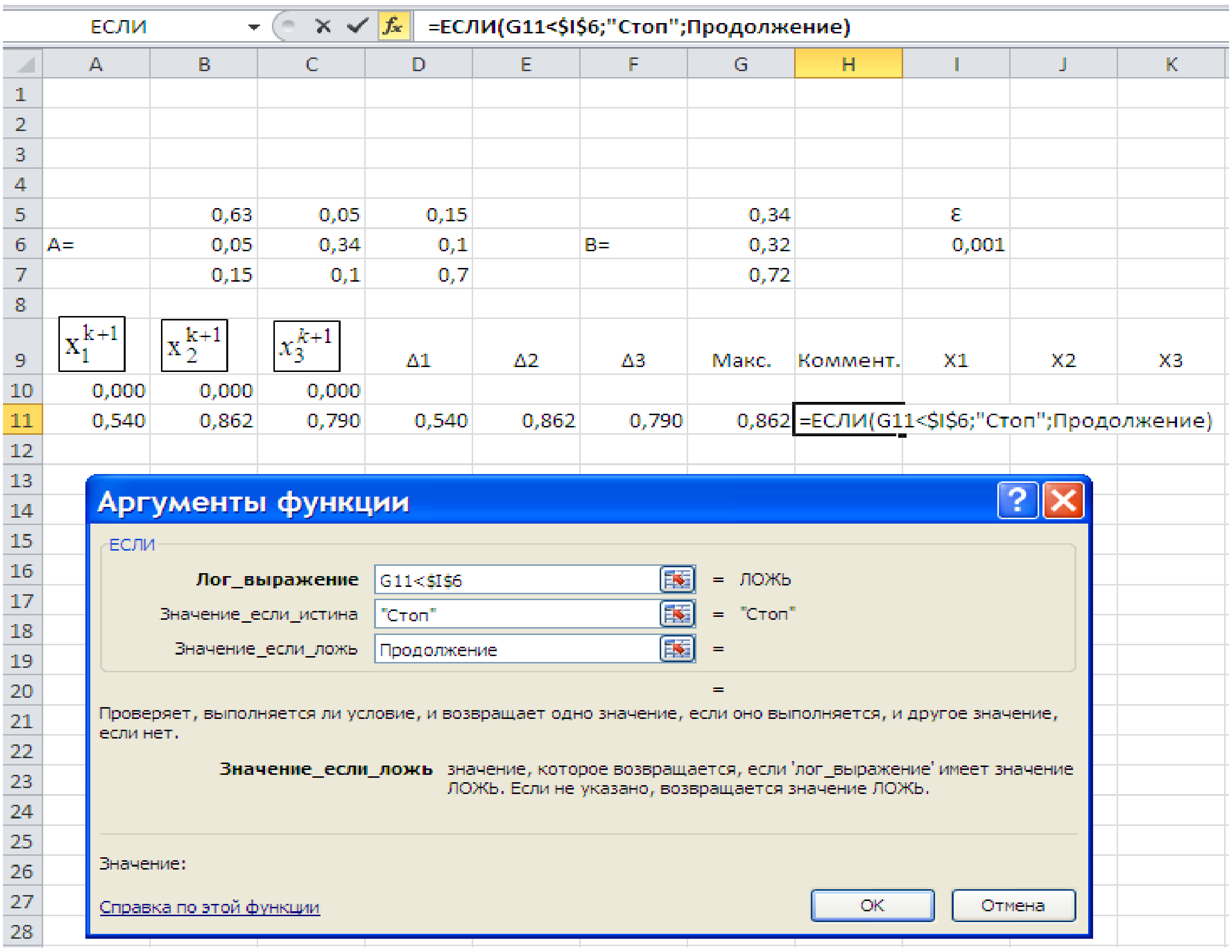

ЕСЛИ
=ЕСЛИ(G11<$I$6;"Стоп";Продолжение)
A= 0,63 0,05 0,15
0,05 0,34 0,1
0,15 0,1 0,7
B= 0,34 0,32 0,72
ε 0,001
Δ1 Δ2 Δ3 Макс. Коммент. X1 X2 X3
0,000 0,000 0,000
0,540 0,862 0,790 0,540 0,862 0,790 0,862 =ЕСЛИ(G11<$I$6;"Стоп";Продолжение)
Аргументы функции
ЕСЛИ
Лог_выражение G11<$I$6 = ЛОЖЬ
Значение_если_истина "Стоп" = "Стоп"
Значение_если_ложь Продолжение =
Проверяет, выполняется ли условие, и возвращает одно значение, если оно выполняется, и другое значение, если нет.
Значение_если_ложь значение, которое возвращается, если 'лог_выражение' имеет значение ЛОЖЬ. Если не указано, возвращается значение ЛОЖЬ.
Значение:
Справка по этой функции
ОК
Отмена

Рис.3.12

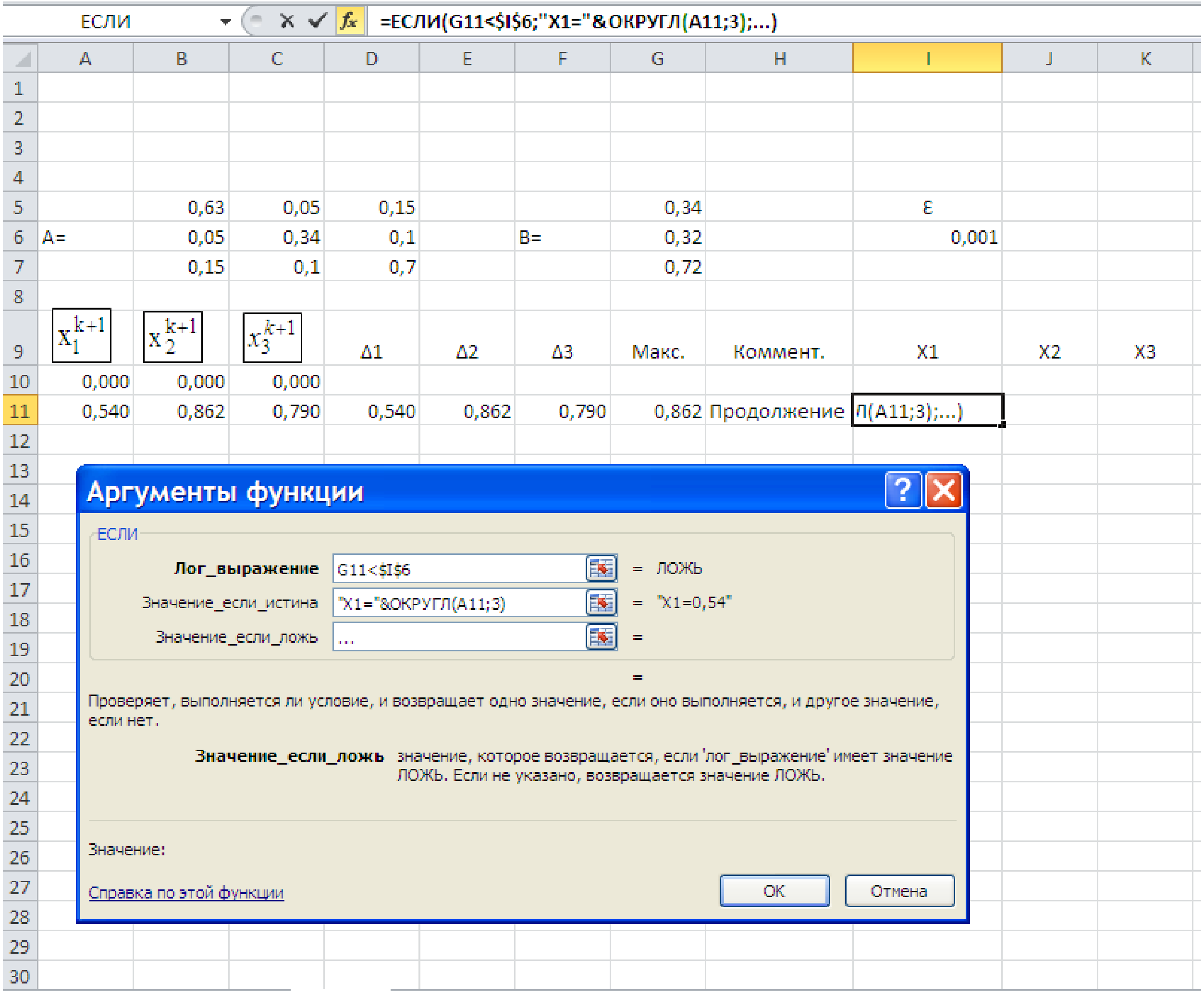


Рис.3.13

10. На рис. 3.14 показана вставка функций в ячейку **G11**.

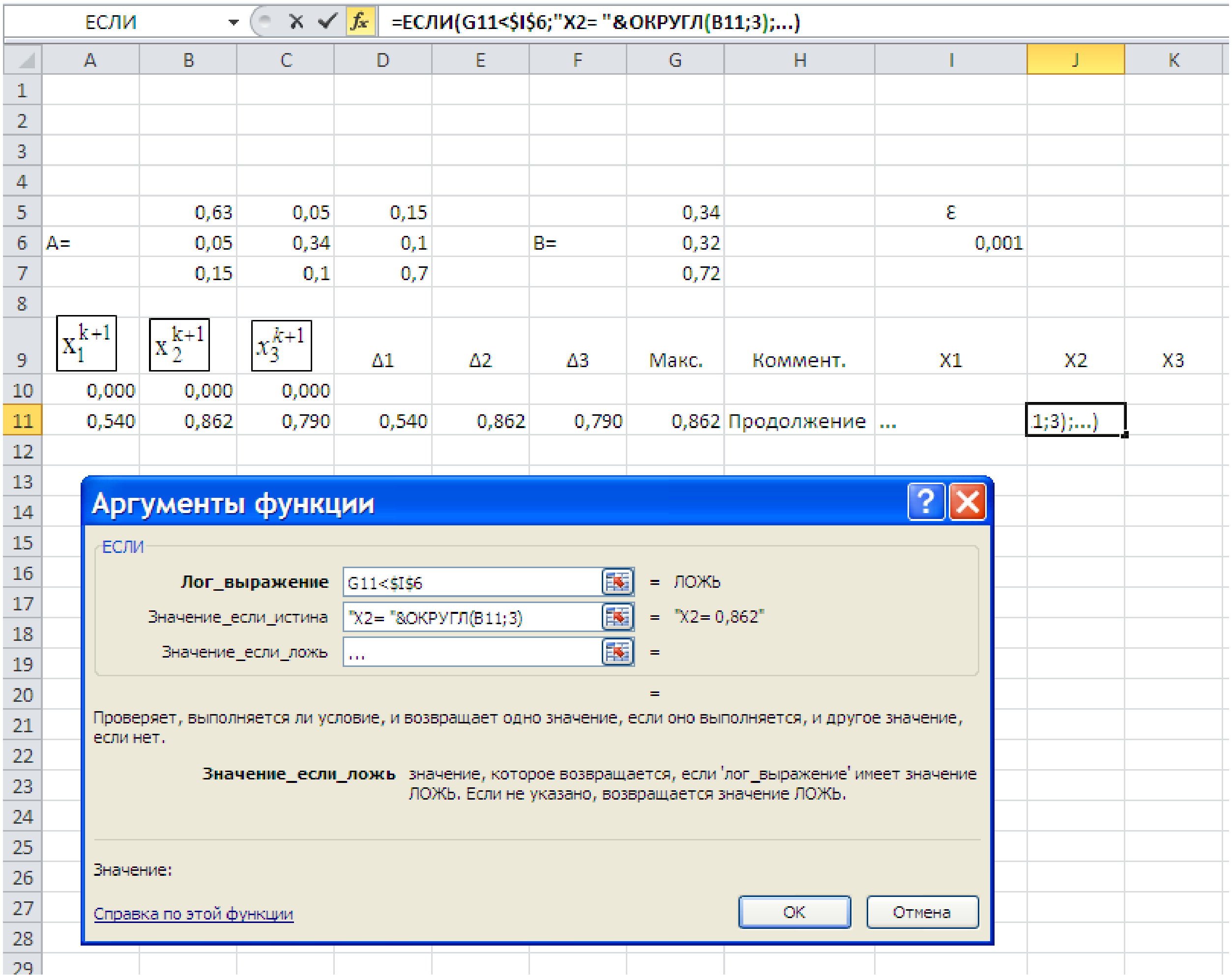


Рис.3.14

11. В ячейку **K11**записывается формула

=ЕСЛИ(G11<$I$6;"X3= "&ОКРУГЛ(C11;3);"...").

12. Выделяется диапазон **A11:K11** (рис. 3.15). Диапазон распространяется вниз до появления слова **«Стоп»** (рис. 3.16).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3												
4												
5		0,63	0,05	0,15			0,34		ε			
6	A=	0,05	0,34	0,1		B=	0,32		0,001			
7		0,15	0,1	0,7			0,72					
8												
9	$\boxed{x_1^{k+1}}$	$\boxed{x_2^{k+1}}$	$\boxed{x_3^{k+1}}$	Δ1	Δ2	Δ3	Макс.	Коммент.	X1	X2	X3	
10	0,000	0,000	0,000									
11	0,540	0,862	0,790	0,540	0,862	0,790	0,862	Продолжение	...	...	...	
12												
13												

Рис.3.15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3												
4												
5		0,63	0,05	0,15			0,34		ε			
6	A=	0,05	0,34	0,1		B=	0,32		0,001			
7		0,15	0,1	0,7			0,72					
8												
9	$\boxed{x_1^{k+1}}$	$\boxed{x_2^{k+1}}$	$\boxed{x_3^{k+1}}$	Δ1	Δ2	Δ3	Макс.	Коммент.	X1	X2	X3	
10	0,000	0,000	0,000									
11	0,540	0,862	0,790	0,540	0,862	0,790	0,862	Продолжение	...	...	...	
12	0,283	0,667	0,873	0,256	0,195	0,083	0,256	Продолжение	...	...	...	
13	0,279	0,644	0,877	0,004	0,024	0,004	0,024	Продолжение	...	...	...	
14	0,280	0,642	0,877	0,001	0,001	0,000	0,001	Продолжение	...	...	...	
15	0,280	0,642	0,877	0,000	0,000	0,000	0,000	Стоп	X1=0,28	X2= 0,642	X3= 0,877	
16												
17												

Рис.3.16

Очевидно, что решения X_1, X_2, X_3, полученные методом простых итераций и методом Зейделя, должны отличаться на величину не более 0,001.

3.3. Точное решение системы линейных уравнений

Выше рассмотрены приближенные методы решения систем линейных уравнений.

Запишем исходную систему линейных уравнений в матричной форме:

$$AX = B. \qquad (*)$$

Для нахождения точного решения системы линейных уравнений можно воспользоваться методом обратной матрицы. Для этого левую и правую часть уравнения (*) необходимо умножить на A^{-1}. Тогда

$$X = A^{-1}B$$

Следует помнить, что метод обратной матрицы применяется только для решения систем линейных уравнений, содержащих равное количество уравнений и неизвестных и являющихся невырожденными
(определитель $|A| \neq 0$ ***).***

Матрицей, обратной матрице ***(A)*** размера (n x n) называется такая матрица $(A)^{-1}$ размера (n x n), что при перемножении этих матриц в любом порядке получается единичная диагональная матрица:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

здесь ($\boldsymbol{I}$) – это единичная диагональная матрица размера (n x n) – все элементы которой равны 0, за исключением диагональных, которые равны 1.

Пример 3.3. Выполнить проверку правильности приближенного решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 0{,}63x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}34 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}1\,x_3 = 0{,}32 \\ 0{,}15x_1 + \ 0{,}1x_2 \ + 0{,}7x_3 = 0{,}72 \end{cases}$$

полученного методами простых итераций и Зейделя, используя метод обратной матрицы.

Решение.

Нахождение обратной матрицы выполняет встроенная функция **МОБР()**. У нее единственный аргумент, который является квадратным диапазоном, содержащим обращаемую матрицу. Функция возвращает матрицу, равную по размеру обращаемой матрице.

1. В диапазон **A5:D7** записать матрицу левой части системы уравнений.
2. В диапазон **G5:G7** записать вектор правой части.
3. Выделить диапазон **J5:L7**, в который будет записываться обратная матрица и нажать кнопку **Вставить функцию** (рис. 3.17).

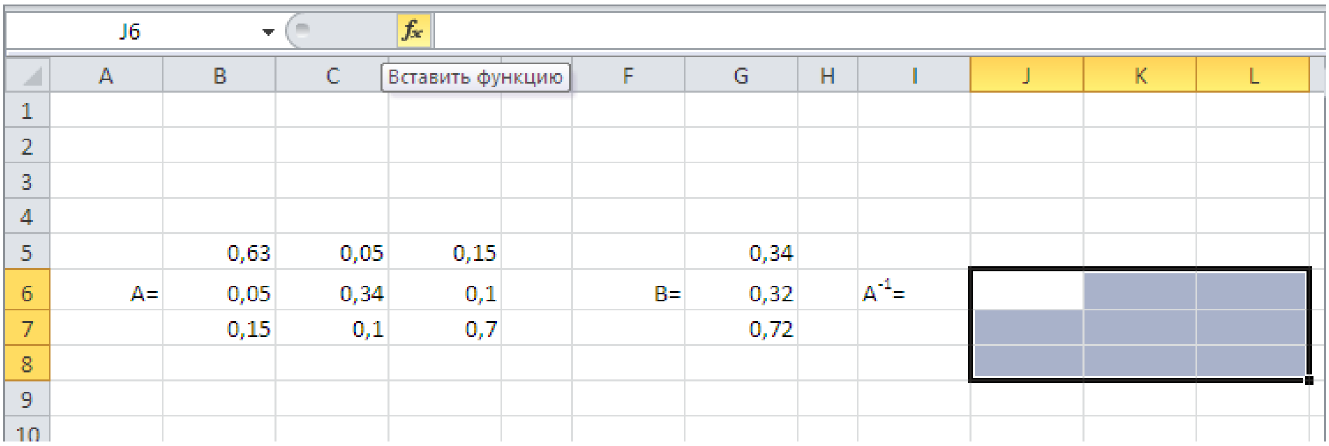


Рис.3.17

4. В окне Мастера функций в секции Математические выбрать **МОБР()** (рис. 3.18). Выделить диапазон с исходной матрицей (рис. 3.19). Нажать сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. Результат на рис. 3.20.

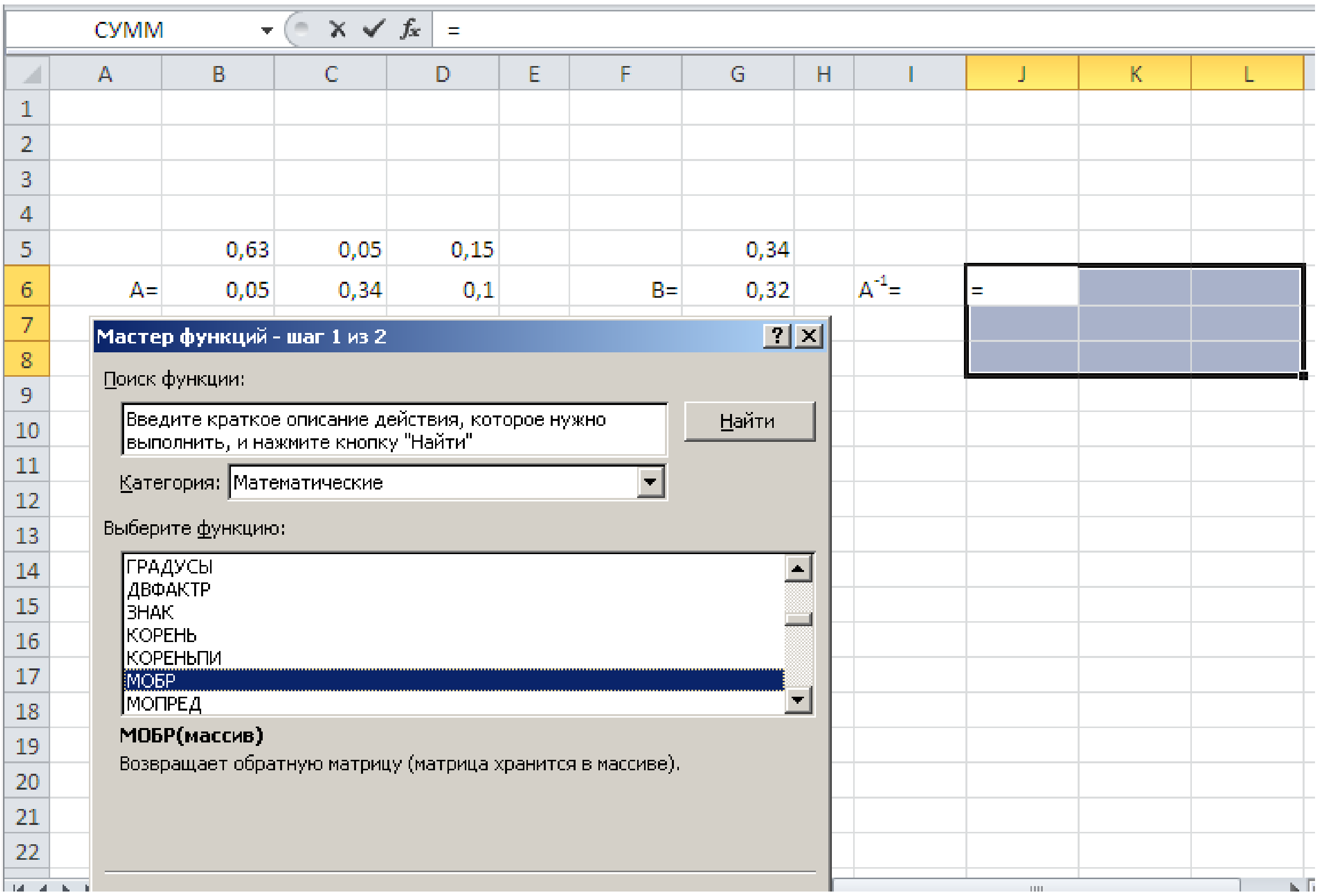


Рис.3.18

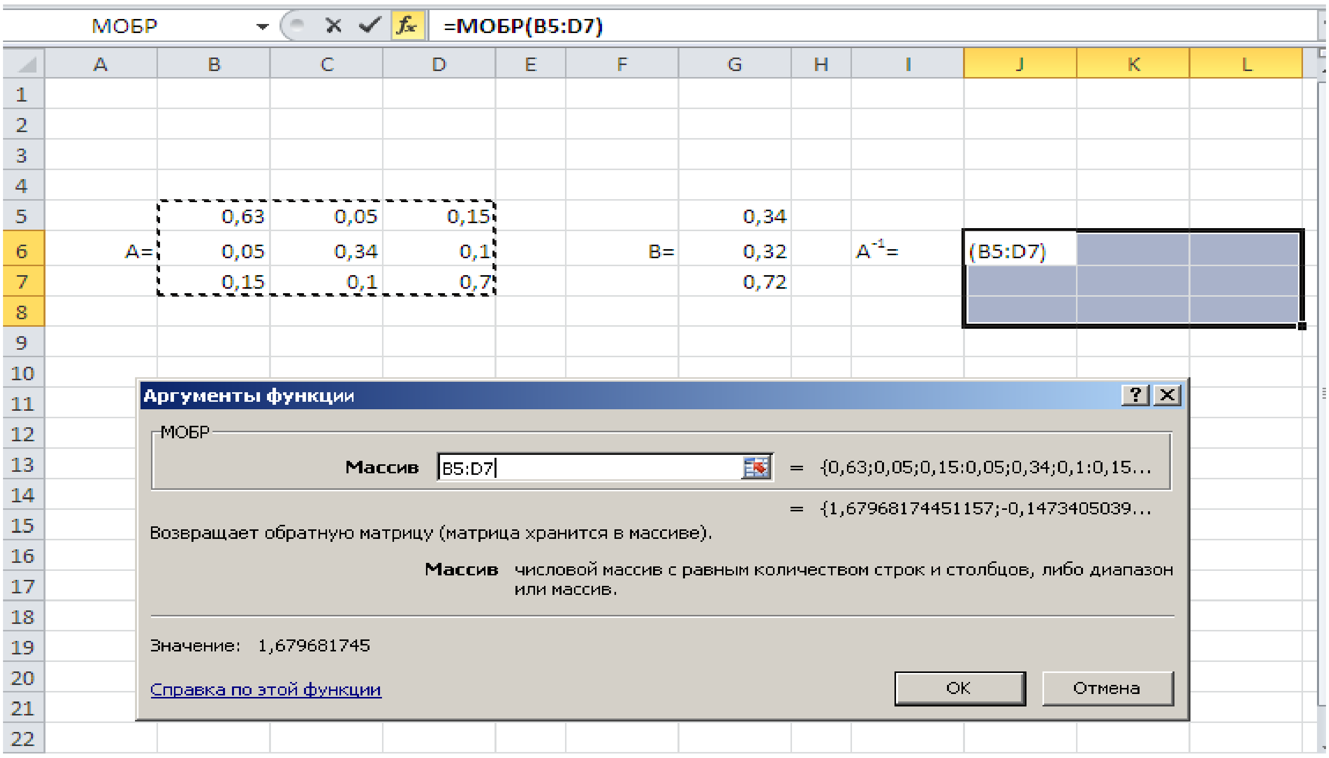


Рис.3.19

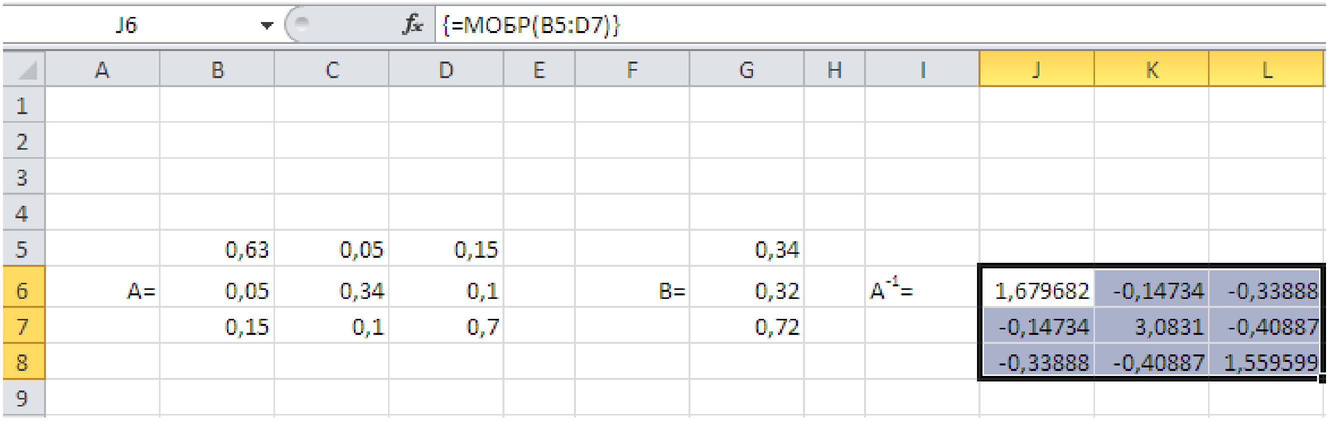


Рис.3.20

5. Выделить диапазон **D10:D12**, в который будет записываться результат вычислений. В окне Мастера функций в секции Математические выбрать **МУМНОЖ()** (рис. 3.21). В строку **Массив1** поместить диапазон с исходной матрицей $\mathbf{A^{-1}}$. В строку **Массив2** поместить диапазон с вектором правой части. Нажать сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. Результат на рис. 3.22.

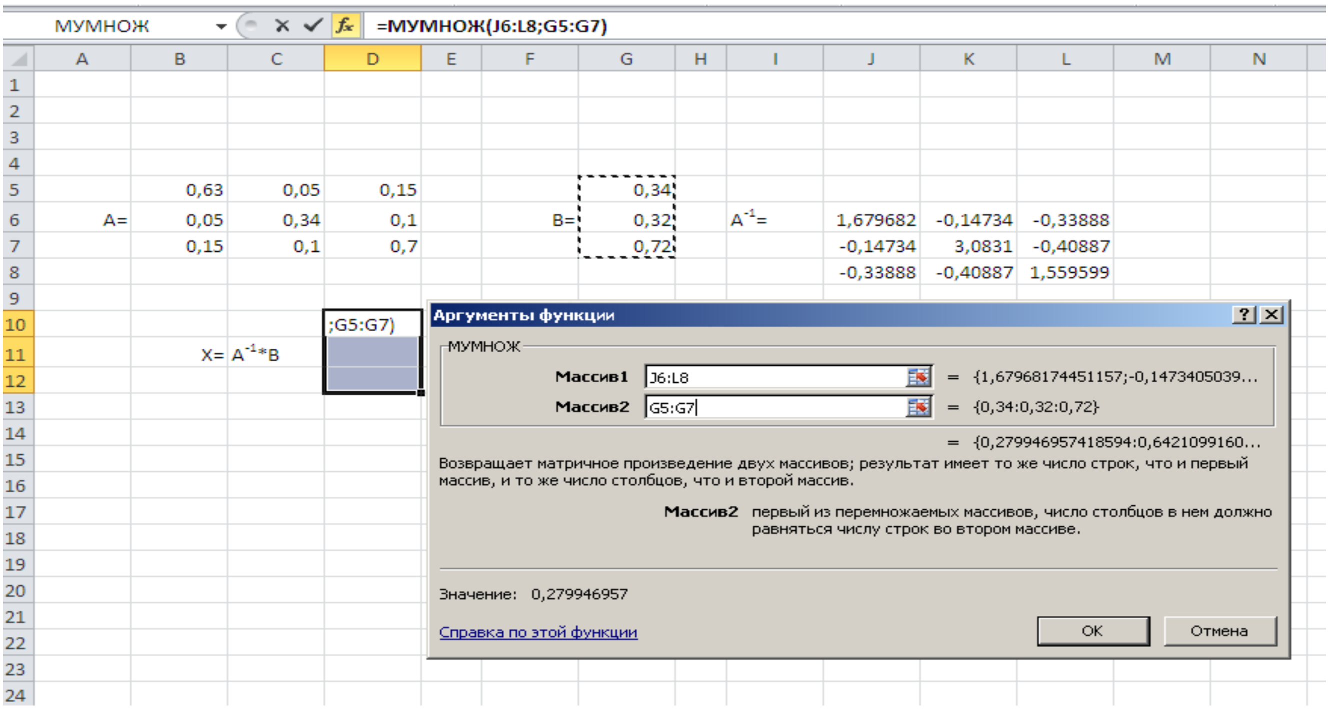


Рис.3.21

D17

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3												
4												
5		0,63	0,05	0,15			0,34					
6	A=	0,05	0,34	0,1		B=	0,32		A^{-1}=	1,679682	-0,14734	-0,33888
7		0,15	0,1	0,7			0,72			-0,14734	3,0831	-0,40887
8										-0,33888	-0,40887	1,559599
9												
10				0,279947								
11		X=	A^{-1}*B	0,64211								
12				0,876853								

Рис.3.22

3.4. Варианты заданий

Решить индивидуальный вариант (таблица 3.1). Предварительно проверить выполнение условия доминирования диагональных элементов. Если данное условие не выполняется, преобразовать систему линейных уравнений.

Таблица 3.1.

3 $\begin{cases} 31x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 2 \\ 1{,}9x_1 + 31x_2 + 2{,}1x_3 = 21 \\ 7{,}5x_1 + 3{,}8x_2 + 48x_3 = 56 \end{cases}$	4 $\begin{cases} 91x_1 + 5{,}6x_2 + 7{,}8x_3 = 98 \\ 3{,}8x_1 + 51x_2 + 2{,}8x_3 = 67 \\ 4{,}1x_1 + 5{,}7x_2 + 12x_3 = 58 \end{cases}$
5 $\begin{cases} 33x_1 + 2{,}1x_2 + 2{,}8x_3 = 8 \\ 4{,}1x_1 + 37x_2 + 4{,}8x_3 = 57 \\ 2{,}7x_1 + 1{,}8x_2 + 11x_3 = 32 \end{cases}$	6 $\begin{cases} 76x_1 + 5{,}8x_2 + 4{,}7x_3 = 101 \\ 3{,}8x_1 + 41x_2 + 2{,}7x_3 = 97 \\ 2{,}9x_1 + 2{,}1x_2 + 38x_3 = 78 \end{cases}$
7 $\begin{cases} 32x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 65 \\ 0{,}5x_1 + 34x_2 + 1{,}7x_3 = -2{,}4 \\ 1{,}6x_1 + 2{,}3x_2 - 15x_3 = 43 \end{cases}$	8 $\begin{cases} 54x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = -35 \\ 4{,}2x_1 + 17x_2 - 2{,}3x_3 = 27 \\ 3{,}4x_1 + 2{,}4x_2 + 7{,}4x_3 = 19 \end{cases}$
9 $\begin{cases} 36x_1 + 1{,}8x_2 - 4{,}7x_3 = 38 \\ 2{,}7x_1 - 36x_2 + 1{,}9x_3 = 4 \\ 1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 33x_3 = -16 \end{cases}$	10 $\begin{cases} 56x_1 + 2{,}87x_2 - 1{,}7x_3 = 19 \\ 3{,}4x_1 - 36x_2 - 6{,}7x_3 = -24 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 + 37x_3 = 12 \end{cases}$
11 $\begin{cases} 27x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}5x_3 = 35 \\ 4{,}5x_1 - 28x_2 + 6{,}7x_3 = 26 \\ 5{,}1x_1 + 3{,}7x_2 - 14x_3 = 14 \end{cases}$	12 $\begin{cases} 45x_1 - 3{,}5x_2 + 7{,}4x_3 = 25 \\ 3{,}1x_1 - 6x_2 - 2{,}3x_3 = -15 \\ 0{,}8x_1 + 7{,}4x_2 - 5x_3 = 64 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 38x_1 + 6{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 52 \\ 6{,}4x_1 + 13x_2 - 2{,}7x_3 = 38 \\ 2{,}4x_1 - 4{,}5x_2 + 35x_3 = -6 \end{cases}$	14 $\begin{cases} 54x_1 - 6{,}2x_2 - 0{,}5x_3 = 5{,}2 \\ 3{,}4x_1 + 23x_2 + 0{,}8x_3 = -8 \\ 2{,}4x_1 - 1{,}1x_2 + 38x_3 = 18 \end{cases}$

Продолжение табл. 3.1

15 $\begin{cases} 78x_1 + 5{,}3x_2 + 4{,}8x_3 = 18 \\ 3{,}3x_1 + 11x_2 + 1{,}8x_3 = 23 \\ 4{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 28 = 34 \end{cases}$	16 $\begin{cases} 38x_1 + 4{,}1x_2 - 2{,}3x_3 = 48 \\ -2{,}1x_1 + 39x_2 - 5{,}8x_3 = 33 \\ 1{,}8x_1 + 1{,}1x_2 - 21x_3 = 58 \end{cases}$
17 $\begin{cases} 17x_1 - 2{,}2x_2 + 30x_3 = 18 \\ 2{,}1x_1 + 19x_2 - 2{,}3x_3 = 28 \\ 4{,}2x_1 + 3{,}9x_2 - 31x_3 = 51 \end{cases}$	18 $\begin{cases} 28x_1 + 3{,}8x_2 - 32x_3 = 45 \\ 2{,}5x_1 - 28x_2 + 3{,}3x_3 = 71 \\ 6{,}5x_1 - 7{,}1x_2 + 48x_3 = 63 \end{cases}$
19 $\begin{cases} 33x_1 + 3{,}7x_2 + 4{,}2x_3 = 58 \\ 2{,}7x_1 + 23x_2 - 29x_3 = 61 \\ 4{,}1x_1 + 4{,}8x_2 - 50x_3 = 70 \end{cases}$	20 $\begin{cases} 71x_1 + 6{,}8x_2 + 6{,}1x_3 = 70 \\ 5{,}0x_1 + 48x_2 + 5{,}3x_3 = 61 \\ 8{,}2x_1 + 7{,}8x_2 + 71x_3 = 58 \end{cases}$
21 $\begin{cases} 37x_1 + 3{,}1 + 4{,}0x_3 = 50 \\ 4{,}1x_1 + 45x_2 - 4{,}8x_3 = 49 \\ -2{,}1x_1 - 3{,}7x_2 + 18x_3 = 27 \end{cases}$	22 $\begin{cases} 41x_1 + 5{,}2x_2 - 5{,}8x_3 = 70 \\ 3{,}8x_1 - 31x_2 + 4{,}0x_3 = 53 \\ 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 - 63x_3 = 58 \end{cases}$
23 $\begin{cases} 37x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 24 \\ 2{,}5x_1 + 47x_2 - 7{,}8x_3 = 35 \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 13x_3 = -24 \end{cases}$	24 $\begin{cases} 63x_1 + 5{,}2x_2 - 0{,}6x_3 = 15 \\ 3{,}4x_1 - 23x_2 + 3{,}4x_3 = 27 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 35x_3 = -23 \end{cases}$
25 $\begin{cases} 15x_1 + 2{,}3x_2 - 3{,}7x_3 = 45 \\ 2{,}8x_1 + 34x_2 + 5{,}8x_3 = -32 \\ 1{,}2x_1 + 7{,}3x_2 - 23x_3 = 56 \end{cases}$	26 $\begin{cases} 1{,}3x_1 + 3{,}3x_2 + 27x_3 = 21 \\ 2{,}8x_1 - 17x_2 + 3{,}5x_3 = 17 \\ 17x_1 + 5{,}8x_2 - 4{,}1x_3 = 8 \end{cases}$
27 $\begin{cases} 1{,}9x_1 + 2{,}8x_2 + 17x_3 = 7 \\ 1{,}8x_1 + 34x_2 + 2{,}1x_3 = 11 \\ 13x_1 - 1{,}7x_2 + 4{,}2x_3 = 28 \end{cases}$	28 $\begin{cases} 1{,}9x_1 + 2{,}8x_2 + 31x_3 = 2 \\ 2{,}1x_1 + 31x_2 + 1{,}9x_3 = 21 \\ 48x_1 + 3{,}8x_2 + 7{,}5x_3 = 56 \end{cases}$
29 $\begin{cases} 7{,}8x_1 + 5{,}6x_2 + 91x_3 = 98 \\ 2{,}8x_1 + 51x_2 + 3{,}8x_3 = 67 \\ 12x_1 + 5{,}7x_2 + 4{,}1x_3 = 58 \end{cases}$	30 $\begin{cases} 2{,}8x_1 + 2{,}1x_2 + 33x_3 = 8 \\ 4{,}8x_1 + 37x_2 + 4{,}1x_3 = 57 \\ 11x_1 + 1{,}8x_2 + 2{,}7x_3 = 32 \end{cases}$
31 $\begin{cases} 4{,}7x_1 + 5{,}8x_2 + 36x_3 = 101 \\ 2{,}7x_1 + 41x_2 + 3{,}8x_3 = 97 \\ 38x_1 + 2{,}1x_2 + 2{,}9x_3 = 78 \end{cases}$	32 $\begin{cases} 3{,}7x_1 - 2{,}5x_2 + 32x_3 = 65 \\ 1{,}7x_1 + 34x_2 + 0{,}5x_3 = 2{,}4 \\ 15x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}6x_3 = 43 \end{cases}$

Окончание табл. 3.1

33 $\begin{cases} 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 54x_3 = -35 \\ 2{,}3x_1 + 17x_2 - 4{,}3x_3 = 27 \\ 74x_1 + 2{,}4x_2 + 3{,}4x_3 = 19 \end{cases}$	34 $\begin{cases} 4{,}7x_1 + 1{,}8x_2 - 34x_3 = 38 \\ 1{,}9x_1 - 36x_2 + 2{,}7x_3 = 4 \\ 33x_1 + 4{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = -16 \end{cases}$
35 $\begin{cases} 1{,}7x_1 + 2{,}7x_2 - 56x_3 = 19 \\ 6{,}7x_1 - 36x_2 - 3{,}4x_3 = -24 \\ 37x_1 + 1{,}3x_2 + 0{,}7x_3 = 12 \end{cases}$	36 $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}9x_2 - 27x_3 = 35 \\ 6{,}7x_1 - 28x_2 + 4{,}5x_3 = 26 \\ 14x_1 + 3{,}7x_2 - 5{,}1x_3 = -1{,}4 \end{cases}$

3.5. Контрольные вопросы

1. Решение СЛУ методом Зейделя. Сходимость метода.
2. Решение СЛУ методом итераций. Сравнение методов.

ГЛАВА 4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Лабораторная работа №4

Интерполяция это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Пусть задан дискретный набор точек x_i ($i=0,1,\dots,n$), которые называют *узлами интерполяции*, причем среди этих точек нет совпадающих, также заданы значения функции y_i в этих точках. Требуется построить функцию $g(x)$, проходящую через все заданные узлы.

4.1. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть в попарно различных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ задана таблица значений $y_0, y_1, \dots, y_n$ некоторой функции $y = f(x)$. Задача интерполяции состоит в построении функции $y = g(x)$, удовлетворяющей условию

$$g(x_i) = y_i \quad (i = 0,1, \dots, n).$$

Другими словами, ставится задача построения функции $y = g(x)$, график которой проходит через узлы интерполяции (x_i, y_i).

Предположим, что в результате эксперимента получена таблица значений некоторой функции $y = f(x)$ в пяти узлах интерполяции.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

Построим функцию $y = g(x)$, близкую к $y = f(x)$ и принимающую в точках $x_0, x_1, \dots, x_4$ те же значения, что и $y = f(x)$, т.е. такую, что $g(x_0) = y_0$, $g(x_1) = y_1$, …, $g(x_4) = y_4$.

Указанным условиям удовлетворяет многочлен Лагранжа:

$$L_5(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$
$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$
$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Задача интерполяции состоит в том, чтобы по значениям функции в некоторых точках получить ее значение в точках отрезка, отличных от узлов интерполяции.

Пример 4.1. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции, заданной таблично. Найти приближенные значения функции $y = f(x)$ в точках, смещенных относительно экспериментальных данных на величину h, где $h = (x_1 - x_0)/2$.

x	0,75	1,5	2,25	3	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,48

Решение

1. Ввести исходные данные **B4:C8** (рис. 4.1). Вычислить шаг: $h = (x_1 - x_0)/2$, записать в ячейку **D3**.

H16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Исходные данные			Искомые значения			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа	
3		Xi	Yi	h	Xi*	L_5(Xi*)				
4	X_0	0,75	2,5	0,375	1,125			Хтек=Xi	L_5(Хтек)	
5	X_1	1,5	1,2		1,875			1,125		
6	X_2	2,25	1,12		2,625					
7	X_3	3	2,25		3,375					
8	X_4	3,75	4,48		4,125					
9										
10		Xi	Хтек-Xi	X_0-Xi	X_1-Xi	X_2-Xi	X_3-Xi	X_4-Xi	П	Yi/П
11	X_0	0,75	0,375	0,375	0,75	1,5	2,25	3	2,84765625	
12	X_1	1,5	-0,375	-0,75	-0,375	0,75	1,5	2,25		
13	X_2	2,25	-1,125	-1,5	-0,75	2,25	0,75	1,5		
14	X_3	3	-1,875	-2,25	-1,5	-0,75	-1,875	0,75		
15	X_4	3,75	-2,625	-3	-2,25	-1,5	-0,75	-2,625		
16										

Рис. 4.1

2. В **D3** записать формулу для вычисления шага «=(B4-B3/2)».
3. Заполнить столбец **E** значениями аргумента *x*, в которых необходимо вычислить значения функции (по условию задачи этот $x_i^* = x_i + h \quad (i = 0, 1, \dots, 4)$), т.е. значениями, в которых необходимо вычислить полином Лагранжа.
4. В **E4** записать формулу для вычисления значений аргумента, в которых необходимо вычислить значения полинома «=(B4+$D$3)».
5. Скопировать формулу в диапазон **E5:E8**.
6. Записать первое значение $X_{тек}$, в котором необходимо вычислить полином Лагранжа из ячейки **E4** в ячейку **H5**, т.е. записать формулу «=**E4**».
7. Далее заполняется строка 10, в каждую ячейку записывается соответствующий текст.
8. В диапазон B11:B15 копируются исходные значения *X*, т.е. диапазон **B4:B8**.

9. В ячейках **B11:J16; I5** реализуется вычисление значения интерполяционного многочлена Лагранжа при текущем значении аргумента $x_{\text{тек}}$. Сначала заполняется строка **11** формулами (рис. 4.2), а затем выполняется копирование до строки **H15**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		**Исходные данные**			**Искомые значения**			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа
3		Xi	Yi	h	Xi*	L_5(Xi*)			
4	X_0	0,75	2,5	=(B5-B4)/2	=B4+$D$4			Хтек=Xi*	L_5(Хтек)
5	X_1	1,5	1,2		=B5+$D$4			=E4	
6	X_2	2,25	1,12		=B6+$D$4				
7	X_3	3	2,25		=B7+$D$4				
8	X_4	3,75	4,48		=B8+$D$4				
9									
10		Xi	Хтек-Xi	X_0-Xi	X_1-Xi	X_2-Xi	X_3-Xi	X_4-Xi	П
11	X_0	=B4	=$H$5-B11	=C11	=B$12-B11	=B$13-B11	=B$14-B11	=B$15-B11	
12	X_1	1,5	=$H$5-B12	=B$11-B12	=C12	=B$13-B12	=B$14-B12	=B$15-B12	
13	X_2	2,25	=$H$5-B13	=B$11-B13	=B$12-B13	=B13	=B$14-B13	=B$15-B13	
14	X_3	3	=$H$5-B14	=B$11-B14	=B$12-B14	=B$13-B14	=C14	=B$15-B14	
15	X_4	3,75	=$H$5-B15	=B$11-B15	=B$12-B15	=B$13-B15	=B$14-B15	=C15	
16									
17									
18									
19									
20									
21									

Рис. 4.2

10. Нули, полученные по диагонали, следует заменить ссылками на ячейки **C11:C15** (рис. 4.2) Объясните почему? Так же объясните, почему используются смешанные ссылки.

11. Принцип составления остальных формул показан на рис. 4.3.

B	C	D	E	F	G	H	I	J
Исходные данные			**Искомые значения**			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа	
Xi	Yi	h	Xi*	L_5(Xi*)				
0,75	2,5	=(B5-B4)/2	=B4+$D$4			Хтек=Xi*	L_5(Хтек)	
1,5	1,2		=B5+$D$4			=E4	=C16*J16	
2,25	1,12		=B6+$D$4					
3	2,25		=B7+$D$4					
3,75	4,48		=B8+$D$4					
Xi	Хтек-Xi	X_0-Xi	X_1-Xi	X_2-Xi	X_3-Xi	X_4-Xi	П	Yi/П
=B4	=$H$5-B11	=C11	=B$12-B11	=B$13-B11	=B$14-B11	=B$15-B11	=ПРОИЗВЕД(D11:H11)	=C4/I11
1,5	=$H$5-B12	=B$11-B12	=C12	=B$13-B12	=B$14-B12	=B$15-B12	=ПРОИЗВЕД(D12:H12)	=C5/I12
2,25	=$H$5-B13	=B$11-B13	=B$12-B13	=C13	=B$14-B13	=B$15-B13	=ПРОИЗВЕД(D13:H13)	=C6/I13
3	=$H$5-B14	=B$11-B14	=B$12-B14	=B$13-B14	=C14	=B$15-B14	=ПРОИЗВЕД(D14:H14)	=C7/I14
3,75	=$H$5-B15	=B$11-B15	=B$12-B15	=B$13-B15	=B$14-B15	=C15	=ПРОИЗВЕД(D15:H15)	=C8/I15
П=	=ПРОИЗВЕД(C11:C15)							=СУММ(J11:J15)

Рис. 4.3

В итоге, в ячейке **I5** получим значение многочлена Лагранжа $L_5 = 1{,}701$ при $x_0^* = 1{,}125$ (рис. 4.4).

I5 =C16*J16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		**Исходные данные**			**Искомые значения**			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа		
3		Xi	Yi	h	Xi*	L_5(Xi*)					
4	X_0	0,75	2,5	0,375	1,125			Хтек=Xi	L_5(Хтек)		
5	X_1	1,5	1,2		1,875			1,125	1,701		
6	X_2	2,25	1,12		2,625						
7	X_3	3	2,25		3,375						
8	X_4	3,75	4,48		4,125						
9											
10		Xi	Хтек-Xi	X_0-Xi	X_1-Xi	X_2-Xi	X_3-Xi	X_4-Xi	П	Yi/П	
11	X_0	0,750	0,375	0,375	0,750	1,500	2,250	3,000	2,848	0,878	
12	X_1	1,500	-0,375	-0,750	-0,375	0,750	1,500	2,250	0,712	1,686	
13	X_2	2,250	-1,125	-1,500	-0,750	-1,125	0,750	1,500	-1,424	-0,787	
14	X_3	3,000	-1,875	-2,250	-1,500	-0,750	-1,875	0,750	3,560	0,632	
15	X_4	3,750	-2,625	-3,000	-2,250	-1,500	-0,750	-2,625	-19,934	-0,225	
16		П=	0,779							2,184	
17											

Рис. 4.4

Указанный результат копируется в ячейку **F4**. Для этого необходимо:

– Выделить ячейку **I5**

– После щелчка правой кнопкой мыши выполнить команду (**Копировать**> **Специальная вставка** > **Значения** рис.4.5.)

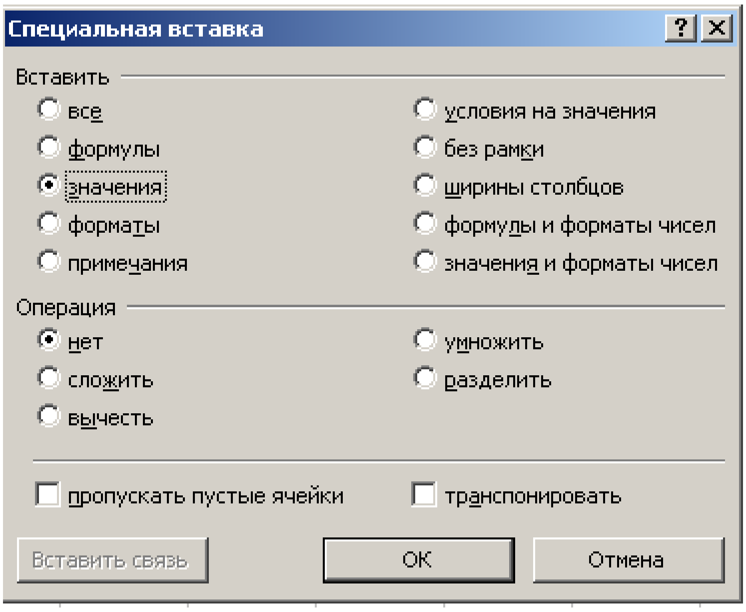


Рис. 4.5

– Выделить ячейку **F4,** выполнить команду **Вставить.**

Меняя значение аргумента $x_{тек}$ в ячейке **H5** на значения из ячеек **E5**, **E6**, **E7**, **E8**, получим остальные значения многочлена Лагранжа, которые поочередно вручную копируются в ячейки **F5:F8** (рис. 4.6).

3		Xi	Yi	h	Xi*	L_5(Xi*)		значение аргумента	многочлена Лагранжа	
4	X_0	0,75	2,5	0,375	1,125	1,709		Xтек=Xi	L_5(Xтек)	
5	X_1	1,5	1,2		1,875	1,006		4,125	5,946	
6	X_2	2,25	1,12		2,625	1,538				
7	X_3	3	2,25		3,375	3,238				
8	X_4	3,75	4,48		4,125	5,946				
9										
10		Xi	Xтек-Xi	X_0-Xi	X_1-Xi		X_3-Xi	X_4-Xi	П	Yi/П
11	X_0	0,750	3,375	3,375	0,750	X_2-Xi	2,250	3,000	17,086	0,146
12	X_1	1,5	2,625	-0,750	2,625	1,500	1,500	2,250	-9,967	-0,120
13	X_2	2,25	1,875	-1,500	-0,750	0,750	0,750	1,500	0,949	1,180
14	X_3	3	1,125	-2,250	-1,500	1,875	1,125	0,750	5,339	0,421
15	X_4	3,75	0,375	-3,000	-2,250	-0,750	-0,750	0,375	1,424	3,146
16		П=	7,008			-1,500				4,774
17										

Рис. 4.6

Изображаем исходные данные и полученные значения многочлена Лагранжа на графике.

1. Выделяем диапазон исходных данных **B4:C8**, выбираем команду

Вставка → Секция **Диаграммы** → Значок **Точечная** →**Точечная с маркерами**

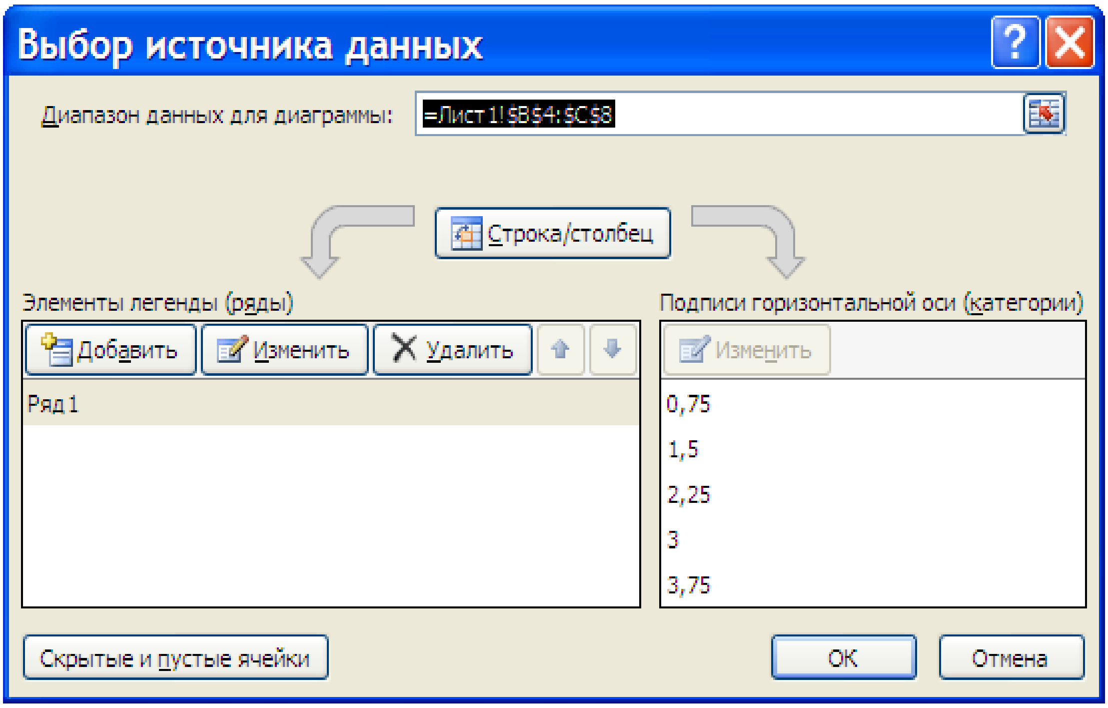
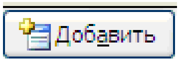


Рис. 4.7

2. После того, как график будет построен (на рисунке 4.9 ромбы), следует щелкнуть правой кнопкой мыши на графике и выбрать команду **Выбор источника данных**. Откроется окно (рис.4.7).
3. В этом окне следует щелкнуть на кнопке 

.
4. В появившемся окне (рис. 4.8)

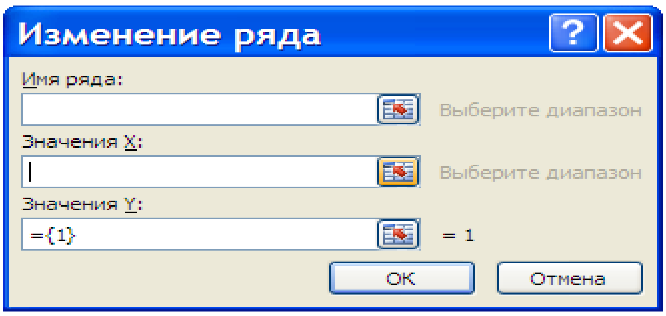


Рис. 4.8

в строку Значения <u>X</u> выбрать диапазон **E4:E8** со значениями аргумента, в которых вычисляется полином Лагранжа, а в строку

Значения Y выбрать диапазон **F4:F8** со значениями полинома Лагранжа (на рисунке 4.10 квадраты).

3		Xi	Yi	h	Xi*	L_5(Xi*)		значение аргумента	многочлена Лагранжа	
4	X_0	0,75	2,5	0,375	1,125	1,709		Хтек=Xi	L_5(Хтек)	
5	X_1	1,5	1,2		1,875	1,006		4,125	5,946	
6	X_2	2,25	1,12		2,625	1,538				
7	X_3	3	2,25		3,375	3,238				
8	X_4	3,75	4,48		4,125	5,946				
9										
10		Xi	Хтек-Xi	X_0-Xi	X_1-Xi		X_3-Xi	X_4-Xi	П	Yi/П
11	X_0	0,750	3,375	3,375	0,750	X_2-Xi	2,250	3,000	17,086	0,146
12	X_1	1,5	2,625	-0,750	2,625	1,500	1,500	2,250	-9,967	-0,120
13	X_2	2,25	1,875	-1,500	-0,750	0,750	0,750	1,500	0,949	1,180
14	X_3	3	1,125	-2,250	-1,500	1,875	1,125	0,750	5,339	0,421
15	X_4	3,75	0,375	-3,000	-2,250	-0,750	-0,750	0,375	1,424	3,146
16		П=	7,008			-1,500				4,774

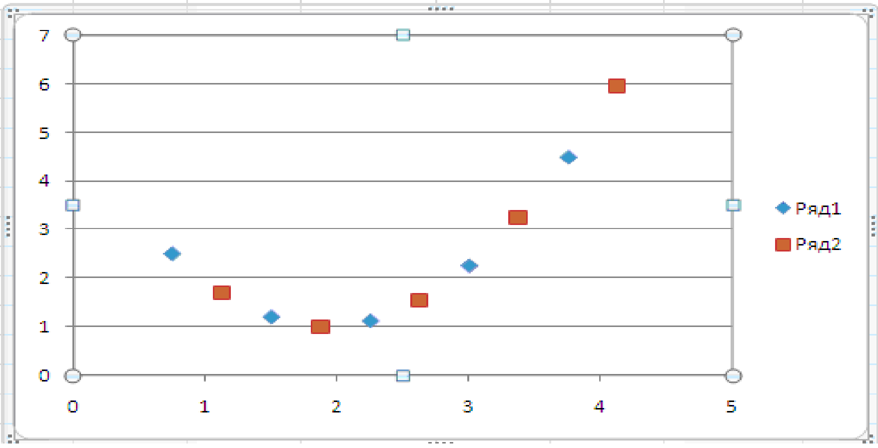


Рис. 4.9

Если изменить количество узлов интерполяции, то интерполяционный многочлен Лагранжа требуется строить заново. Это его недостаток.

Пример 4.2. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента x = 1,3833 с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, если функция задана таблично в конечном числе точек.

x	*y*
1,375	2,04192
1,38	2,17744
1,385	2,32016
1,39	2,47069
1,395	2,62968
1,4	2,79788

Ответ:

Результат=	2,271

4.2. Погрешность интерполяции

Пусть $L_n(x)$ − интерполяционный полином Лагранжа, построенный для функции $f(x)$ по узлам интерполяции $x_0, x_1,...x_n$ отрезка $[a,b]$. Можно написать

$$f(x) \approx L_n(x).$$

Разность $f(x) - L_n(x)$ определяет погрешность интерполяции. Эта разность называется также *остаточным членом интерполяционной формулы* и обозначается $R_n(x)$.

Остаточный член интерполяционной формулы имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x),$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$,

$f^{(n+1)}(\xi)$ − производная (n+1)-го порядка функции $f(x)$ в некоторой точке $\xi \in [a,b]$.

Если максимальное значение производной равно

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} | f^{(n+1)}(x) |,$$

то можно записать формулу для оценки остаточного члена:

$$| R_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot | \omega_{n+1}(x) |.$$

Следовательно, для того чтобы оценить погрешность интерполяции, необходима некоторая дополнительная информация об исходной функции.

Такой информацией является производная порядка $n+1$, которую не так просто найти. Применение формулы погрешности возможно, только если функция дифференцируема $n+1$ раз.

Проанализировав поведение функции $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$, можно сделать вывод о том, что погрешность интерполяции $R_n(x)$ в среднем будет тем выше, чем ближе точка x находится к концам отрезка [a,b]. Если же использовать интерполяционный полином для определения значения функции вне отрезка, то погрешность возрастает существенно.

Существует один и только один интерполяционный полином при заданном наборе узлов интерполяции.

Повышение точности целесообразно производить за счет уменьшения величины шага.

Повышение степени интерполяционного полинома также уменьшает погрешность, однако здесь не всегда ясно поведение производной $f^{(n+1)}(x)$ при увеличении n, поэтому на практике стараются использовать полиномы малой степени (линейную и квадратичную интерполяцию, сплайны).

Пример 4.3. Определить остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа для функции $y = \sqrt{x}$ в точке x=115, выбрав узлы интерполяции 100, 121, 144.

Решение

Имеем $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \quad y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}$.

Отсюда $M_3 = \max|y'''(x)| = \frac{3}{8}10^{-5}$ при $100 \le x \le 144$.

Тогда, $|R_2| \le \frac{3}{8}10^{-5}\,|(115-100)(115-121)(115-144)| \le 1\cdot 6\cdot 10^{-3}$.

4.3. Варианты заданий

Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в равностоящих узлах таблицы.

Х	**У**	**№ варианта**	Значения Х при которых необходимо найти значение полинома
1,375	5,04192	1	1,3832
1,380	5,17744	7	1,3926
1,385	5,32016	13	1,3862
1,390	5,47069	19	1,3934
1,395	5,62968	25	1,3866
1,400	5,79788		

Х	**У**	**№ варианта**	Значения Х при которых необходимо найти значение полинома
0,115	8,65729	2	0,1264
0,120	8,29329	8	0,1315
0,125	7,95829	14	0,1232
0,130	7,64893	20	0,1334
0,135	7,36235	26	0,1286
0,140	7,09613		

Х	У	**№ варианта**	Значения Х при которых необходимо найти значение полинома
0,150	6,61659	3	0,1521
0,155	6,39989	9	0,1611
0,160	6,19658	15	0,1662
0,165	6,00551	21	0,1542
0,170	5,82558	27	0,1625
0,175	5,65583		

Х	**У**	**№ варианта**	Значения Х при которых необходимо найти значение полинома
0,180	5,61543	4	0,1838
0,185	5,46693	10	0,1875
0,190	5,32634	16	0,1944
0,195	5,19304	22	0,1976
0,200	5,06649	28	0,2038
0,205	4,94619		

X	У	№ варианта	Значения X при которых необходимо найти значение полинома
0,210	4,83170	5	0,2121
0,215	4,72261	11	0,2165
0,220	4,61855	17	0,2232
0,225	4,51919	23	0,2263
0,230	4,42422	29	0,2244
0,235	4,33337		

X	У	№ варианта	Значения X при которых необходимо найти значение полинома
1,415	0,888551	6	1,4179
1,420	0,889599	12	1,4258
1,425	0,890637	18	1,4396
1,430	0,891667	24	1,4236
1,435	0,892687	30	1,4315
1,440	0,893698		

4.4. Контрольные вопросы

1. Сущность метода интерполяции.
2. Интерполяционный полином Лагранжа.
3. Что влияет на точность интерполяции в методе Лагранжа?
4. Можно ли добавить новые узлы интерполяции при использовании метода Лагранжа?
5. Можно ли добавить новые узлы интерполяции произвольно при использовании метода?
6. Как повлияет дополнительная $n+1$ точка исходных данных внутри отрезка $[x_0, x_n]$ на точность интерполяции?
7. Как определить погрешность интерполяции в узле?
8. Как влияет количество узлов интерполяции на точность интерполяции?
9. Каким путем в общем случае можно повысить точность интерполяции?

ГЛАВА 5. АППРОКСИМАЦИЯ

Лабораторная работа №5

Аппроксимация – это замена таблицы значений аналитическим видом функции.

Построение аппроксимирующей зависимости по экспериментальным данным состоит из 2-х этапов:

- подбор общего вида аппроксимирующей зависимости;
- определение наилучших значений параметров этой зависимости.

Если характер зависимости не известен, то экспериментальные точки наносят на график и примерно выбирают зависимость из геометрических соображений путем сравнения ее с известными функциями (показательной, логарифмической и т.д.).

5.1. Аппроксимация линейной функции по методу наименьших квадратов

Пусть в результате измерений получена таблица (табл. 5.1) зависимости одной величины y от другой

Таблица 5.1.

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_{n-1}

Требуется найти аналитический вид функции, которая в точках $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ будет иметь значения достаточно близкие к $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Аппроксимирующую функцию будем искать в виде:

$$y = kx + b \tag{5.1}$$

В качестве критерия близости значений функции к значениям в табл. 5.1 возьмем квадратичный критерий качества

$$I=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(kx_i+b\right)\right)^2 \tag{5.2}$$

Необходимо подобрать коэффициенты k и b так, чтобы критерий качества стремился к минимуму. Как известно, необходимое условие минимума – равенство нулю первых производных функции.

Найдем первые производные по неизвестным k и b и приравняем к нулю.

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(kx_i+b\right)\right]\cdot x_i=0 \\ -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(kx_i+b\right)\right]\cdot 1=0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Разделим каждое из уравнений на -2 поставим коэффициенты перед неизвестными.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot k+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot k+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}1}_{n}\cdot b=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \tag{5.4}$$

Решим систему уравнений (5.4) методом алгебраического сложения. Для этого первое уравнение умножим на n, второе на $\sum_{l=0}^{n-1}x_i$ и вычтем из первого уравнения второе. Затем выразим неизвестное $k=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$.

Из второго уравнения определим $b=\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-k\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$.

Пример 5.1. Пусть в результате эксперимента получена таблица значений.

Таблица 5.2.

x	1,1	1,7	2,4	3,0	3,7	4,5	5,1	5,8
y	0,3	0,6	1,1	1,7	2,3	3,0	3,8	4,6

Эти табличные данные можно изобразить графически, построив точечный график.

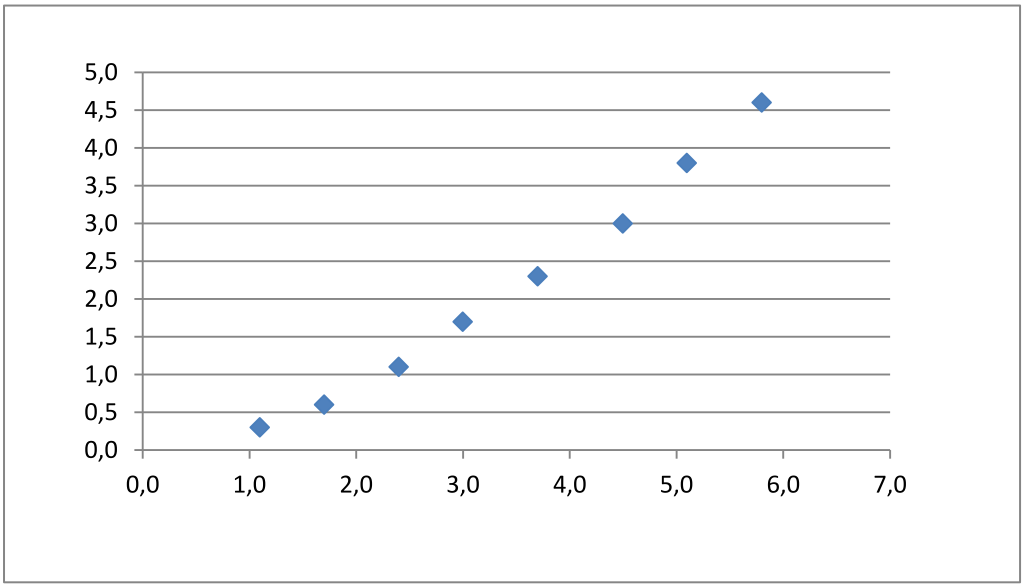


Рис. 5.1

Нужно подобрать формулу, выражающую приближенно зависимость y от x. Конечно, существует «точная» функция $y = f(x)$, но так как она неизвестна, то нужно подобрать функцию $y = \varphi(x)$, близкую к $f(x)$.

Самый естественный путь – это отыскание интерполирующей функции, например, отыскание многочлена $P(x)$, принимающего в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Однако, этот способ имеет недостатки. Допустим, что зависимость между x и y на самом деле выражается простой гладкой кривой (рис. 5.2 – пунктирная линия). Но вследствие неизбежных случайных ошибок измерения значения, найденные экспериментально, несколько уклоняются в ту или другую сторону. Будем искать многочлен n-й степени, график которого проходит через соответствующие точки. Если многочлен будет достаточно высокой степени, то его график может оказаться чрезмерно извилистой линией (рис. 5.1 – толстая линия), не выражающей ход изменения функции. В то же время нет необходимости требовать, чтобы кривая действительно проходила через все эти точки, т.к. сами точки получены с погрешностями, неизбежными при измерениях.

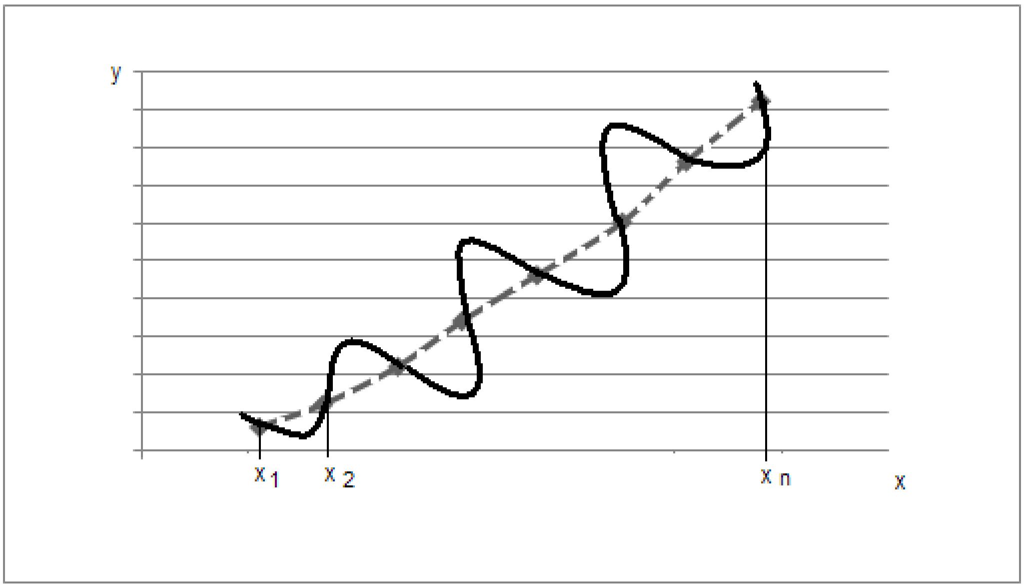


Рис. 5.2

Рассмотрим точечный график, построенный на основе значений функции, данных в таблице. Заметив особенности расположения точек, подбираем тип аналитически выраженной функции, соответствующей этому расположению точек. Записываем выбранную функцию с параметрами. Подберем параметры так, чтобы точки, полученные экспериментально, были как можно ближе к кривой (но не обязательно должны лежать на кривой). Поиск параметров делают по способу наименьших квадратов.

При подборе вида приближающей функции из рассмотрения графика следует учесть следующее. Рассматривая точки на чертеже, намечают плавную линию, проходящую вблизи этих точек. При этом **не** стремятся к тому, чтобы линия проходила через эти точки, т.к. случайные отклонения при измерении бывают в ту и другую сторону. Поэтому плавную кривую нужно проводить так, чтобы точки располагались по обе стороны от кривой. Вид проведенной линии позволяет делать заключение, какая же аналитически заданная функция подходит в качестве приближения. Для нашего примера расположение точек таково, что за график искомой функции можно взять прямую.

Поэтому поставим задачу о нахождении приближенного выражения величины s в виде линейной функции: $s = kt + b$. Находим коэффициенты k и b по способу наименьших квадратов. Для этого вычисляем $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

1. В рабочий лист запишем исходные данные и выполним необходимые вычисления.

1		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	сумма
2	xi	1,100	1,700	2,400	3,000	3,700	4,500	5,100	5,800	27,300
3	yi	0,300	0,600	1,100	1,700	2,300	3,000	3,800	4,600	17,400
4	xi*yi	0,330	1,020	2,640	5,100	8,510	13,500	19,380	26,680	77,160
5	xi^2	1,210	2,890	5,760	9,000	13,690	20,250	26,010	33,640	112,450

Рис. 5.3

2. По формулам для линейной функции находим k и b.

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - k\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Нахождение k отображено на рис. 5.4, а нахождение b на рис. 5.5.

B7 =(8*J4-J2*J3)/(8*J5-J2*J2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	сумма
2	xi	1,100	1,700	2,400	3,000	3,700	4,500	5,100	5,800	27,300
3	yi	0,300	0,600	1,100	1,700	2,300	3,000	3,800	4,600	17,400
4	xi*yi	0,330	1,020	2,640	5,100	8,510	13,500	19,380	26,680	77,160
5	xi^2	1,210	2,890	5,760	9,000	13,690	20,250	26,010	33,640	112,450
6										
7	k	0,9219								

Рис. 5.4

B8 =(J3-B7*J2)/8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	сумма
2	xi	1,100	1,700	2,400	3,000	3,700	4,500	5,100	5,800	27,300
3	yi	0,300	0,600	1,100	1,700	2,300	3,000	3,800	4,600	17,400
4	xi*yi	0,330	1,020	2,640	5,100	8,510	13,500	19,380	26,680	77,160
5	xi^2	1,210	2,890	5,760	9,000	13,690	20,250	26,010	33,640	112,450
6										
7	k	0,9219								
8	b	-0,9710								

Рис. 5.5

Итак, искомая функция $s = 0.921t - 0.971$.

3. Выполним оценку погрешности метода. Для этого вычислим значение критерия качества $I = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (kx_i + b)\right)^2$ (рис.5.6).

B15 =B14-($B$7*B13+$B$8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10									
11									
12				Вычисление критерия качества					
13	**xi**	1,100	1,700	2,400	3,000	3,700	4,500	5,100	5,800
14	**yi**	0,300	0,600	1,100	1,700	2,300	3,000	3,800	4,600
15	**yi-(kxi+b)**	0,257	0,004	-0,142	-0,095	-0,140	-0,178	0,069	0,224
16	**yi-(kxi+b)^2**	0,066	0,000	0,020	0,009	0,020	0,032	0,005	0,050
17	**I**	0,2011							

Рис. 5.6

Так как $I = 0.201 \to \min$, то прямая $s = 0.921t - 0.971$ лучше приближает исходные данные.

5.2. Метод квадратичной аппроксимации

Метод квадратичной аппроксимации относится к семейству методов *полиномиальной аппроксимации*. Идея метода полиномиальной аппроксимации состоит в том, что в некоторой окрестности минимума функции она аппроксимируется полиномом достаточно высокого порядка, и в качестве точки минимума функции (или в качестве очередного приближения к этой точке) принимается точка минимума аппроксимирующего полинома.

В качестве аппроксимирующих полиномов чаще всего используются полиномы второго и третьего порядков, т.е. квадратичная и кубическая аппроксимации.

Рассмотрим случай аппроксимации полиномом второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (5.5)$$

Критерий качества запишется в виде

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left[y(x_i) - y_i \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - y_i \right]^2 \to \min$$

Вычислим производные и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - y_i \right] = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - y_i \right] x_i = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - y_i \right] x_i^2 = 0$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем её к виду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_1 + na_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (5.6)$$

Система уравнений (5.6) служит для нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2 полинома (5.5).

Пример 5.2. При исследовании влияния температуры на ход хронометра ω получены следующие результаты, приведенные в таблице.

Таблица 5.3.

$t°,C$	5,0	9,6	16,0	19,6	24,4	29,8	34,4
ω	2,60	2,01	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25

Требуется получить выражение этой зависимости в виде формулы.

Построим точечный график.

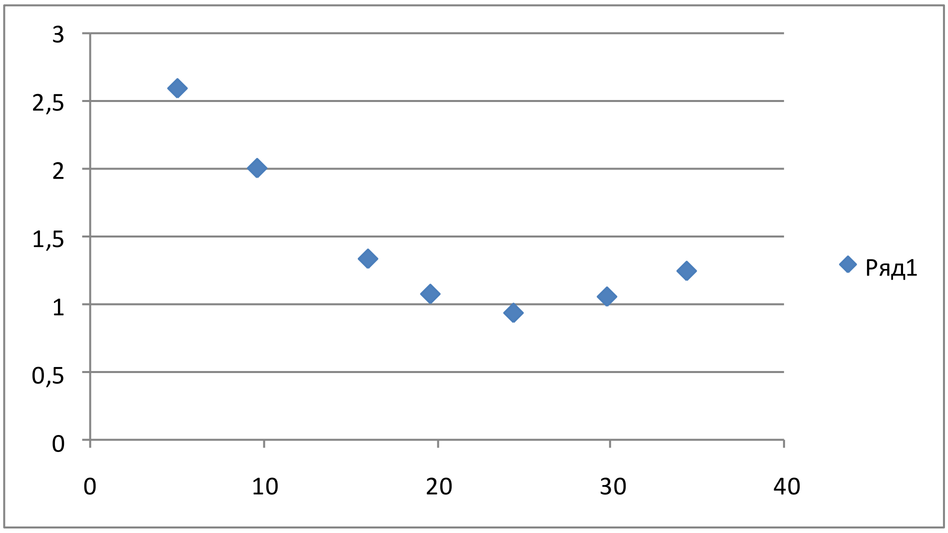


Рис. 5.7

За приближенную кривую можно принять квадратичную параболу с осью, параллельной оси OY. Приближенная формула будет:

$$\varphi(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 .$$

Пусть нас интересуют не сами значения температуры в обычной шкале, а отклонение температуры от $15°$. Тогда за аргумент удобно взять не t, а $(t-15)$.

Поэтому можно будет записать искомую функцию так:

$$\varphi(t) = a_2 (t-15)^2 + a_1 (t-15) + a_0 .$$

Введем новую переменную (во избежание вычислений больших расчетов)

$$x = \frac{t-15}{15} .$$

Тогда функцию запишем так:

$$\varphi_1(t) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Таблица значений будет выглядеть таким образом

Таблица 5.4.

x	-0,667	-0,360	0,067	0,307	0,627	0,987	1,293
ω	2,60	2,01	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25

1. Вычисляем $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^4$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$.

22		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	сумма
23	xi	-0,6670	-0,3600	0,0670	0,3070	0,6270	0,9870	1,2930	2,2540
24	xi^2	0,4449	0,1296	0,0045	0,0942	0,3931	0,9742	1,6718	3,7124
25	xi^3	-0,2967	-0,0467	0,0003	0,0289	0,2465	0,9615	2,1617	3,0555
26	xi^4	0,1979	0,0168	0,0000	0,0089	0,1546	0,9490	2,7951	4,1223
27	yi	2,6000	2,0100	1,3400	1,0800	0,9400	1,0600	1,2500	10,2800
28	xi*yi	-1,7342	-0,7236	0,0898	0,3316	0,5894	1,0462	1,6163	1,2154
29	xi^2*yi	1,1567	0,2605	0,0060	0,1018	0,3695	1,0326	2,0898	5,0170

Рис. 5.8

2. Поставив найденные значения в формулу (5.6), получим систему

$$4.1223a_2 + 3.0555a_1 + 3.7124a_0 = 5.0170$$

$$3.0555\,a_2 + 3.7124a_1 + 2.2540a_0 = 1.2154$$

$$3.7124a_2 + 2.2540a_1 + 7a_0 = 10.2800$$

Запишем ее на рабочий лист (рис. 5.8).

x^4a2+x^3a1+x^2a0	4,1223	3,0555	3,7124	xi^2*yi	5,0170
x^3a2+x^2a1+xa0	3,0555	3,7124	2,2540	xi*yi	1,2154
x^2a2+xa1+na0	3,7124	2,2540	7,0000	yi	10,2800

Рис. 5.9

3. Из этой системы находим коэффициенты a_0, a_1, a_2. Для этого вычислим обратную матрицу (рис.5.10) и умножим обратную матрицу на вектор-столбец правой части (рис.5.11).

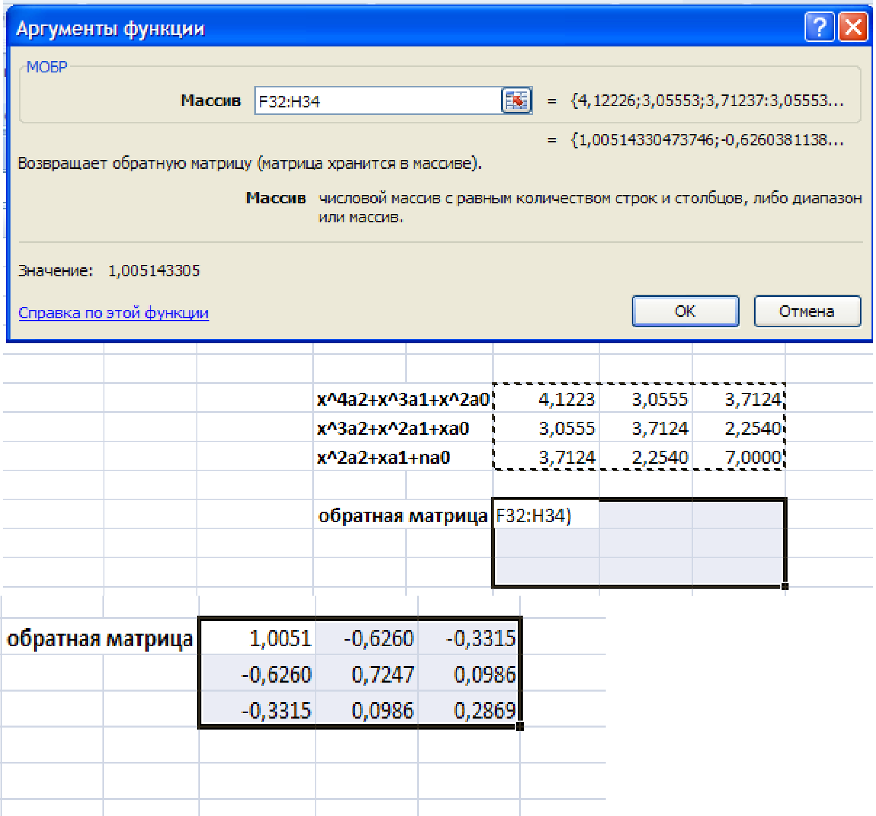


Рис. 5.10

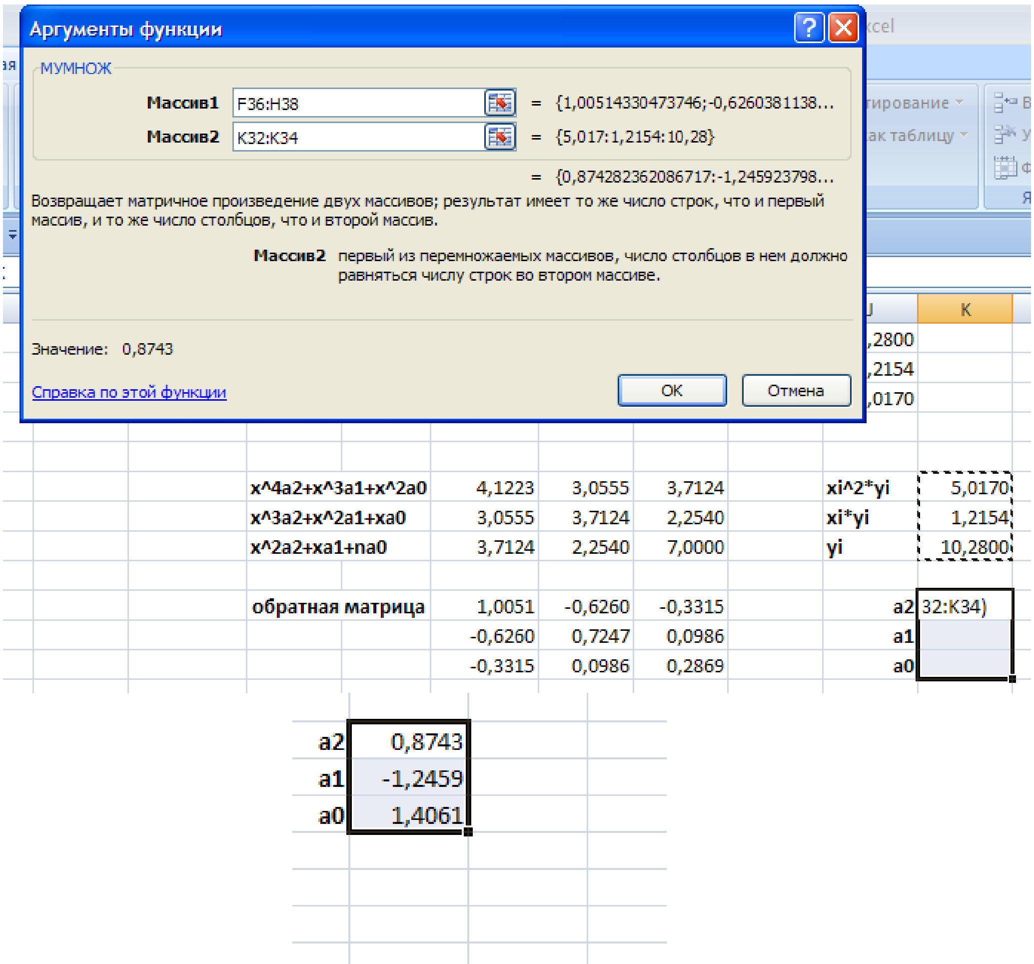


Рис. 5.11

Полученный в результате умножения вектор состоит из значений коэффициентов.

Уравнение функции запишется в виде:

$$\varphi(t) = 0.8743x^2 + 1.2459x + 1.4061.$$

Возвращаясь к аргументу t, получим такое выражение функции:

$$\omega = 0.8743(t-15)^2 - 1.2459(t-15) + 1.4061$$

5.3. Варианты заданий

В результате эксперимента получена таблица значений. Требуется получить выражение этой зависимости в виде формулы.

Вариант 1.

x	1,415	1,420	1,425	1,430	1,435	1,440	1,445	1,450	1,455	1,460	1,465
y	0,8886	0,8900	0,8906	0,8917	0,8927	0,8940	0,8947	0,8957	0,8967	0,8977	0,8986

Вариант 2.

x	0,101	0,106	0,111	0,116	0,121	0,126	0,131	0,136	0,141	0,146	0,151
y	1,2618	1,2764	1,2912	1,3061	0,3213	1,3366	1,3521	1,3677	1,3836	1,3995	1,4157

Вариант 3.

x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
y	0,8607	0,8187	0,7788	0,7408	0,7046	0,6703	0,6376	0,6065	0,5769	0,5488	0,5220

Вариант 4.

x	0,180	0,185	0,190	0,195	0,200	0,205	0,210	0,215	0,220	0,225	0,230
y	5,6154	5,4669	5,3263	5,1930	5,0664	4,9461	4,8317	4,7226	4,6185	4,5191	4,4242

Вариант 5.

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00
y	33,115	34,813	36,598	38,474	40,447	42,521	44,701	46,993	49,402	51,935	54,598

Вариант 6.

x	0,115	0,120	0,125	0,130	0,135	0,140	0,145	0,150	0,155	0,160	0,165
y	8,6572	8,2932	7,9582	7,6489	7,3623	7,0961	6,8481	6,6165	6,3998	6,1965	6,0055

Вариант 7.

x	1,340	1,345	1,350	1,355	1,360	1,365	1,370	1,375	1,380	1,385	1,390
y	4,2556	4,3532	4,4552	4,5618	4,6734	4,7903	4,9130	5,0419	5,1774	5,3201	5,4706

Вариант 8.

x	0,01	0,06	0,11	0,16	0,21	0,26	0,31	0,36	0,41	0,46	0,51
y	0,9918	0,9519	0,9136	0,8769	0,8416	0,8077	0,7753	0,7441	0,7141	0,6854	0,6579

Вариант 9.

x	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
y	4,481	4,953	5,473	6,049	6,685	7,389	8,166	9,025	9,974	11,023	12,182

Вариант 10.

x	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0.52	0,53	0,54	0,55
y	20,194	19,613	18,942	18,174	17,301	16,312	15,198	13,948	12,550	10,993	9,264

Вариант 11.

x	1,345	1,350	1,355	1,360	1,365	1,370	1,375	1,380	1,385	1,390	1,395
y	4,3532	4,4552	4,5618	4,6734	4,7903	4,9130	5,0419	5,1774	5,3201	5,4706	5,6296

Вариант 12.

x	0,130	0,135	0,140	0,145	0,150	0,155	0,160	0,165	0,170	0,175	0,180
y	7,6489	7,3623	7,0961	6,8481	6,6165	6,3998	6,1965	6,0055	5,8255	5,6558	5,4954

ГЛАВА 6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ МЕТОДОВ

***Лабораторная работа* №6**

Нахождение первообразной функции иногда весьма сложно, кроме того как известно не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определённый интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим несколько формул приближенного вычисления определённого интеграла, основанные на геометрическом смысле определённого интеграла

6.1. Метод прямоугольников

Как говорилось выше, вычисление интеграла $S=\int_a^b f(x)dx$ равносильно вычислению площади некоторой фигуры – криволинейной трапеции с параллельными «основаниями» $x=a$, $x=b$ и «боковыми сторонами» $y=0$, $y=f(x)$ (рис.6.1).

Разобьём интервал интегрирования на *n* равных частей, каждая длиной

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

Приближенное значение интеграла получается в виде суммы площадей n прямоугольников, высота которых равна значению $f(x)$ на левом краю каждого подинтервала (рис.6.1).

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx hy_0+hy_1+\ldots+hy_{n-1}=h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}).$$

То есть формула численного интегрирования имеет вид:

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \tag{6.1}$$

и называется **формулой «левых» прямоугольников**.

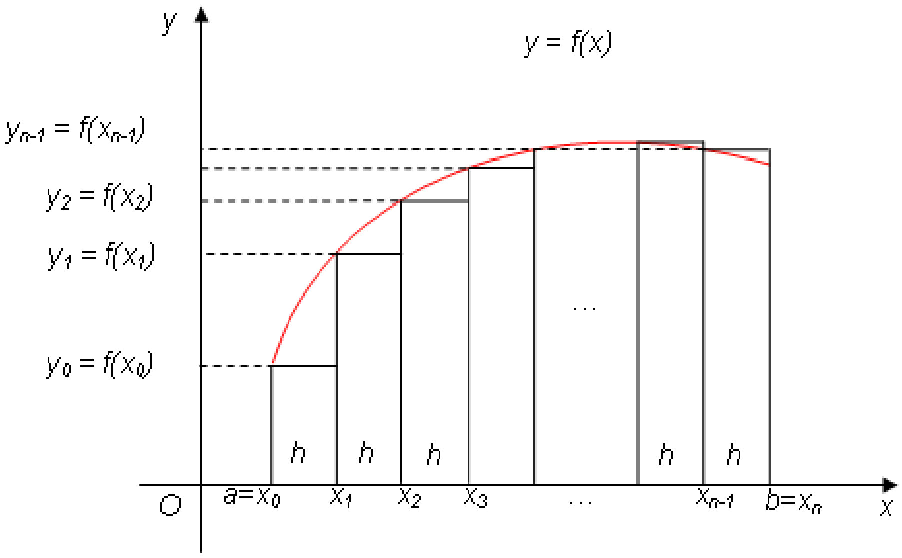


Рис. 6.1 Геометрическая интерпретация метода «левых» прямоугольников

Если в качестве приближенного значения площади для каждого подинтервала принять площадь прямоугольника, высота которого равна значению $f(x)$ на правом краю подинтервала (рис.6.2), то формула численного интегрирования имеет вид:

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{6.2}$$

и называется **формулой «правых» прямоугольников**.

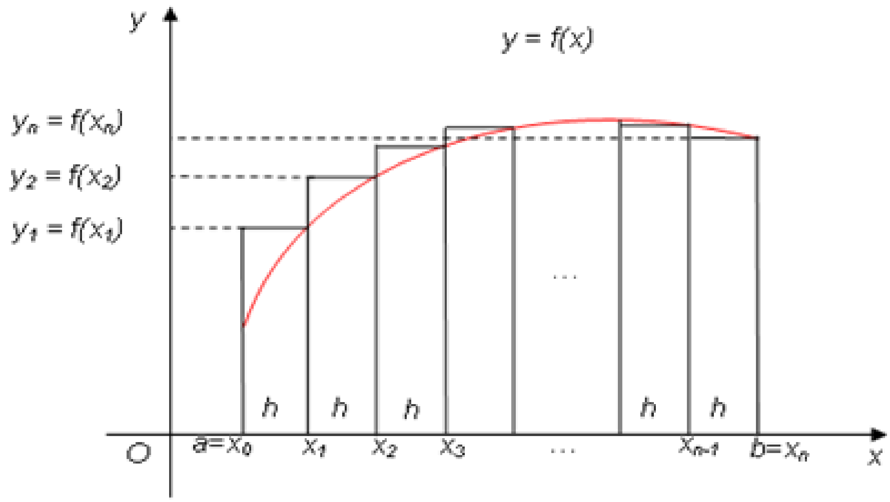


Рис. 6.2 Геометрическая интерпретация метода «правых» прямоугольников

Существует третья модификация метода прямоугольников – **метод «средних» прямоугольников**. В этом случае в качестве приближенного значения площади для каждого подинтервала принимается площадь прямоугольника, высота которого равна значению $f(x)$в средней точке подинтервала (рис. 6.3).

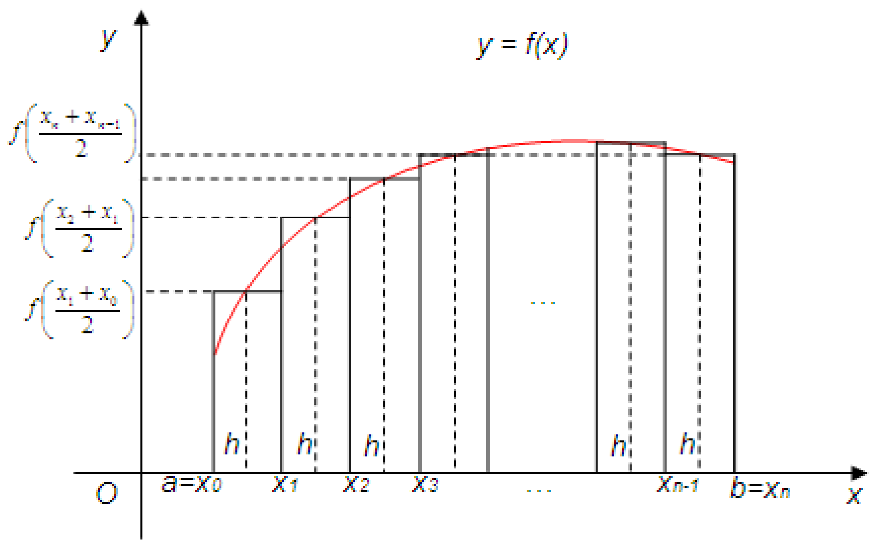


Рис. 6.3 Геометрическая интерпретация метода «средних» прямоугольников

Тогда формула численного интегрирования имеет вид:

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \qquad (6.3)$$

Абсолютная погрешность приближенных равенств оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot M_2 \qquad (6.4)$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$,

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b\text{ - }a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \right|$$

Метод прямоугольников – это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования. Очевидно, что чем больше будет число n отрезков разбиения, тем более точный результат дадут формулы. Однако увеличение числа отрезков разбиения промежутка интегрирования не всегда возможно. Поэтому большой интерес представляют формулы, дающие более точные результаты при том же числе точек разбиения.

6.2. Метод трапеций

В этом методе отрезок $[a,b]$ так же разбивается на n равных частей. На каждом отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ кривая $y = f(x)$ заменяется прямой, проходящей через две известные точки с координатами $(x_i; f(x_i))$ и $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$, где $i = 0,1,..,n$ и строится прямоугольная трапеция с высотой $h = \frac{b-a}{n}$ (рис. 6.4).

Пусть $y_0, y_1,.., y_n$ – соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы для этих значений примут вид:

$$x_i = a + h \cdot i;\ y_i = f(x_i);\ i = 0,1,..,n;\ h = \frac{b-a}{n}.$$

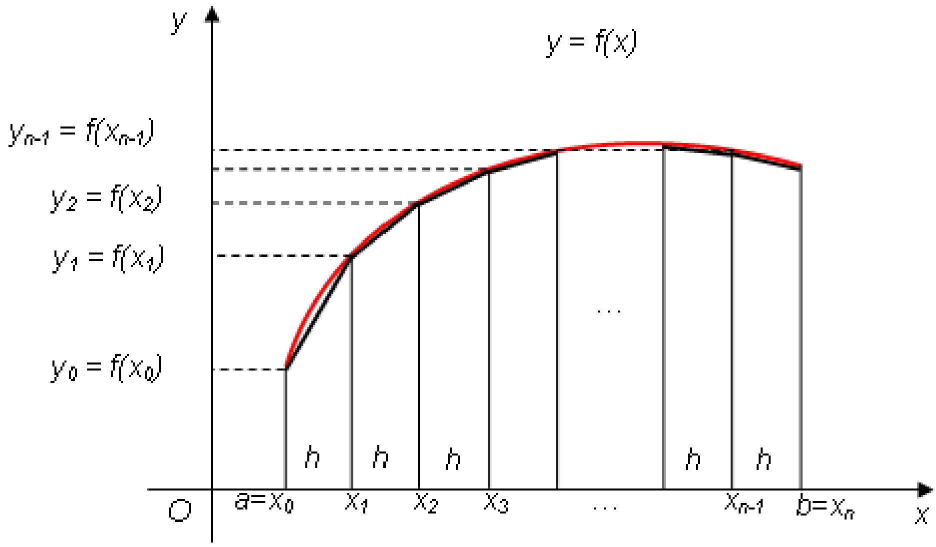


Рис. 6.4 Геометрическая интерпретация метода трапеций

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} ($i = 0,1,..,n$). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеции с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_n \right) \qquad (6.5)$$

Формула (6.5) называется **формулой трапецией**.

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 \qquad (6.6)$$

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$

6.3. Метод парабол (Симпсона)

Если заменить график функций $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3}(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) \qquad (6.7)$$

Формула (6.7) называется **формулой парабол (методом Симпсона)**, проходящей через три точки.

Абсолютная погрешность вычисления по формуле (6.7) оценивается соотношением:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4 \qquad (6.8)$$

где $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{IV}(x) \right|$.

6.4. Вычисление определенных интегралов с помощью табличного процессора MS Office Excel

Пример 6.1. Реализовать нахождение интеграла $\int_0^{3,2} \sqrt{x^4 - x^3 + 8}dx$, используя формулы методов левых, правых и средних прямоугольников при *n=10*.

Найдём значение интеграла заданной функции для использования его в дальнейшем решении для сравнения:

$$I = \int_0^{3,2} \sqrt{x^4 - x^3 + 8}dx \approx 13,43187999$$

Для нахождения определённого интеграла методом левых и правых прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции, с входными параметрами которыми являются: *a*, *b* – левая и правая границы интервала, *n* – количество разбиений, *h* – шаг интегрирования (рис. 6.5).

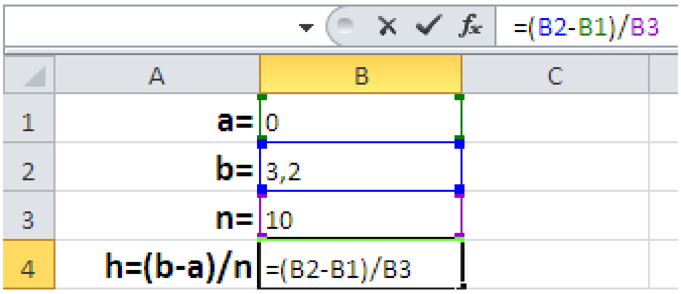


Рис 6.5 Входные данные для метода «левых» и «правых» прямоугольников

Далее вводим в ячейку *A6* текст *i*, в *B6* – *x*, в *C6* – $y_0,..,y_{n-1}$ *(для левых)* и *D6* – y_1, y_n *(для правых)*. Точки разбиения на отрезке [0;3,2] определяем по формуле ***=B7+$B$4*** и копируем эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек *B8:B17* (рис. 6.6).

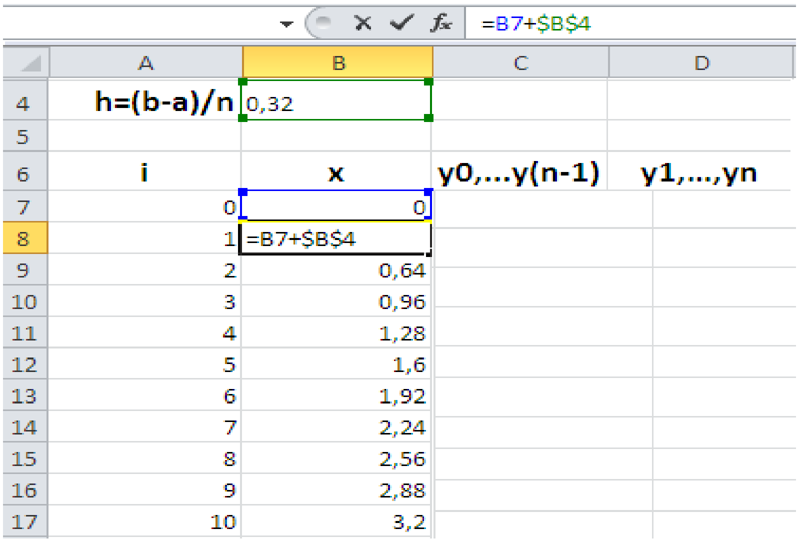


Рис. 6.6 Нахождения точек разбиения на отрезке

Следующим действием определим значения подынтегральной функции в точках деления отрезка: в ячейку *C7* вводим формулу ***=КОРЕНЬ*(*B7^4-B7^3+8*)**, автозаполнением копируем эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек C8:C16. аналогично в ячейку *D8* вводим формулу ***=КОРЕНЬ*(*B8^4-B8^3+8*)**, также копируемэту формулу методом протягивания в *D9:D17* (рис. 6.7).

=КОРЕНЬ(B8^4-B8^3+8)

	A	B	C	D
6	i	x	y0,...y(n-1)	y1,...,yn
7	0	0	2,828427125	
8	1	0,32	=КОРЕНЬ(B8^4-B8^3+8)	2,824485397
9	2	0,64	2,811694891	2,811694891
10	3	0,96	2,822164162	2,822164162
11	4	1,28	2,930392902	2,930392902
12	5	1,6	3,233821269	3,233821269
13	6	1,92	3,809416879	3,809416879
14	7	2,24	4,683682927	4,683682927
15	8	2,56	5,845721252	5,845721252
16	9	2,88	7,273871002	7,273871002
17	10	3,2		8,949279301

Рис. 6.7 Вычисления значений подынтегральной функции метода «левых» и «правых» прямоугольников в точках деления отрезка

Чтобы вычислить интеграл по формуле (6.1) метода «левых» прямоугольников, в ячейку *C18* записываем формулу ***=СУММ* (*C7:C16*)**, в ячейку *C19* вводим формулу ***=B4*C18*** (рис.6.8).

C19 {=B4*C18}

	A	B	C
4	h=(b-a)/n	0,32	
5			
6	i	x	y0,...y(n-1)
7	0	0	2,828427125
8	1	0,32	2,824485397
9	2	0,64	2,811694891
10	3	0,96	2,822164162
11	4	1,28	2,930392902
12	5	1,6	3,233821269
13	6	1,92	3,809416879
14	7	2,24	4,683682927
15	8	2,56	5,845721252
16	9	2,88	7,273871002
17	10	3,2	
18		СУММА=	39,06367781
19		ИНТЕГРАЛ=	12,5003769
20			МЕТОД
21			ЛЕВЫХ
22			ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рис. 6.8 Вычисление интеграла по формуле «левых» прямоугольников

$$I_{\text{ё}} = \int\limits_{0}^{3,2} \sqrt{x^4 - x^3 + 8} dx \approx 12{,}5003769.$$

Чтобы вычислить интеграл по формуле (6.2) метода «правых» прямоугольников, в ячейку *D18* записываем формулу ***=СУММ* (*D7:D17*)**, а в ячейку *D19* формулу ***=B4*D18*** (рис. 6.9).

D19 f_x =B4*D18

	A	B	D
4	h=(b-a)/n	0,32	
5			
6	i	x	y1,...,yn
7	0	0	
8	1	0,32	2,824485397
9	2	0,64	2,811694891
10	3	0,96	2,822164162
11	4	1,28	2,930392902
12	5	1,6	3,233821269
13	6	1,92	3,809416879
14	7	2,24	4,683682927
15	8	2,56	5,845721252
16	9	2,88	7,273871002
17	10	3,2	8,949279301
18		СУММА=	45,18452998
19		ИНТЕГРАЛ=	14,45904959
20			МЕТОД
21			ПРАВЫХ
22			ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рис 6.9 Вычисление интеграла по формуле «правых» прямоугольников

$$I_{\text{їð}} = \int\limits_{0}^{3,2} \sqrt{x^4 - x^3 + 8} dx \approx 14{,}45904959.$$

Для нахождения определённого интеграла методом средних прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции, с входными параметрами которой является: a,b – левая и правая границы интервала, n – количество разбиений, h – шаг интегрирования. Далее аналогично вводим в ячейку *A6* текст *i*, в *B6* – *x*, в *C6* – $x_i + h/2$, а в *D6* – $f(x_i + h/2)$ (рис.6.10).

=B7+$B$4

	A	B	C	D
1	a=	0		
2	b=	3,2		
3	n=	10		
4	h=(b-a)/n	0,32		
5				
6	i	x	xi+h/2	f(xi+h/2)
7	0	0		
8	1	=B7+$B$4		
9	2	0,64		
10	3	0,96		
11	4	1,28		
12	5	1,6		
13	6	1,92		
14	7	2,24		
15	8	2,56		
16	9	2,88		
17	10	3,2		

Рис. 6.10 Входные данные для метода «средних» прямоугольников

Находим точки разбиения отрезка [0;3,2], для этого вводим в ячейку *C7* формулу ***=B7+$B$4/2***, и копируем эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек *C8:C16* (рис. 11).

=B8+$B$4/2

	A	B	C	D
4	h=(b-a)/n	0,32		
5				
6	i	x	xi+h/2	f(xi+h/2)
7	0	0	0,16	
8	1	0,32	=B8+$B$4/2	
9	2	0,64	0,8	
10	3	0,96	1,12	
11	4	1,28	1,44	
12	5	1,6	1,76	
13	6	1,92	2,08	
14	7	2,24	2,4	
15	8	2,56	2,72	
16	9	2,88	3,04	
17	10	3,2		

Рис. 6.11 Нахождения точек разбиения на отрезке

Определим значения подынтегральной функции в точках деления отрезка: в ячейку *D7* вводим формулу ***=КОРЕНЬ*(*B7^4-B7^3+8*)**, автозаполнением копируем эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек *D8:D16* (рис.6.12).

=КОРЕНЬ(C8^4-C8^3+8)

	A	B	C	D
6	i	x	xi+h/2	f(xi+h/2)
7	0	0	0,16	2,827818834
8	1	0,32	0,48	=КОРЕНЬ(C8^4-C8
9	2	0,64	0,8	2,810266891
10	3	0,96	1,12	2,858074765
11	4	1,28	1,44	3,051857297
12	5	1,6	1,76	3,484730945
13	6	1,92	2,08	4,209373464
14	7	2,24	2,4	5,230066921
15	8	2,56	2,72	6,527838429
16	9	2,88	3,04	8,081627717
17	10	3,2		

Рис. 6.12 Вычисления значений подынтегральной функции «средних» прямоугольников в точках деления отрезка

Для вычисления интеграла по формуле (6.3) «средних» прямоугольников, в ячейку *D18* записываем формулу ***=СУММ(D7:D17)***, в ячейку *D19* формулу ***=B4*D18*** (рис. 6.13).

D19 =B4*D18

	A	B	C	D
4	h=(b-a)/n	0,32		
5				
6	i	x	xi+h/2	f(xi+h/2)
7	0	0	0,16	2,827818834
8	1	0,32	0,48	2,818242743
9	2	0,64	0,8	2,810266891
10	3	0,96	1,12	2,858074765
11	4	1,28	1,44	3,051857297
12	5	1,6	1,76	3,484730945
13	6	1,92	2,08	4,209373464
14	7	2,24	2,4	5,230066921
15	8	2,56	2,72	6,527838429
16	9	2,88	3,04	8,081627717
17	10	3,2		
18			СУММА=	41,89989801
19			ИНТЕГРАЛ=	13,40796736
20				МЕТОД
21				СРЕДНИХ
22				ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рис. 6.13 Вычисление интеграла по формуле метода «средних» прямоугольников

$$I_{ñð} = \int_0^{3,2} \sqrt{x^4 - x^3 + 8}dx \approx 13,407796739 .$$

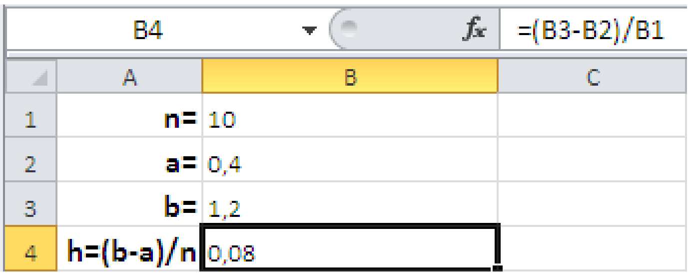
Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что в данном случае формула средних прямоугольников является более точной, чем формулы правых и левых прямоугольников.

Пример 6.2. Найти интеграл $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx$, используя метод трапеций, при *n=10*.

Найдём значение интеграла заданной функции для использования его в дальнейшем решении для сравнения:

$$I = \int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx \approx 0{,}1989882210 .$$

Для нахождения определенного интеграла методом трапеций, как и в случае использования метода прямоугольников, вводим значения подынтегральной функции (рис. 6.14).



B4 =(B3-B2)/B1

	A	B	C
1	n=	10	
2	a=	0,4	
3	b=	1,2	
4	h=(b-a)/n	0,08	

Рис. 6.14 Входные данные для метода трапеций

Далее вводим в ячейку *A6* текст *i*, в *B6* – *x*, в *C6* – y_0, y_1 и *D6* – $y_1,\ldots,y_{n\text{-}1}$. Точки разбиения на отрезке [0,4; 1,2], определяем по формуле ***=B7+$B$4*** и копируем эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек *B8:B17*. Дальше определяем значения подынтегральной функции в точках деления отрезка: в ячейки *C7* и в *C17* вводим формулу ***=COS(B7)/(B7+2)***. Аналогичную формулу вводим в ячейку *D8* и протягиваем её до ячейки *D16* (рис.6.15).

C7 | f_x | =COS(B7)/(B7+2)

	A	B	C	D	E
6	i	x	y0,yn	y1,y2,...,yn-1	
7	0	0,4	0,383775414		
8	1	0,48		0,357659243	
9	2	0,56		0,330959028	
10	3	0,64		0,303824151	
11	4	0,72		0,276399165	
12	5	0,8		0,248823825	
13	6	0,88		0,221233036	
14	7	0,96		0,193756752	
15	8	1,04		0,166519821	
16	9	1,12		0,13964181	
17	10	1,2	0,113236798		

Рис. 6.15 Вычисления значений подынтегральной функции методом трапеций в точках деления отрезка

Для вычисления интеграла по формуле (6.5) трапеций в ячейку *C18* записываем формулу ***=СУММ* (*C7:C17*)**, ***D18= СУММ* (*D8:D16*)**, в ячейку *B19* формулу ***=B4*((C18/2) + D18)*** (рис. 6.16).

B19 | f_x | =B4*((C18/2)+D18)

	A	B	C	D	E
4	h=(b-a)/n	0,08			
5					
6	i	x	y0,yn	y1,y2,...,yn-1	
7	0	0,4	0,383775414		
8	1	0,48		0,357659243	
9	2	0,56		0,330959028	
10	3	0,64		0,303824151	
11	4	0,72		0,276399165	
12	5	0,8		0,248823825	
13	6	0,88		0,221233036	
14	7	0,96		0,193756752	
15	8	1,04		0,166519821	
16	9	1,12		0,13964181	
17	10	1,2	0,113236798		
18		СУММА	0,497012212	2,238816831	
19	ИНТЕГРАЛ	0,198985835			

Рис. 6.16 Вычисление интеграла по формуле трапеций

Таким образом:

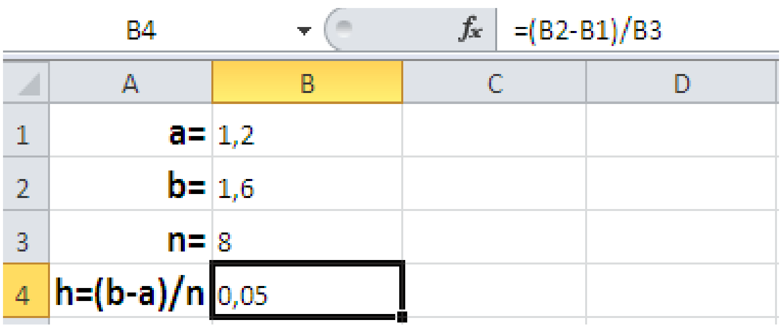
$$I_{òð} = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx \approx 0{,}198985835.$$

Пример 6.3. Найдем значение интеграла $\int\limits_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}dx$, используя метод парабол (Симпсона), при $n=8$.

Значение интеграла заданной функции для использования его в дальнейшем решении для сравнения равно:

$$I = \int\limits_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}dx \approx 0,082790313.$$

Для нахождения определенного интеграла методом Симпсона, также вводим значения подынтегральной функции (рис. 6.17).


B4 fx =(B2-B1)/B3

	A	B	C	D
1	**a=**	1,2		
2	**b=**	1,6		
3	**n=**	8		
4	**h=(b-a)/n**	0,05		

Рис. 6.17 Входные данные для метода парабол

Далее вводим в ячейку *A6* текст *i*, в *B6* – *x*, в *C6* – y_0, y_n, в *D6* – y_1, y_3, y_5, y_7 и в *E7* – y_2, y_4, y_6. Точки разбиения на отрезке [1,2; 1,6] определяем по формуле ***=B7+$B$4*** и копируем эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек *B8:B11*.

Теперь определяем значения подынтегральной функции в точках y_1, y_n: в ячейку *C7 и в C15* вводим формулу ***=(SIN(2*B7-2,1))/(B7^2+1)*** (рис.6.18).

C7 f_x =(SIN(2*B7-2,1))/(B7^2+1)

	A	B	C	D	E
6	i	x	y0,yn	y1,y3,y5,y7	y2,y4,y6
7	0	1,2	0,121114839		
8	1	1,25			
9	2	1,3			
10	3	1,35			
11	4	1,4			
12	5	1,45			
13	6	1,5			
14	7	1,55			
15	8	1,6	0,250339146		

Рис. 6.18 Вычисления значений подынтегральной функции методом парабол в точках y_0, y_n

Затем определяем значения подынтегральной функции в точках y_1, y_3, y_5, y_7 в ячейки *C8,C10,C12,C14* и в *C15* вводим ту же формулу **=(*SIN*(2*B7-2,1))/(B7^2+1)**, и по такой же формуле в ячейках *E9,E11,E13* находим значения в точках y_2, y_4, y_6 (рис. 6.19).

D8 f_x =(SIN(2*B8-2,1))/(B8^2+1)

	A	B	C	D	E
6	i	x	y0,yn	y1,y3,y5,y7	y2,y4,y6
7	0	1,2	0,121114839		
8	1	1,25		0,151968134	
9	2	1,3			0,178225107
10	3	1,35		0,200050478	
11	4	1,4			0,217641111
12	5	1,45		0,231218724	
13	6	1,5			0,241023665
14	7	1,55		0,247309621	
15	8	1,6	0,250339146		

Рис.6.19 Вычисления значений подынтегральной функции метода парабол в точках y_1, y_3, y_5, y_7 **и** y_2, y_4, y_6

Для того чтобы вычислить интеграл по методу парабол через три точки в ячейку *C16* записываем сумму *C7* и *C15*, в *D16* – сумму (*D8*, *D10*, *D12*, *D14*), в ячейку *E16* – сумму *E9,E11,E13*. И в ячейку *B17* записываем конечную формулу нахождения интеграла **=(*B4/3*)*(*C16+4*D16+2*E16*)** (рис. 6.20).

B17 f_x =(B4/3)*(C16+4*D16+2*E16)

	A	B	C	D	E
4	h=(b-a)/n	0,05			
5					
6	i	x	y0,yn	y1,y3,y5,y7	y2,y4,y6
7	0	1,2	0,121114839		
8	1	1,25		0,151968134	
9	2	1,3			0,178225107
10	3	1,35		0,200050478	
11	4	1,4			0,217641111
12	5	1,45		0,231218724	
13	6	1,5			0,241023665
14	7	1,55		0,247309621	
15	8	1,6	0,250339146		
16	СУММА=		0,371453985	0,830546956	0,636889882
17	ИНТЕГРАЛ=	0,08279036			

Рис. 6.20 Вычисление интеграла по формуле парабол

$$I = \int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x - 2,1)}{x^2 + 1} dx \approx 0,08279036$$

6.5. Варианты заданий

Найти приближенное значение интеграла заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по формулам прямоугольников, трапеций, парабол при делении отрезка на 100 равных частей, произвести оценку погрешности методов.

№ варианта	$f(x)$	$[a,b]$
1	$\sqrt{1+\cos^2 x}$	[0; 3]
2	$\sin(2x^2+1)$	[0; 1]
3	$(x+1,9)\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	[1; 2]
4	$\frac{1}{x}\ln(x+2)$	[2; 3]
5	$x^2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$	[2; 3]
6	$3x+\ln x$	[1; 2]

7	$x^2 tg\left(\frac{x}{2}\right)$	[1,5; 2,5]
8	$\frac{e^x}{x}$	[1, 7]
9	$\frac{1}{x^2+1}$	[0; 1]
10	$\sqrt{4+x^4}$	[0; 3]
11	$\sqrt{1+\cos^2 x}$	[0; π]
12	$e^x \sin\left(x^2\right)$	[0; 5]

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Амосов, А.А.** Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова - М.: Изд-во МЭИ, 2010. - 595 с.
2. **Бахвалов, Н.С.** Численные методы / Н.С. Бахвалов - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. - 636 с.
3. **Вержбицкий, В.М.** Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) / В.М. Вержбицкий - М.: ОНИКС 21 в., 2005. - 399 с.
4. **Панюкова, Т.А.** Численные методы / Т.А. Панюкова - СПб.; М.; Книжный дом «ЛИБРОКОМ» 2013. - 224 с.
5. **Киреев, В.И.** Численные методы в примерах задачах / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев - М.: Высш. шк., 2006. - 480 с.
6. **Колдаев, В.Д.** Численные методы и программирование / В.Д. Колдаев - М.: «Форум-Инфра-М», 2012. - 336 с.
7. **Формалев, В.Ф.** Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников - М.: Физматлит, 2006. - 400 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ

№	Задания	Варианты ответов
1	Вычислить абсолютную погрешность функции y = ab - a , если a = 3 ± 0,03; b = 6 ± 0,04 .	**A.** 0,27**B.** 0,5 **C.** 0,30**D.** 0,33
2	Найти относительную погрешность функции y = a$\sqrt{b}$, если относительные погрешности переменных δa = 0,06; δb = 0,04	**A.** 0,08 **B.** 0,1**,** **C.** 0,0616**D.** 0,0012
3	Вычислить предельную относительную погрешность функции y = $\sqrt{a+b}$, если A = 2 ± 0,02; B = 4 ± 0,04 .	**A.** 0,005**B.** 0,001 **C.** 0,05**D.** 0,003
4	Установить, какая из точек может быть начальной при решении уравнения $x^3+3x^2-2=0$ методом касательных: 1) $x_0=-3$; 2)$x_0=-2$; 3)$x_0=0$.	**A.** 1), **B.** 2), **C.** 3),**D.** 1) и 3).
5	С помощью графического метода найти отрезок, содержащий корень уравнения $$x^2-e^{-x}=0$$	**A.** [3; 5]**B.** [1; 2] **C.** [-2; 0]**D.** [0; 1]
6	Выполнить две итерации метода касательных для решения уравнения $x^3+x=4$ на отрезке [1; 2].	**A.** 1,5 **B.** 1,39 **C.** 0,87 **D.** 1,7
7	Выполнить две итерации методом Зейделя для решения системы линейных уравнений $$\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3=10 \\ 3x_1-6x_2+2x_3=6 \\ 4x_1+4x_2-10x_3=18 \end{cases}$$ Начальное приближение $x^{(0)}$=(0; 0; 0).	**A.**$x^{(2)}$=(2,8;-0,33;-0,6) **B.**$x^{(2)}$=(2;-1;-1) **C.**$x^{(2)}$=(2,2;-0,23;-1,0) **D.** $x^{(2)}$=(1,8;-0,33;-0,9)

Ответы: 1) **A**; 2) **A**; 3) **A**; 4) **A**; 5) **D**; 6) **B**; 7) **C.**

Эварт Татьяна Евгеньевна

Троицкий Александр Витальевич

Поздяев Владимир Васильевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Редактор О.В. Пугина
Технический редактор Т.П. Новикова

Подписано в печать . Формат $60 \times 84\ ^1\!/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,0.
Уч.-изд. л. 6,0 Тираж экз. Заказ

Нижегородский государственный политехнический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.