

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

АРЗАМАССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) НГТУ

**А.А. Гуськов**

---

---

## **ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И ЭФФЕКТЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

---

---

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного  
технического университета им. Р.Е.Алексеева  
в качестве учебного пособия  
для студентов всех форм обучения  
по направлению подготовки 12.03.01 – «Приборостроение»*

Нижний Новгород 2018

УДК 53.06, 537, 621.3.082  
Г 968

Рецензент

кандидат технических наук *А.Ю. Мишин*

**Гуськов А.А.**

**Г 968** **Физические явления и эффекты в электромагнитных полях: учеб. пособие** / А.А. Гуськов; Нижегород. гос. тех. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2018. – 164 с.

ISBN

Рассматриваются свойства материалов в электрических и магнитных полях, физические основы различных явлений и эффектов в электромагнитных полях, а также применение явлений и эффектов при реализации измерительных преобразований и построении измерительных устройств. Направлено на закрепление теоретических знаний по определенным разделам курса «Физические основы получения информации».

Предназначено для студентов всех форм обучения высших учебных заведений, обучающихся по направлению 12.03.01 «Приборостроение».

Рис. 85. Табл. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 53.06, 537, 621.3.082

ISBN

© Нижегородский государственный  
технический университет  
им. Р.Е. Алексеева, 2018  
© Гуськов А.А., 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
<b>1. Электрическое поле. Свойства материалов и характеристики объектов в электрическом поле</b> .....	8
1.1. Понятие физического поля. ....	8
1.2. Основные характеристики электрического поля .....	9
1.3. Электрическая проводимость .....	11
1.3.1. Элементы теории электропроводности металлов .....	12
1.3.2. Элементы теории проводимости полупроводников .....	18
1.4. Электрическая емкость. Емкостные измерительные преобразования .....	24
1.4.1. Электрическая емкость .....	24
1.4.2. Физические основы емкостных измерительных преобразований .....	26
1.4.3. Примеры применения емкостных измерительных преобразований .....	31
1.5. Энергия электрического поля. Силы, развиваемые в электрическом поле .....	34
<b>2. Магнитное поле. Свойства материалов и характеристики объектов в магнитном поле</b> .....	37
2.1. Основные характеристики магнитного поля .....	37
2.2. Магнитные свойства материалов .....	40
2.3. Индуктивность и взаимоиндуктивность .....	48
2.3.1. Понятие индуктивности и взаимоиндуктивности .....	48
2.3.2. Физические основы индуктивных измерительных преобразований .....	50
2.3.3. Физические основы взаимоиндуктивных измерительных преобразований .....	57
2.4. Энергия магнитного поля. Силы, развиваемые в магнитном поле ..	61
2.4.1. Физические основы силовых взаимодействий в магнитных полях .....	61
2.4.2. Применение эффектов силовых взаимодействий в магнитных полях .....	67
<b>3. Физические явления и эффекты в электромагнитных полях и их применение в измерительной технике</b> .....	71
3.1. Явление электромагнитной индукции .....	71
3.1.1. Физические основы явления электромагнитной индукции ...	71

3.1.2. Варианты применения явления электромагнитной индукции при построении измерительных устройств . . . . .	73
3.2. Явление возникновения вихревых токов в электропроводных материалах . . . . .	80
3.3. Эффект Холла. Магниторезистивный эффект . . . . .	86
3.3.1. Физические основы проявления эффекта Холла . . . . .	86
3.3.2. Эффект Холла в полупроводниках . . . . .	89
3.3.3. Физические основы проявления магниторезистивного эффекта . . . . .	93
3.3.4. Область применения эффекта Холла . . . . .	94
3.4. Изменение свойств ферромагнитных материалов в сильных магнитных полях. Магнитная модуляция . . . . .	95
3.4.1. Понятие магнитной модуляции . . . . .	95
3.4.2. Режимы работы магнитомодуляционных преобразователей . . . . .	97
3.4.3. Практическое применение магнитной модуляции в измерительной технике . . . . .	102
3.5. Магнитоупругий эффект . . . . .	109
3.6. Пьезомагнитный и магнитострикционный эффекты . . . . .	114
3.7. Пьезоэлектрический эффект . . . . .	116
3.7.1. Физические основы пьезоэлектрического эффекта . . . . .	116
3.7.2. Основные характеристики пьезоматериалов . . . . .	123
3.7.3. Срезы кристаллов . . . . .	127
3.7.4. Материалы пьезоэлементов . . . . .	130
3.7.5. Область применения пьезоэлектрического эффекта . . . . .	132
3.8. Электрострикция . . . . .	136
3.9. Пироэлектрический и электрокалорический эффекты . . . . .	138
3.10. Тензорезистивный эффект . . . . .	142
<b>Список рекомендуемой литературы . . . . .</b>	<b>152</b>

## ВВЕДЕНИЕ

---

Информация – одно из наиболее общих понятий науки, обозначающее любые сведения, совокупность каких-либо данных или знаний. Нет таких материальных объектов, которые не обладали бы таким свойством, как информация. Встав в один ряд с фундаментальными категориями материи и энергии, информация превратилась в необычайно широкое понятие.

Информация является единственным средством взаимодействия человека с познаваемым миром. Обо всех моментах, в которые мы «что-то узнали», можно сказать, что мы «получили информацию». Самопознание возможно лишь благодаря способности человека выделять из окружающего мира информацию и пригодности мира быть проводником для передачи информации.

Само понятие «информация» предполагает наличие трех объектов: источника информации, потребителя информации и передающей среды. При этом информация не может быть передана, принята или хранима в чистом виде: ее носителем является сообщение. Информация – это характеристика соотношения между сообщением и его потребителем. Без наличия потребителя, хотя бы потенциального, вести речь об информации бессмысленно. Другими словами, информация – это сведения, которые один реальный объект содержит о другом реальном объекте.

Существование информации обеспечивается носителем, которым может быть очень многое: от электрического сигнала (напряжения или тока) и графических изображений до звуковых колебаний или мимики и жестов.

В зависимости от области исследований информация имеет множество определений. В области техники (в частности, приборостроении) пользуются понятием измерительной информации, т.е. информации, полученной в результате измерений.

Под измерением понимают получение количественной информации, характеризующей те или иные процессы и явления. Результатом измерения является количественная оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для неё единиц, т.е. в результате измерения определяется отношение одной (измеряемой) величины к другой однородной величине, которая принимается за единицу.

Измеряемые физические величины весьма разнородны: масса, давление, температура, расстояние, скорость, электрический ток, индуктивность, освещенность и т.д. Для каждой из них устанавливаются свои единицы измерения, причем для одной физической величины таких единиц может быть несколько.

Например, расстояние можно измерить в метрах, дюймах, ярдах или просто шагами. Масса может выражаться в граммах, фунтах, пудах. Объем – в литрах, пинтах, баррелях. При этом физические величины связаны между собой определенными зависимостями, определяемыми законам природы, т.е. физическими законами. Поэтому и единицы физических величин между собой взаимосвязаны. Их совокупность рассматривается как система физических единиц.

С целью унификации представления результатов измерения в 1961 году Генеральной конференцией по мерам и весам была принята Международная система единиц (СИ, SI – The International System Units).

В системе СИ определены семь основных, две дополнительные, производные единицы физических величин, а также набор приставок.

Основные единицы системы СИ:

- метр (м) – единица длины;
- килограмм (кг) – единица массы;
- секунда (с) – единица времени;
- ампер (А) – единица силы тока;
- кельвин (К) – единица термодинамической температуры;
- кандела (кд) – единица силы света;
- моль (моль) – единица количества вещества.

Основная физическая величина считается независимой от других величин. Ее единичное значение выбрано условно по некоторому эталону. Например, за единицу массы 1 килограмм принимается масса, равная массе международного прототипа весом 1 килограмм, выполненного из платины. Метр – длина пути проходимого светом в вакууме за  $1/299792458$  долю секунды. Сама секунда равна  $9\,192\,631\,770$  периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

В качестве дополнительных единиц в системе СИ используются:

- радиан (рад) – единица плоского угла;
- стерadian (ср) – единица телесного угла.

Радан – это угловая мера дуги, длина которой равна радиусу. Стерadian – мера телесного угла с вершиной в центре сферы радиусом  $r$ , вырезающего из сферы поверхность площадью  $r^2$ . В принципе, единицы измерения плоского и телесного углов являются безразмерными, но в системе СИ им присвоены собственные названия:

$$1 \text{ рад} = l_{\text{дуги}}/r = r/r = \text{м}/\text{м} = 1,$$
$$1 \text{ ср} = S/r^2 = r^2/r^2 = \text{м}^2/\text{м}^2 = 1.$$

Остальные физические величины являются производными и определяют-

ся через основные и дополнительные величины системы СИ путем умножения, деления или возведения в степень.

На практике измерение физических величин проводится с помощью различных средств измерений: технических устройств, используемых при измерениях и имеющих нормированные метрологические характеристики.

В процессе измерения сигнал, несущий информацию, претерпевает ряд преобразований, с целью получения нужного выходного сигнала, удобного для восприятия или дальнейшей обработки. Такие преобразования (т.е. замена размера одной физической величины размером функционально с ней связанной другой физической величины) называются измерительными преобразованиями, а элементарные звенья в цепи преобразования физических величин – измерительными преобразователями. Измерительный преобразователь, на который непосредственно воздействует измеряемая физическая величина, называют первичным.

В общем случае в основе получения измерительной информации лежит оценка взаимодействия физических полей различного рода с исследуемым объектом. Измеряемый параметр объекта измерения воздействует либо на характеристики физического поля (например, его пространственное распределение или интенсивность в какой-либо точке пространства), либо на характеристики материала объекта в этом физическом поле. Первичным измерительным преобразователем осуществляется преобразование соответствующих характеристик поля или материала в сигнал требуемой физической природы (чаще всего – электрический).

Таким образом, изучение физических основ получения измерительной информации должно включать изучение физических величин, характеризующих физическое поле, свойств материалов и предметов в данном физическом поле, а также физических явлений и эффектов, лежащих в основе взаимодействия физического поля с веществом.

# 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

---

## 1.1. Понятие физического поля

В основе получения информации о состоянии объекта (процесса), в широком смысле, лежит оценка взаимодействия физических полей различного рода с исследуемым объектом.

Между объектом измерения, источником физического поля и первичным измерительным преобразователем в общем случае может быть промежуточная среда (среда распространения физического поля).

Что же такое физическое поле? Понятие поля (электрического и магнитного) как особой формы материи было введено в 30-е годы XIX века английским учёным М. Фарадеем, а в 60-е годы английский физик Дж. Максвелл развил идею Фарадея об электромагнитном поле и сформулировал математически его законы.

Поля, участвующие во взаимодействии элементарных частиц, создают в каждой точке окружающего их пространства особое состояние – поле сил, проявляющееся в силовом воздействии на другие частицы, помещаемые в какую-либо точку этого пространства.

Таким образом, физическое поле можно рассматривать как некоторый «посредник» при взаимодействиях элементарных частиц или физических объектов. Первоначально выдвигалась механистическая интерпретация поля как упругих напряжений гипотетической среды – «эфира». Эйнштейн с помощью теории относительности доказал ошибочность такой интерпретации. Согласно теории относительности, скорость распространения любого взаимодействия конечна и не может превышать скорости света в вакууме. Поэтому в системе взаимодействующих частиц изменение положения одной частицы сказывается на другой частице не сразу, а через определённый промежуток времени. Относительная скорость взаимодействия частиц при этом сравнима со скоростью света. Таким образом, взаимодействие частиц можно описывать только через создаваемые ими поля.

Физическое поле можно охарактеризовать как физическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Примерами физических полей могут служить электромагнитные, гравитационные поля, поле ядерных сил, волновые поля, например, акустические.

Каждому типу взаимодействий в природе отвечают определённые физические поля. Но физические поля не только осуществляют взаимодействие ме-

жду частицами. Могут существовать и проявляться свободные поля независимо от создавших их частиц, например, электромагнитные или акустические волны, поэтому физические поля следует рассматривать как особую форму материи.

## 1.2. Основные характеристики электрического поля

Форма существования материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами, называется *электромагнитным полем*. Между частицами и их полем точной границы нет. Однако полагают, что электрический заряд имеет частица материи, сосредоточенная в весьма малой области пространства, а вне этой области материя существует в виде электромагнитного поля и объемная плотность заряда равна нулю. Электрически заряженные частицы характеризуются теми же свойствами, что и макротела (массой, энергией, количеством движения). Но при этом они обладают специфическими свойствами, важнейшими из которых являются электрический заряд и силовое воздействие электромагнитного поля на заряженные частицы [1].

Электрический заряд – это физическая величина, определяющая способность тел быть источником электромагнитных полей и принимать участие в электромагнитном взаимодействии.

Воздействие электромагнитного поля на заряженные частицы проявляется по-разному в зависимости от того, движется или неподвижна заряженная частица. Условно принимается, что электромагнитное поле имеет две составляющие (две формы проявления) – электрическую, характеризуемую воздействием поля как на движущиеся, так и на неподвижные заряженные частицы, и магнитную, характеризуемую воздействием только на движущиеся заряженные частицы.

Электрическое поле – электромагнитное поле, характеризуемое воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы. Силовое воздействие электрического поля на заряженные частицы является основным свойством этого поля. Соответственно, основной характеристикой электрического поля является вектор напряженности электрического поля  $E$ , который может быть определен по силе  $F$ , с которой поле действует на заряд  $q$ , находящийся в поле (рис. 1.1). Направление вектора  $E$  совпадает с направлением силы  $F$ , действующей на положительный заряд:

$$F = q E . \quad (1.1)$$

Единицей измерения напряженности электрического поля является вольт на метр (В/м). Энергетической характеристикой электрического поля является разность электрических потенциалов (электрическое напряжение) между

двумя точками поля, численно равная работе, совершаемой силами электрического поля при перенесении положительного единичного заряда из одной точки в другую [1]:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q},$$

где  $A$  – работа по перемещению положительного заряда  $q$  из точки 1 в точку 2.

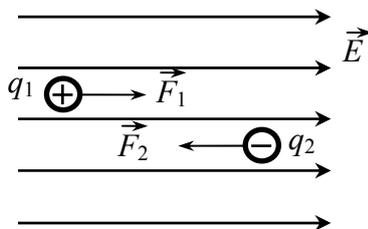


Рис. 1.1. Заряды в электрическом поле

Единицей измерения разности электрических потенциалов (электрического напряжения) является вольт (В).

Поскольку работа  $A$  обусловлена действием на заряд силы  $F$ :

$$A = \int F dl,$$

то с учетом (1.1) можно записать

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int \vec{E} d\vec{l},$$

где  $d\vec{l}$  – элементарное перемещение заряда.

Таким образом, разность потенциалов (напряжение) между двумя точками поля равна интегралу по некоторому пути скалярного произведения векторов  $E$  и элементарного перемещения  $dl$ . Если напряженность электрического поля постоянна, то напряжение между точками, находящимися на расстоянии  $l$ , равно

$$U = E_{12} l,$$

где  $E_{12}$  – проекция вектора напряженности поля на прямую, соединяющую точки 1 и 2 (выбранное направление).

Соответственно напряженность поля является градиентом разности потенциалов (напряжения), взятым с обратным знаком [1]:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dl} = -\text{grad}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Разность потенциалов не зависит от выбранного пути перемещения из одной точки в другую. Поверхности, находящиеся под одним потенциалом, на-

зываются *эквипотенциальными*. Линии в электрическом поле, касательные ко всем точкам которых совпадают по направлению с вектором напряженности поля, называются *силовыми*. Силовые линии всегда ортогональны эквипотенциальным поверхностям.

Силовое взаимодействие точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  описывается законом Кулона, согласно которому модуль силы, действующей на расположенные в вакууме на расстоянии  $r$  два заряда, равен

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.2)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная.

В соответствии с (1.1) и (1.2) можно определить напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$  от него:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Направление вектора напряженности поля, созданного точечным зарядом, зависит от знака заряда (при положительном заряде вектор напряженности поля направлен от заряда, при отрицательном – к заряду).

### 1.3. Электрическая проводимость

Основными электрическими свойствами материалов физических объектов, проявляющимися при взаимодействии объектов с электрическим полем, являются электрическая проводимость и электрическая емкость. Первое свойство характеризует способность вещества проводить электрический ток, второе – способность физического объекта накапливать электрический заряд.

Электрическая проводимость определяется наличием или отсутствием в материале свободных носителей электрических зарядов – электронов или ионов, что, в свою очередь, обусловлено строением атомов вещества, объединенных в молекулы и кристаллы. Электроны атомов, вращающиеся вокруг ядра по определенным (разрешенным) орбитам, обладают некоторой энергией или, иначе говоря, занимают определенные энергетические уровни. Совокупность этих уровней образует энергетические зоны разрешенных уровней, а между ними находятся зоны запрещенных уровней [1] (рис. 1.2).

Электроны, энергия которых соответствует нижним разрешенным зонам, располагаются ближе к ядру атома и меньше подвержены воздействиям со стороны других атомов. В невозбужденном состоянии верхняя разрешенная энергетическая зона называется валентной зоной. Валентная зона заполнена валент-

ными электронами, испытывающими наибольшее воздействие других атомов. Эти электроны относительно легко переходят от одного атома к другому, обуславливая образование разноименно заряженных ионов и создание химических соединений отдельных атомов в молекулы и кристаллы.



Рис. 1.2. Энергетические зоны вещества

Выше валентной зоны на зонной диаграмме располагается зона свободных уровней, незанятая электронами в невозбужденном состоянии атома и отделенная в общем случае от валентной зоны запрещенной зоной.

Свободные электроны, попавшие в эту зону, обеспечивают электрическую проводимость материала, поэтому зона свободных уровней получила название *зоны проводимости* (рис. 1.2). При определенных условиях свободные уровни могут оказаться и в валентной зоне, тогда валентная зона тоже становится зоной проводимости.

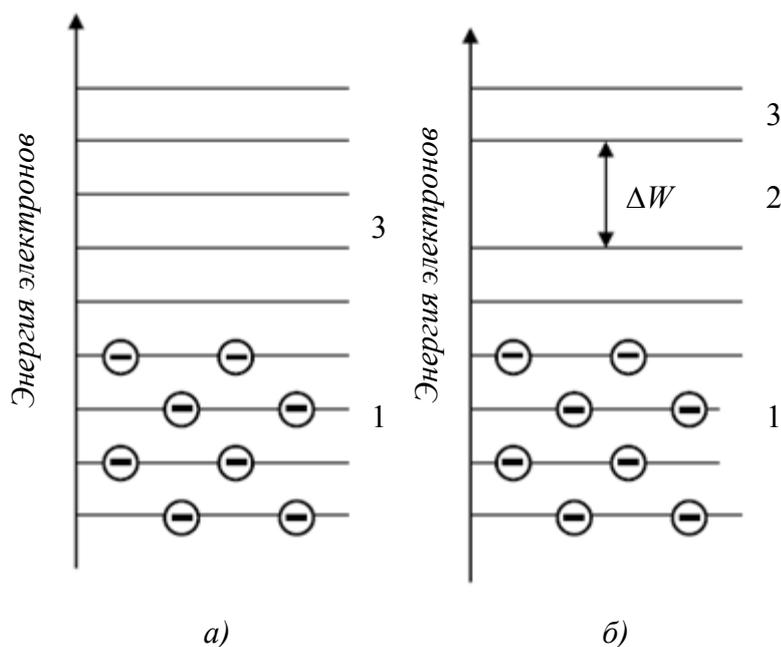
По электрическим свойствам вещества разделяют на проводники, диэлектрики (изоляторы) и полупроводники. Проводники – вещества, в которых имеются свободные носители заряда, и которые способны проводить электрический ток. Диэлектрики – материалы, плохо проводящие электрический ток. Полупроводники – особый класс материалов, которые при различных условиях могут проявлять свойства, как проводников, так и диэлектриков.

### 1.3.1. Элементы теории электропроводности металлов

На рис. 1.3 показаны наиболее характерные варианты расположения верхних разрешенных областей зонной диаграммы проводников [1].

В случае (а) зона свободных уровней 3 вплотную примыкает к валентной зоне 1 или перекрывает ее. В случае (б) разрешенные области разделены зоной 2,

характеризуемой энергетическим барьером  $\Delta W$ , но в валентной зоне имеются разрешенные уровни энергии. В обоих случаях независимо от заполнения валентной зоны тело будет проводником, так как выше занятых электронами уровней имеются близкие по значению энергии свободные уровни. К проводникам относятся все металлы. Их хорошая электропроводность определяется большим количеством свободных уровней энергии. Под действием электрического поля электроны проводников получают дополнительную энергию и легко переходят на свободные уровни, чем и обеспечивается направленное их движение вдоль силовых линий поля – электрический ток.



**Рис. 1.3. Зонные диаграммы проводников**

Электрический ток – это упорядоченное движение заряженных частиц. Численно ток равен скорости потока электрических зарядов через поперечное сечение проводника. Принято считать, что направление тока совпадает с направлением электрического поля, т.е. ток течет от положительного полюса источника напряжения к отрицательному полюсу, тогда как электроны перемещаются в противоположном направлении.

Отношение электрического тока к площади поперечного сечения проводника называют *плотностью тока*:

$$j = \frac{i}{S}.$$

Согласно закону Ома, плотность электрического тока  $j$  в проводнике прямо пропорциональна напряженности электрического поля:

$$j = \gamma E, \quad (1.4)$$

где  $\gamma$  – удельная электрическая проводимость.

Величина, обратная удельной электрической проводимости  $\rho = 1/\gamma$ , называется *удельным электрическим сопротивлением*. Единицей измерения удельного сопротивления является ом-метр (Ом·м).

Закон Ома можно записать в более привычной форме:

$$j = \frac{i}{S} = \gamma E = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l},$$

откуда

$$i = U \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} = \frac{U}{R},$$

где  $R = \rho l/S$  – сопротивление электрическому току проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ .

Электропроводный материал (металл) можно представить в виде полужесткой упругой регулярной решетки из положительных ионов. Эти ионы удерживаются в решетке при помощи сильных электромагнитных сил. Каждый атом имеет свободные (валентные) электроны, способные передвигаться внутри решетки. Когда к материалу прикладывается электрическое поле, то на каждый электрон действует сила, вследствие чего электроны начинают ускоряться. Однако, пролетев очень короткое расстояние, они сталкиваются с соседними атомами, интенсивность вибраций которых определяется температурой материала. При этом электроны передают свою кинетическую энергию решетке и часто поглощаются положительным ионом. В результате таких превращений образуется еще один свободный электрон, перемещающийся в электрическом поле до очередного столкновения с атомом.

Идеальная кристаллическая решетка не создает сопротивления для движения электронов, и ее электрическое сопротивление равно нулю. Причиной сопротивления является неидеальность кристаллической решетки, которая обуславливается, с одной стороны, тепловыми колебаниями атомов, и, с другой стороны, дефектами кристаллической решетки.

Согласно классической теории, электрон массой  $m$  и зарядом  $q$ , ускоренный электрическим полем напряженностью  $E$ , претерпевает столкновения, при которых его скорость каждый раз обращается в нуль [2]. Обозначим через  $\tau$  время релаксации, т.е. среднее значение интервала времени между двумя соударениями. Уравнение движения электрона в направлении приложенного электрического поля имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - qE = 0. \quad (1.5)$$

Ускорение электрона

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2v}{\tau}, \quad (1.6)$$

где  $v$  – средняя скорость перемещения электронов.

С учетом (1.5) и (1.6) средняя скорость перемещения электронов равна

$$v = \frac{q\tau}{2m} E.$$

Если число свободных электронов в единице объема равно  $N$ , то плотность тока определится соотношением

$$j = Nqv = \frac{Nq^2\tau}{2m} E,$$

а удельное сопротивление

$$\rho = \frac{2m}{Nq^2\tau}. \quad (1.7)$$

Из полученного выражения следует, что все физические величины, влияющие на время релаксации и, следовательно, на число соударений в секунду, влияют на удельное сопротивление.

Каждый атом кристаллической решетки (массой  $M$ ) колеблется относительно своего среднего положения, и на него действует восстанавливающая сила:

$$F_x = Cx,$$

где  $x$  – отклонение от положения равновесия;  $C$  – коэффициент пропорциональности, совпадающий по физическому смыслу с жесткостью и имеющий размерность Н/м.

Из уравнения движения атома

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + Cx = 0$$

можно определить среднюю потенциальную энергию атома  $w$  и частоту колебаний  $\omega$ :

$$w = \frac{C\bar{x}^2}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{M}}, \quad (1.8)$$

где  $\bar{x}$  – средняя амплитуда колебаний атома относительно положения равновесия.

При температуре  $T$  большей, чем характеристическая температура  $\Theta$ , энергия атома равна:

$$w = \frac{1}{2}kT. \quad (1.9)$$

Характеристическая температура определяется из соотношения

$$h\omega = k\Theta,$$

где  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

Из выражений (1.8) и (1.9) получим

$$\bar{x}^2 = \frac{kT}{C} = \frac{h^2 T}{4\pi^2 k M \Theta^2}. \quad (1.10)$$

Время релаксации обратно пропорционально  $\bar{x}^2$ , поэтому с учетом выражений (1.7), (1.10), для температур  $T > \Theta$ , получим

$$\rho \sim \frac{1}{NM\Theta^2} T.$$

На самом деле удельное сопротивление в зависимости от температуры изменяется не строго линейно, что объясняется расширением кристаллической решетки и влиянием энергии электронов на время релаксации. При низких температурах ( $T \ll \Theta$ ), удельное сопротивление является нелинейной функцией температуры и уменьшается быстрее с падением температуры.

При очень низких температурах удельное сопротивление перестает зависеть от температуры и зависит только от концентрации примесей и дефектов кристаллической решетки металла.

Температурный коэффициент сопротивления  $\alpha_\rho$  определяет чувствительность сопротивления проводника к изменению температуры:

$$\alpha_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{\rho(T) + \rho(i)} \frac{\partial \rho(T)}{\partial T}. \quad (1.11)$$

Таким образом, сопротивление металлов электрическому току связано с процессом рассеяния подвижных электронов в результате их столкновений с

примесями, дефектами, тепловыми колебаниями решетки и концентрацией в материале свободных электронов. С ростом температуры увеличивается энергия колебаний атомов: узлов кристаллической решетки – и усиливается рассеяние электронов. Концентрация подвижных электронов у металлов мало зависит от изменения температуры, поэтому с ростом температуры сопротивление металлов увеличивается.

Зависимость электрического сопротивления проводников и полупроводников от температуры называется *терморезистивным эффектом*.

Терморезистивный эффект положен в основу работы терморезисторов – измерительных преобразователей температуры. Терморезистивный метод измерения температуры является одним из самых распространенных. Для измерения температуры используются терморезисторы из материалов, обладающих высокостабильным температурным коэффициентом сопротивления, по возможности, линейной зависимостью сопротивления от температуры, хорошей воспроизводимостью свойств и инертностью к воздействиям окружающей среды. Терморезисторы могут выполняться из металлов (проводниковые или металлические терморезисторы) или полупроводников (полупроводниковые терморезисторы или термисторы).

Для любого металлического (проводникового) терморезистора в узком температурном диапазоне зависимость удельного сопротивления от температуры близка к линейной:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_p (\Theta - \Theta_0)] ,$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление проводника при температуре  $\Theta$ ;  $\rho_0$  – удельное электрическое сопротивление проводника при температуре  $\Theta_0$ ;  $\alpha_p$  – температурный коэффициент сопротивления.

В широком диапазоне температур зависимость удельного электрического сопротивления от температуры носит нелинейный характер. На практике эту зависимость аппроксимируют обычно полиномом второго или третьего порядка:

$$\rho = \rho_0 [1 + a(\Theta - \Theta_0) + b(\Theta - \Theta_0)^2 + c(\Theta - \Theta_0)^3] ,$$

где  $a, b, c$  – коэффициенты, определяемые химическим составом материала.

Из проводниковых материалов для изготовления терморезисторов применяют медь, никель, платину, вольфрам. В табл. 1.1 представлены значения некоторых физических параметров перечисленных металлов: температуры плавления  $\Theta_{пл}$ , удельной теплоемкости  $C$  при температуре  $20^\circ \text{C}$ , коэффициента теплопроводности  $\lambda_l$ , коэффициента линейного расширения  $\alpha_l$ , удельного со-

противления  $\rho$  при температуре  $20^\circ\text{C}$ , температурного коэффициента сопротивления  $\alpha_\rho$  при температуре  $20^\circ\text{C}$  [3].

Наибольшей стабильностью обладают платиновые терморезисторы, применяемые для измерения температур от минус  $200^\circ\text{C}$  до  $650^\circ\text{C}$ . Вольфрам, благодаря высокой температуре плавления, может применяться при более высоких температурах, чем платина, имеет лучшую линейность удельного сопротивления, но худшую стабильность электрических характеристик.

**Таблица 1.1**

**Физические свойства металлов термометров сопротивления**

Параметр	Медь	Никель	Платина	Вольфрам
$\Theta_{\text{пл}}, ^\circ\text{C}$	1083	1453	1769	3380
$C, \text{Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$	400	450	135	125
$\lambda_t, \text{Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$	400	90	73	120
$\alpha_l, 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$	16,7	12,8	8,9	6
$\rho, 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$	1,72	10	10,6	5,25
$\alpha_\rho, 10^{-3} 1/^\circ\text{C}$	3,9	4,7	3,9	4,5

Из представленных в табл. 1.1 материалов никель обладает наибольшей чувствительностью к температуре, а медь – наилучшей линейностью. Однако химическая активность никеля и меди, в частности способность к окислению, приводит к изменению электрических свойств металлов. Поэтому применение никеля ограничивается температурами ниже  $250^\circ\text{C}$ , а меди – ниже  $180^\circ\text{C}$ .

**1.3.2. Элементы теории проводимости полупроводников**

В отличие от металлов, у диэлектриков и полупроводников валентная зона зонной диаграммы заполнена до конца и отделена от зоны проводимости запрещенной зоной (рис. 1.4).

У диэлектриков ширина запрещенной зоны такова, что под действием электрического поля лишь незначительное количество электронов может преодолеть запрещенную зону и перейти в зону проводимости, поэтому удельная электрическая проводимость диэлектриков несоизмеримо меньше проводимости проводников. Воздействие на диэлектрик электрического поля приводит к ориентации вдоль силовых линий полярных молекул, которые можно рассматривать как пару разнесенных точечных электрических зарядов – электрических диполей [1] (рис. 1.5).

Такое упорядоченное смещение связанных зарядов под действием внешнего электрического поля называется *поляризацией диэлектрика*.

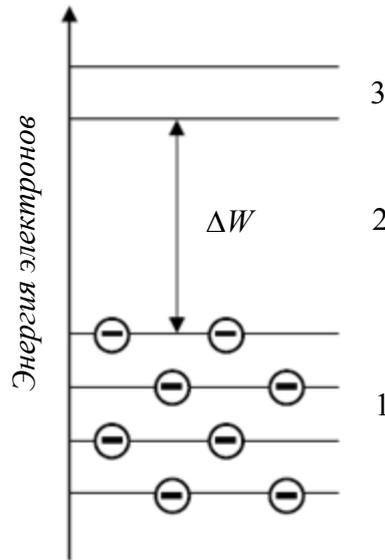


Рис. 1.4. Зонная диаграмма диэлектриков и полупроводников

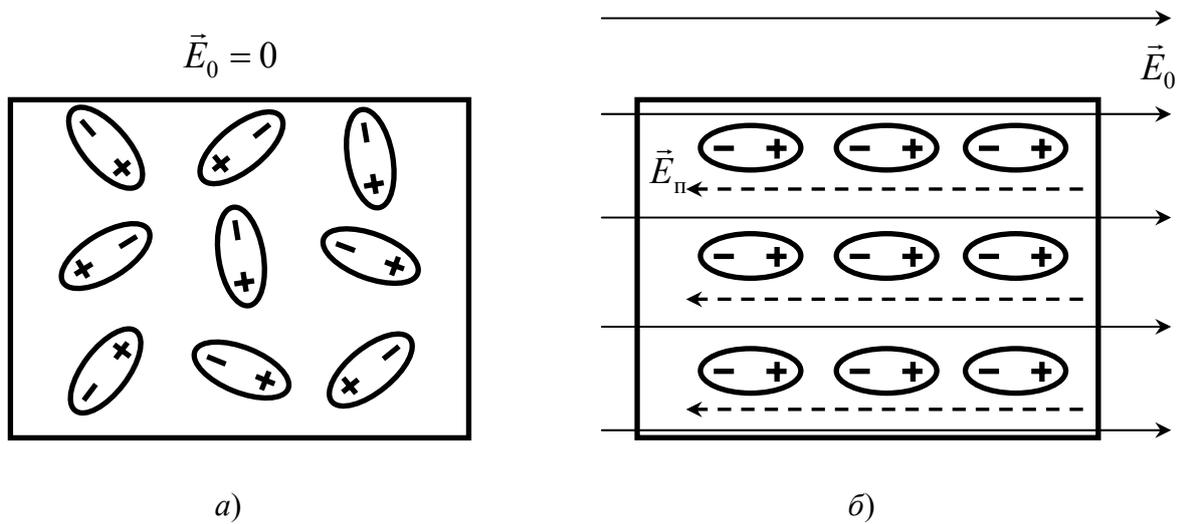


Рис. 1.5. Поляризация диэлектрика:

- a* – без внешнего электрического поля диполи имеют произвольную ориентацию;
- б* – диполи выравниваются вдоль силовых линий внешнего электрического поля

Собственное внутреннее поле диполей направлено противоположно внешнему полю. Это можно также представить как уменьшение напряженности  $E_0$  внешнего поля на величину напряженности  $E_{\pi}$  внутреннего:

$$E_{\Sigma} = E_0 - E_{\pi},$$

или уменьшение напряженности поля в  $\epsilon$  раз:

$$E_{\Sigma} = \frac{E_0}{\epsilon},$$

где  $E_{\Sigma}$  – напряженность суммарного электрического поля;  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость (безразмерная величина), являющаяся основной электрической характеристикой диэлектриков.

Относительная диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз напряженность электрического поля внутри диэлектрика при прочих равных условиях меньше напряженности электрического поля в вакууме.

За счет уменьшения напряженности электрического поля уменьшаются силы, действующие на электрические заряды. Согласно закону Кулона (формула (1.2)), сила взаимодействия зарядов в диэлектрике уменьшается в  $\epsilon$  раз:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}. \quad (1.12)$$

Наряду с проводниками, обладающими хорошей электропроводностью, и диэлектриками, поляризующимися в электрическом поле, существует третий вид материалов – полупроводники. В полупроводниках при действии электрического поля имеет место как протекание по ним электрического тока, так и их поляризация. Электрическая проводимость полупроводников мала, но все же значительно превышает проводимость хороших диэлектриков и может изменяться в больших пределах в зависимости от условий работы.

Качественно зонная диаграмма полупроводника не отличается от диаграммы диэлектриков (см. рис. 1.4). Валентная зона полупроводников заполнена до конца и отделена от зоны проводимости запрещенной зоной, но ширина запрещенной зоны значительно меньше, чем у диэлектриков. Под действием электрического поля энергия электронов увеличивается, и часть из них переходит в зону проводимости, т.е. становится свободными. Во время разрыва связи между электроном и ядром появляется свободное место в электронной оболочке атома. Атом становится положительно заряженным. Это обуславливает переход электрона с другого атома на атом со свободным местом. На атом, откуда перешёл электрон, входит другой электрон из другого атома и т. д.

Таким образом, происходит перемещение положительного заряда без перемещения самого атома. Этот условный положительный заряд называют *дыркой*. Дырки, наряду со свободными электронами, являются носителями заряда и обеспечивают проводимость полупроводников. Такой вид проводимости называется *электронно-дырочной проводимостью*. Процесс образования пары носителей зарядов называется *генерацией*. Обратный процесс называется *рекомбинацией носителей заряда*. Проводимость полупроводника может быть значительно увеличена введением в его кристаллическую решетку атомов других химических элементов.

В общем случае проводимость полупроводника  $\gamma$  выражается соотношением [2]

$$\gamma = q(\mu_n n + \mu_p p), \quad (1.13)$$

где  $\mu_n, \mu_p$  – подвижность, соответственно, свободных электронов концентрации  $n$  и дырок концентрации  $p$ ;  $q$  – заряд электрона.

В полупроводниках температура может оказывать значительное влияние на концентрацию носителей зарядов. Тепловое движение разрывает межатомные связи и создает электронно-дырочные пары (генерация носителей зарядов). Число пар  $G$ , образующихся при этом в единицу времени в единице объема, равно [2]:

$$G = AT^a \exp\left(-\frac{qE_i}{kT}\right), \quad (1.14)$$

где  $A, a$  – константы данного материала;  $E_i$  – энергия разрыва одной связи.

Свободный электрон и дырка также могут рекомбинировать и восстанавливать связь. Число рекомбинаций  $R$  в единицу времени в единице объема пропорционально концентрациям свободных зарядов  $n$  и  $p$ :

$$R = r \cdot n \cdot p,$$

где  $r$  – коэффициент рекомбинации.

Поскольку  $n = p$  (условие образования пар) и в состоянии равновесия концентрация свободных зарядов постоянна  $G = R$ , в соответствии с формулой (1.14) получим

$$n = \left(\sqrt{\frac{AT^a}{r}}\right) \exp\left(-\frac{qE_i}{2kT}\right).$$

Если учесть влияние температуры на подвижности электронов и дырок, то проводимость (1.13) можно представить в виде соотношения

$$\gamma = CT^b \exp\left(-\frac{\beta}{T}\right), \quad (1.15)$$

где  $\beta = qE_i/2k$ ,  $C$  и  $b$  – характеристические константы материала.

С учетом формулы (1.15) сопротивление полупроводника в зависимости от температуры можно представить в следующем виде:

$$R(T) = R_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-b} \exp\left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]. \quad (1.16)$$

где  $R_0$  – сопротивление при температуре  $T_0$ ,  $K$ .

В выражении (1.16) экспоненциальный множитель является определяющим, поэтому данное выражение обычно записывают в упрощенной форме:

$$R(T) = R_0 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right], \quad (1.17)$$

и полагают, что величина  $\beta$  не зависит от температуры.

В этом случае температурный коэффициент сопротивления, определяемый аналогично (1.11), описывается соотношением

$$\alpha_R = -\frac{\beta}{T^2}. \quad (1.18)$$

Таким образом, с ростом температуры полупроводников энергия валентных электронов увеличивается, и усиливается процесс генерации носителей зарядов. Поэтому в отличие от металлов, температура которых влияет, главным образом, на подвижность электронов, а их концентрация остается постоянной, с ростом температуры в полупроводниковых материалах значительно возрастает концентрация носителей электрического тока. Влияние этого фактора превалирует над рассеянием энергии электронов за счет увеличения тепловых колебаний атомов. Поэтому в полупроводниках с ростом температуры резко возрастает удельная электрическая проводимость (сопротивление уменьшается).

Полупроводниковые материалы так же, как металлические, широко применяются для изготовления терморезисторов.

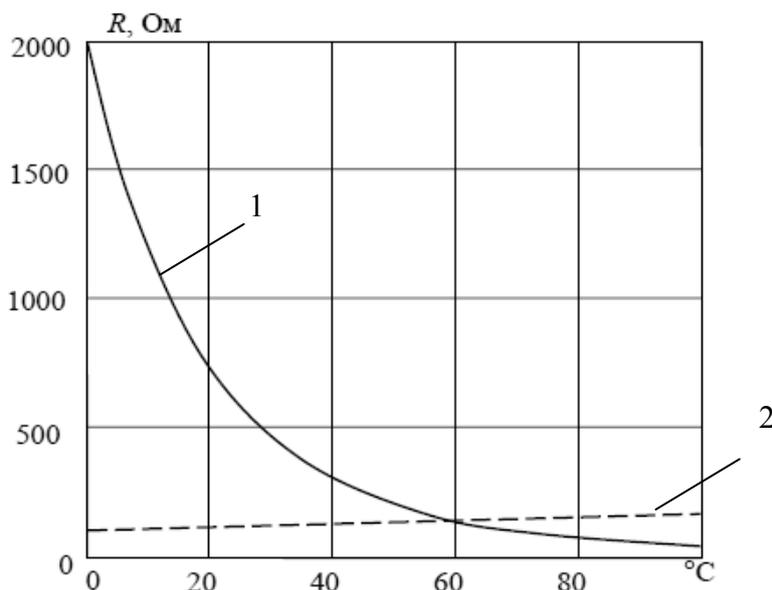
Зависимость электрического сопротивления полупроводникового терморезистора от температуры в соответствии с (1.17) имеет ярко выраженный нелинейный характер. На рис. 1.6 показаны в сравнении типовые зависимости электрического сопротивления полупроводникового 1 и металлического 2 терморезистора от температуры  $R(\Theta)$ .

В сравнении с металлами сопротивление полупроводникового терморезистора значительно чувствительнее к изменению температуры, но характеризуется гораздо большей нелинейностью зависимости  $R(\Theta)$ .

Коэффициент температурной чувствительности  $B$ , входящий в формулу (1.17), в узком диапазоне температур можно считать постоянным не зависящим и от изменения температуры. В широком диапазоне температур зависимость  $B(T)$  аппроксимируют полиномами второй или третьей степени.

Достоинство полупроводниковых терморезисторов по сравнению с ме-

таллическими – высокая чувствительность. Недостатки заключаются в значительной нелинейности функции преобразования  $R(\theta)$ , ее сильной зависимости от химического состава материала, что обуславливает большой разброс характеристик даже для терморезисторов одного типа.



**Рис. 1.6. Типовые зависимости сопротивления полупроводникового (1) и металлического (2) терморезисторов от температуры  $R(\theta)$**

Высокую чувствительность полупроводниковых преобразователей температуры в электрический сигнал при высокой линейности преобразования можно обеспечить за счет использования в качестве терморезистивного преобразователя **полупроводникового  $p-n$ -перехода**.

Электронно-дырочный переход ( $p-n$ -переход) – область полупроводника, в которой имеет место пространственное изменение типа проводимости от электронной  $n$  к дырочной  $p$ . Электронно-дырочный переход может быть создан, например, в объеме одного и того же полупроводника, легированного в одной части донорной примесью ( $p$ -область), а в другой – акцепторной ( $n$ -область).

Так как в  $p$ -области концентрация дырок гораздо выше, чем в  $n$ -области, дырки из  $p$ -области стремятся диффундировать в  $n$ -область, а электроны – в  $p$ -область. В результате такого перехода зарядов возникает контактное электрическое поле, противодействующее дальнейшей диффузии электронов и дырок. Разность потенциалов, возникающая между областями из-за наличия контактного поля и называемая контактной разностью потенциалов, составляет обычно десятые доли вольта. Если приложить к  $p-n$ -переходу внешнее электрическое

поле, направление которого противоположно контактному (прямое смещение, положительный потенциал приложен к  $p$ -области), то через переход потечет электрический ток (прямой ток  $I_{пр}$ ). Наличие контактного электрического поля обуславливает электрическое сопротивление  $p$ - $n$ -перехода при малых значениях прямого тока.

При изменении температуры сопротивление  $p$ - $n$ -перехода меняется, поэтому значение напряжения  $U_{пр}$ , приложенного к смещенному в прямом направлении переходу при некотором фиксированном прямом токе  $I_{пр}$ , зависит от температуры перехода  $\theta$  и с ее увеличением уменьшается. В достаточно широком диапазоне температур можно принять, что изменение напряжения на переходе  $\Delta U_{пр}$  прямо пропорционально изменению температуры  $\Delta\theta$ :

$$\Delta U_{пр} = k_T \Delta\theta,$$

где  $k_T = -(1 \dots 5)$  мВ/°С – температурный коэффициент.

Величина  $k_T$  является отрицательной и зависит от типа полупроводника.

Достоинствами терморезистивного преобразователя на основе  $p$ - $n$ -перехода являются электрический выходной сигнал и более высокая чувствительность к изменению температуры по сравнению с терморезисторами. При этом может быть обеспечена приемлемая линейность функции преобразования (на уровне единиц процентов), соизмеримая с характеристиками металлических терморезисторов. В качестве недостатка следует отметить относительно малый диапазон измеряемых температур (обычно  $-50 \dots +150$  °С).

## **1.4. Электрическая емкость.**

### **Емкостные измерительные преобразования**

#### **1.4.1. Электрическая емкость**

Электрическая емкость – это физическая величина, характеризующая способность проводника накапливать заряд. В теории электрических цепей ёмкостью называют взаимную ёмкость между двумя проводниками.

Устройство из двух проводников, способных сохранять электрический заряд, называется *конденсатором*. Конденсатор характеризуется величиной заряда  $q$ , накопленного на обоих проводниках, и напряжением  $U$  – положительной разностью потенциалов между ними. Количество накопленного заряда пропорционально разности потенциалов между проводниками. Коэффициент пропорциональности между разностью потенциалов и зарядом и есть электрическая емкость:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (1.19)$$

В системе СИ единицей измерения емкости является Фарад:  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$ . Фарад соответствует очень большой емкости, поэтому на практике обычно используются производные единицы: микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ).

Конденсатор в цепи постоянного тока может проводить ток в момент включения его в цепь (происходит заряд или перезаряд конденсатора), по окончании переходного процесса ток через конденсатор не течёт, так как сопротивление между обкладками конденсатора стремится к бесконечности. В цепи же переменного тока происходит циклическая перезарядка конденсатора.

Таким образом, в цепи переменного тока конденсатор является проводящим элементом. При этом разность фаз между током в цепи и напряжением на конденсаторе составляет  $90$  градусов, а сам ток зависит от собственной частоты изменения и емкости конденсатора. Говорят, что конденсатор в цепи переменного тока обладает комплексным сопротивлением и закон Ома для конденсатора можно записать в следующем виде:

$$Z_C = \frac{U}{i} = \frac{1}{j\omega C}, \quad (1.20)$$

где  $Z_C$  – реактивное сопротивление конденсатора;  $j$  – мнимая единица;  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота (рад/с) протекающего синусоидального тока;  $f$  – частота в Гц.

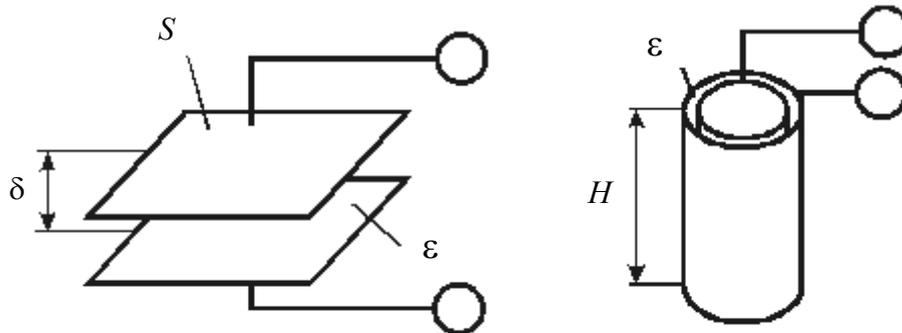
Из формулы (1.20) видно, что комплексное сопротивление конденсатора уменьшается с ростом частоты. Для постоянного тока частота равна нулю, следовательно, реактивное сопротивление конденсатора бесконечно (в идеальном случае).

Чаще всего в качестве проводников используют две параллельно расположенные пластины или две соосных цилиндрических оболочки (рис. 1.7). Величина емкости зависит от формы пластин и их расположения друг относительно друга, а также от свойств среды между ними.

Для плоскопараллельного конденсатора емкость может быть определена следующим образом:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\delta}, \quad (1.21)$$

где  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума);  $S$  – площадь обкладок;  $\delta$  – расстояние между ними.



**Рис. 1.7. Плоскопараллельный и цилиндрический конденсатор**

Для цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (1.22)$$

где  $r_1, r_2$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно;  $L$  – высота цилиндра.

Формулы (1.21), (1.22) справедливы для конденсаторов с обкладками, находящимися в вакууме (или в воздухе). Если заполнить пространство между пластинами диэлектриком, то за счет поляризации диэлектрика напряженность поля в нем уменьшится, а емкость конденсатора увеличится в  $\epsilon$  раз:

$$C = \epsilon C_0,$$

где  $C_0$  – емкость конденсатора с воздушным зазором между пластинами.

Например, для плоскопараллельного и цилиндрического конденсаторов с диэлектриком емкости соответственно равны:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{\delta}, \quad C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 H}{\ln(r_2/r_1)}.$$

#### **1.4.2. Физические основы емкостных измерительных преобразований**

Зависимость емкости конденсатора от его параметров может быть использована при построении различных измерительных устройств. Для плоскопараллельного конденсатора изменяющимися параметрами могут быть зазор между обкладками, площадь обкладок или диэлектрическая проницаемость; для цилиндрического конденсатора – диэлектрическая проницаемость или длина  $H$ , определяющая площадь перекрытия внутреннего и внешнего электродов.

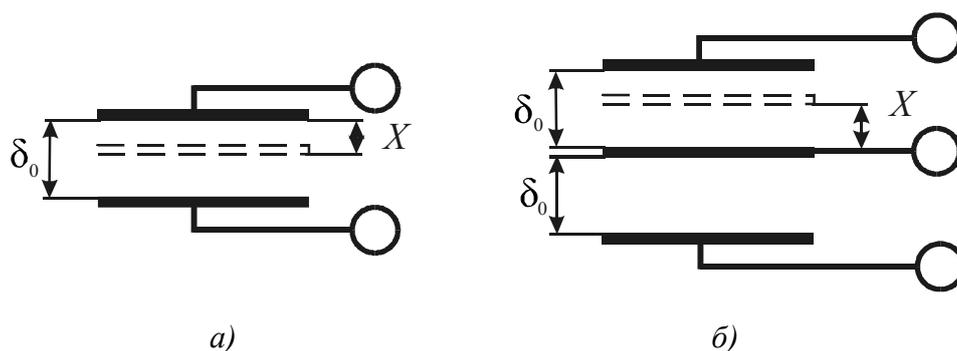
Воздействие измеряемой величины на один из перечисленных параметров приводит к изменению емкости конденсатора. Преобразование измеряемой величины в изменение емкости конденсатора называется *емкостным измерительным преобразованием*.

Изменение зазора между обкладками плоского конденсатора, площади перекрытия обкладок может происходить за счет перемещения одной из обкладок либо в собственной плоскости (переменный зазор, постоянная площадь), либо перпендикулярно ей (постоянный зазор, переменная площадь). В цилиндрическом конденсаторе обкладка может перемещаться вдоль оси цилиндра.

Диэлектрическая проницаемость может меняться за счет перемещения диэлектрика в зазоре либо за счет изменения, например уровня непроводящей жидкости (емкостные уровнемеры), а также за счет изменения физических свойств диэлектрика при его деформации, изменении влажности окружающей среды, температуры и др.

На рис. 1.8 – рис. 1.11 показаны варианты реализации емкостного преобразования на примере плоскопараллельных и цилиндрических конденсаторов. Для каждого варианта возможен дифференциальный способ реализации, при котором три обкладки образуют две емкости, изменения которых под действием измеряемой величины имеют разные знаки. Дифференциальный способ реализации позволяет увеличить диапазон измерения при фиксированном значении погрешности линейности и увеличить чувствительность.

Схемы реализации емкостных измерительных преобразований с изменяющимся зазором для недифференциального и дифференциального способа измерения показаны на рис. 1.8.



**Рис. 1.8.** Схемы реализации емкостного преобразования с изменяющимся зазором между обкладками: *а* – недифференциальный вариант; *б* – дифференциальный вариант

Для недифференциального варианта (рис. 1.8, *а*) емкость зависит от перемещения  $x$  обкладки следующим образом:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\delta_0 - x} = C_0 \left(1 - \frac{x}{\delta_0}\right)^{-1},$$

где  $C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\delta_0}$  – значение емкости при начальном воздушном зазоре  $\delta_0$ .

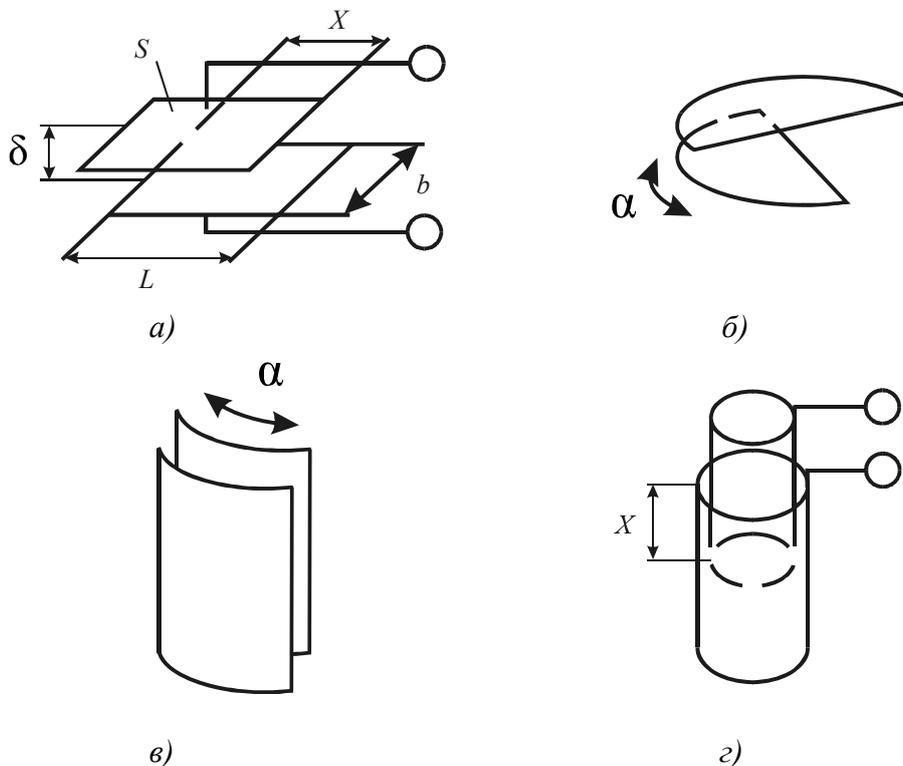
При дифференциальной схеме включения емкостного преобразователя (рис. 1.8, б) при перемещении средней обкладки изменяются две емкости:  $C_1$  между верхней и средней обкладкой и  $C_2$  между средней и нижней:

$$C_1 = C_0 \left(1 - \frac{x}{\delta_0}\right)^{-1}, \quad C_2 = C_0 \left(1 + \frac{x}{\delta_0}\right)^{-1}.$$

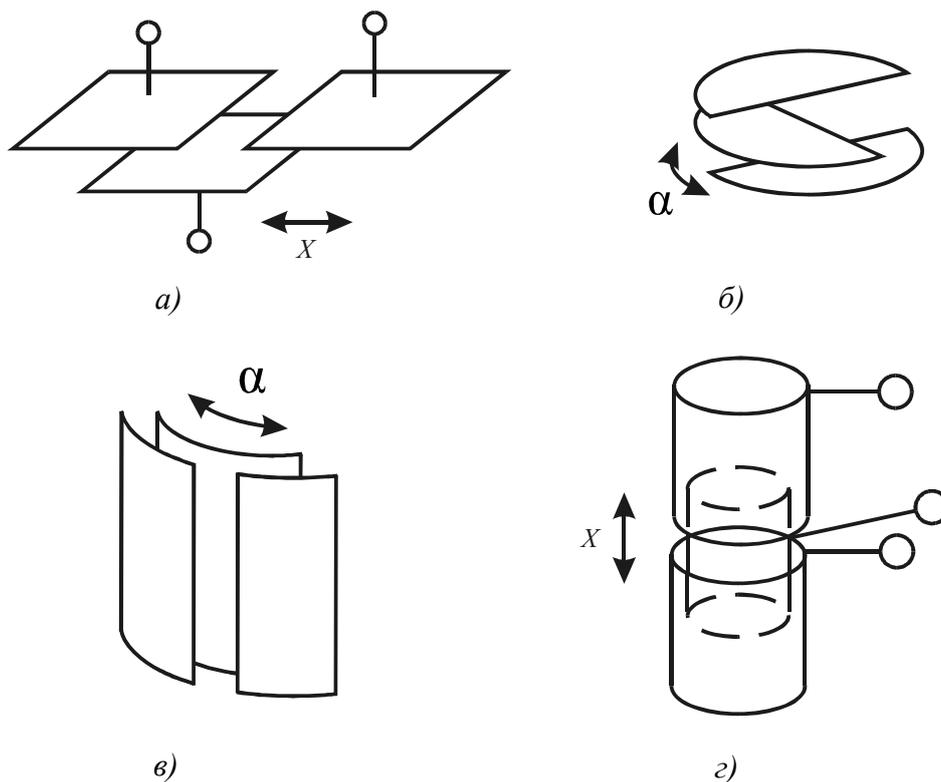
С помощью измерительной схемы можно сформировать сигнал, пропорциональный разности емкостей:

$$U_{\text{вых}} \sim \Delta C = C_1 - C_2 = \frac{2C_0}{\delta_0 \left(1 - (x/\delta_0)^2\right)} x.$$

Варианты схем реализации недифференциального и дифференциального емкостного преобразования с переменной площадью обкладок показаны на рис. 1.9 и рис. 1.10 соответственно.



**Рис. 1.9. Схемы реализации емкостного преобразования с переменной площадью обкладок**



**Рис. 1.10. Варианты дифференциальных схем реализации емкостного преобразования с переменной площадью обкладок**

Для схем, представленных на рис. 1.9, зависимости емкости от линейного  $x$  или углового  $\alpha$  перемещения обкладки имеют вид

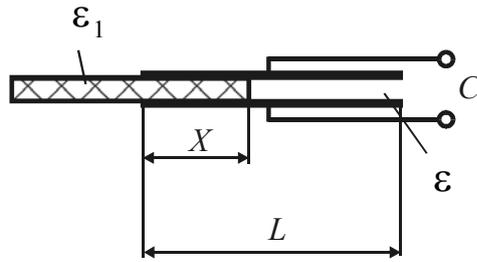
а)  $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S_x}{\delta} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 b}{\delta} x$ , где  $S_x$  – площадь перекрытия обкладок,  $b$  – линейный поперечный размер обкладки;

б)  $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}{2\delta} \alpha$ , где  $r$  – радиус сектора обкладки,  $\alpha$  – измеряемый угол в радианах;

в)  $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 H}{\ln(r_2/r_1)} \alpha$ , где  $H$  – высота обкладок,  $r_1, r_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок;

г)  $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} x$ , где  $r_1, r_2$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров.

Схема реализации недифференциального емкостного преобразования с изменяющейся диэлектрической проницаемостью показана на рис. 1.11.



**Рис. 1.11. Схема реализации емкостного преобразования с изменяющейся диэлектрической проницаемостью**

Емкость такого конденсатора равна

$$C = C_0 \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{x}{L} \right), \quad (1.23)$$

где  $C_0 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L b}{\delta}$  – начальная емкость преобразователя;  $\varepsilon_1$  – относительная диэлектрическая проницаемость перемещающегося диэлектрика;  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $L, b$  – линейные размеры обкладки.

Таким образом, применение емкостного преобразования позволяет получить зависимость емкости конденсатора от измеряемой величины. Для дальнейшего преобразования емкости в электрический сигнал в виде тока или напряжения конденсатор включают в измерительную электрическую цепь.

Наиболее часто первичные измерительные цепи емкостных элементов строятся на схемах делителя напряжения (рис. 1.12) или мостовых схемах (рис. 1.13). В смежные плечи моста могут включаться активные сопротивления (рис. 1.12, 1.13), емкости или индуктивности. В последнем случае при настройке схемы на резонансную частоту колебательного контура чувствительность схемы к изменению емкости резко возрастает.

Для мостовой схемы (рис. 1.13, а) при выполнении соотношения  $\omega = 1/RC_0$  выходной сигнал равен

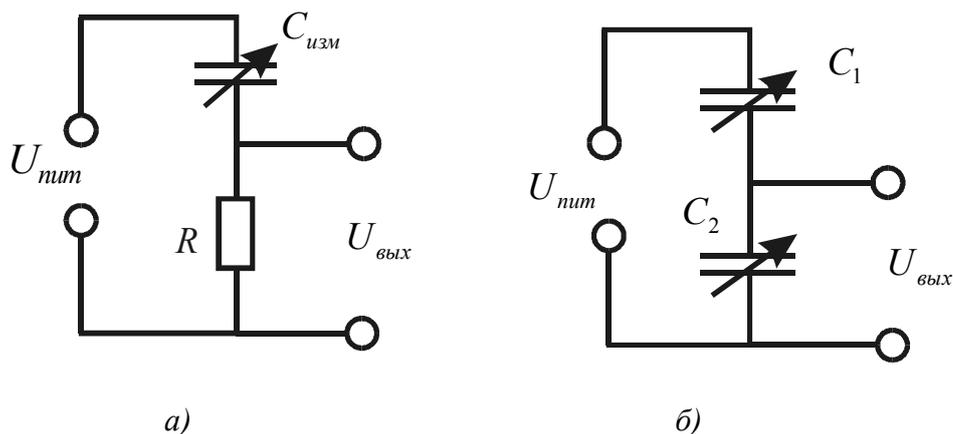
$$U_{\text{вых}} \approx \frac{U_{\text{пит}}}{2} \frac{C_{\text{изм}} - C_0}{C_0},$$

где  $U_{\text{пит}}$  – напряжение питания схемы;  $C_{\text{изм}}, C_0$  – измерительная и постоянная емкости;  $R$  – активное сопротивление, включаемое в смежные плечи моста.

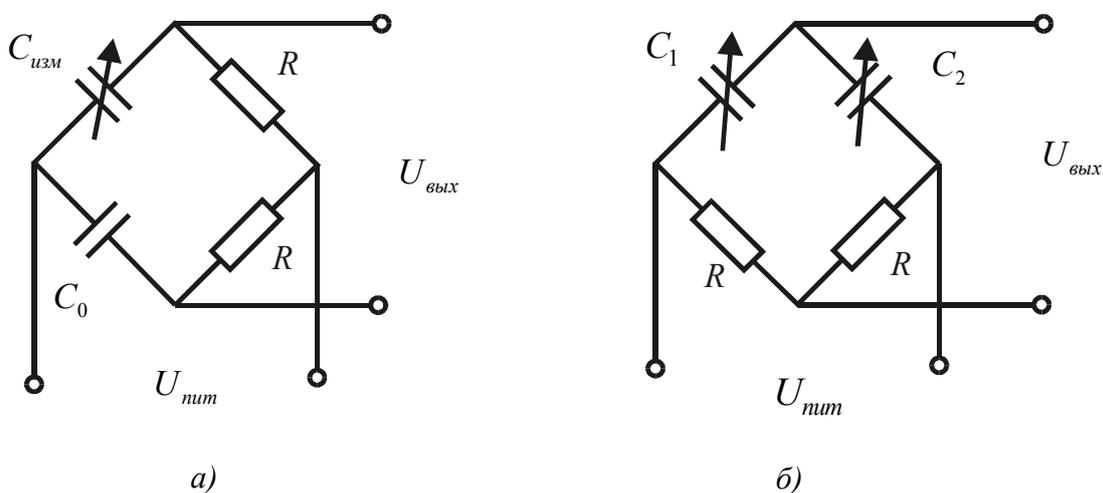
Для схемы на рис. 1.13, б

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{пит}}}{2} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}, \quad (1.24)$$

где  $C_1, C_2$  – емкости дифференциального конденсатора.



**Рис. 1.12.** Схемы делителя напряжения для недифференциального (а) и дифференциального (б) вариантов реализации емкостного преобразования



**Рис. 1.13.** Мостовые схемы для недифференциального (а) и дифференциального (б) вариантов реализации емкостного преобразования

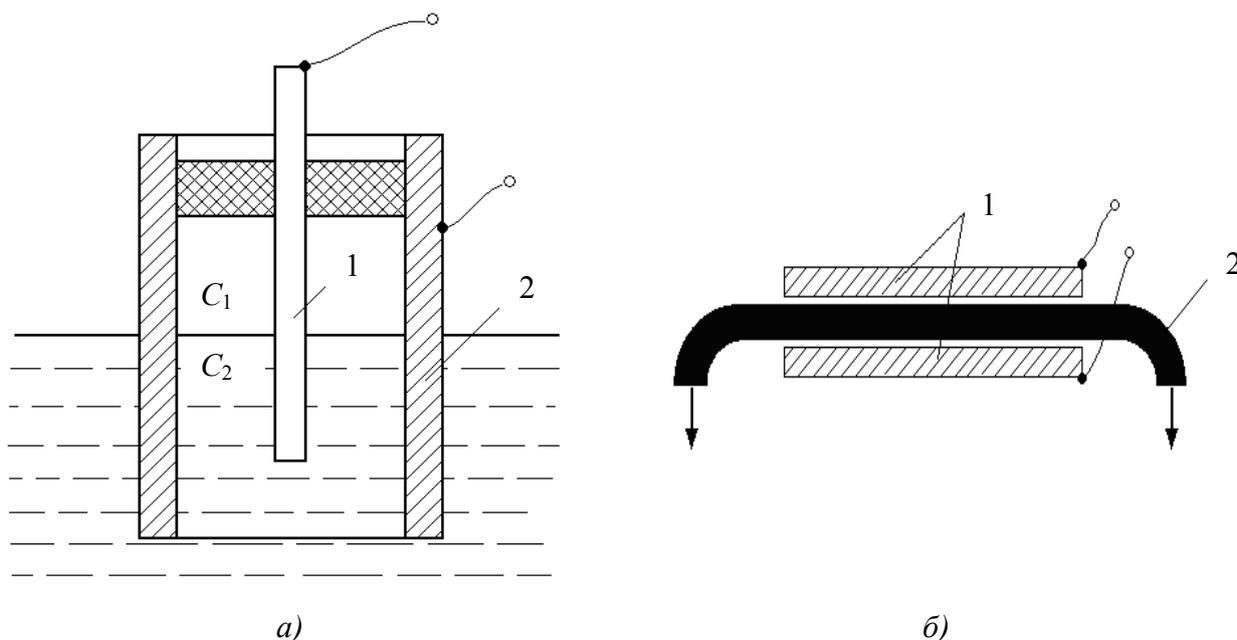
Выражение (1.24) является линейным по перемещению как для емкостного преобразования с переменной площадью обкладок (см. рис. 1.10), так для преобразования с переменной величиной зазора между обкладками (см. рис. 1.8, б).

### **1.4.3. Примеры применения емкостных измерительных преобразований**

Наиболее часто конденсаторы (емкостные элементы) применяются для измерения линейных и угловых перемещений, причем они могут использоваться как непосредственно для измерения перемещений, так и в составе различных датчиков, например, для измерения расстояния, площади, объема, уровня, давления, силы, ускорения и т.д.

Зависимость свойств диэлектрика от влажности, давления, температуры, механических напряжений в материале, ионизирующих излучений может быть положена в основу работы преобразователей для определения перечисленных величин.

На рис. 1.14 приведены схемы построения емкостных преобразователей, реализующих зависимость емкости от диэлектрической проницаемости.



**Рис. 1.14. Преобразователи, реализующие зависимость емкости от диэлектрической проницаемости: а – емкостной уровнемер; б – емкостной толщиномер**

На рис. 1.14, а показан емкостной преобразователь уровня непроводящей жидкости, представляющий собой коаксиальный конденсатор с изолированными друг от друга электродами 1 и 2. Емкость такого преобразователя может быть определена как емкость двух параллельно соединенных конденсаторов: один из них  $C_1$  образован частью электродов и диэлектриком – жидкостью, уровень которой измеряется, а другой  $C_2$  – остальной частью электродов и диэлектриком – воздухом. Функция преобразования при этом аналогична формуле (1.23), в которой  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  – относительная диэлектрическая проницаемость воздуха и жидкости соответственно,  $x$  – уровень жидкости, который необходимо измерить,  $L$  – полная длина преобразователя.

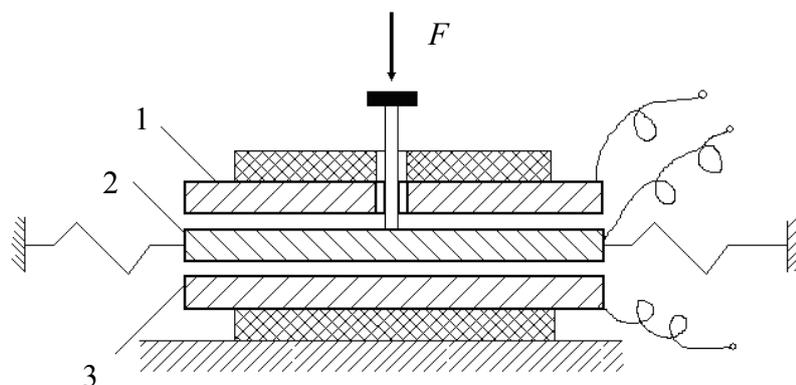
На рис. 1.14, б представлена схема построения емкостного преобразователя толщины (толщиномера), измеряющего толщину ленты 2 из диэлектрика, например, резины. Лента протягивается между обкладками 1 конденсатора, и в зависимости от ее толщины изменяется диэлектрическая проницаемость межэлектродного пространства.

Емкость ИП при этом можно выразить следующей формулой:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_{\text{л}} \varepsilon_0 S}{(\delta - \delta_{\text{л}}) \varepsilon_{\text{л}} + \delta \varepsilon},$$

где  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{\text{л}}$  – относительная диэлектрическая проницаемость воздуха и материала контролируемой ленты соответственно;  $\delta$  – расстояние между обкладками преобразователя;  $\delta_{\text{л}}$  – измеряемая толщина ленты.

При измерении механической силы или перемещения используют зависимость емкости от расстояния между обкладками конденсатора. Примером реализации дифференциального емкостного преобразования может служить измерительный преобразователь силы (рис. 1.15). Зазор емкостей изменяется в зависимости от величины измеряемого усилия или перемещения.



**Рис. 1.15. Емкостной измерительный преобразователь силы:**

1, 3 – неподвижные электроды; 2 – подвижный электрод

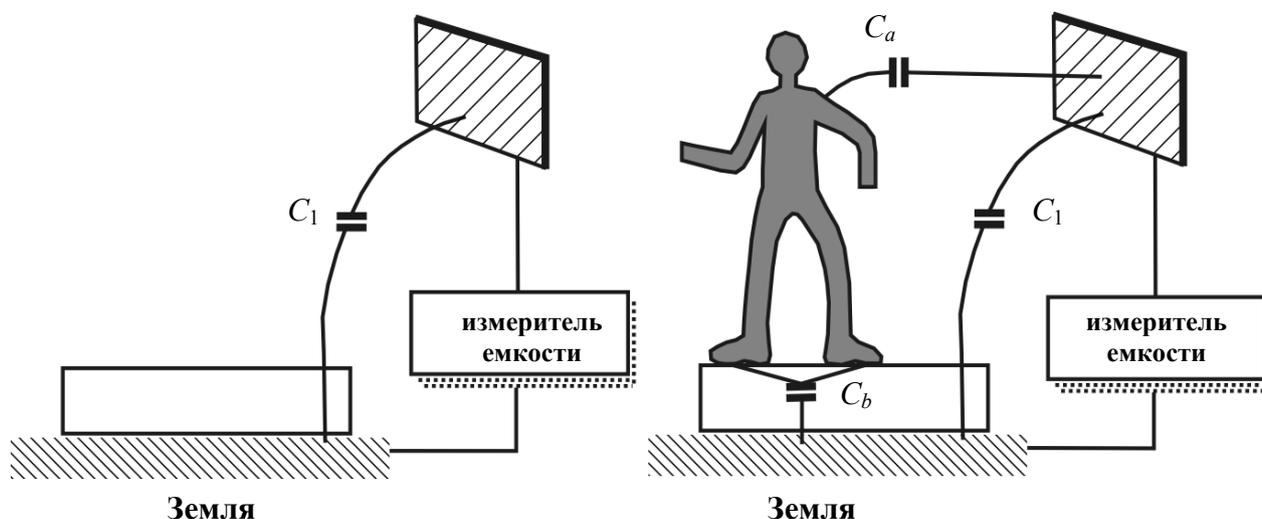
Емкостные преобразователи для измерения малых перемещений (порядка  $10^{-7} \dots 10^{-3}$  м) находят широкое применение в интегральных датчиках линейных и угловых ускорений, давления, силы и других параметров. Такие преобразователи отличаются высокой чувствительностью, линейностью, малыми погрешностями и одновременно простотой конструкции и легкостью подвижной части, что в ряде случаев делает их незаменимыми.

Еще одной областью применения емкостных измерительных преобразований являются системы обнаружения стационарных или движущихся объектов (охранные системы) [4]. Чаще всего под объектом имеется в виду человек или животное.

Принцип работы таких систем основывается на том, что все объекты связаны друг с другом некоторыми емкостными связями. И если эти связи в какой-

либо зоне зафиксировать, появление любого нового объекта в окрестности этой зоны приведет к нарушению установившихся связей.

Пояснить это можно с помощью рис. 1.16.



**Рис. 1.16. Применение емкостного преобразования в охранных системах**

Первоначально емкость между тестовой пластиной и землей (под словом «земля» подразумевается любой большой объект, такой как пол в здании, автомобиль, корабль, самолет и т.д.) равна  $C_1$ . При вторжении человека в окрестность этой пластины формируются две дополнительные емкости:  $C_a$  – между пластиной и телом и  $C_b$  – между телом и землей. Поэтому суммарная емкость между пластиной и землей увеличится на величину  $\Delta C$ :

$$C = C_1 + \Delta C = C_1 + \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}.$$

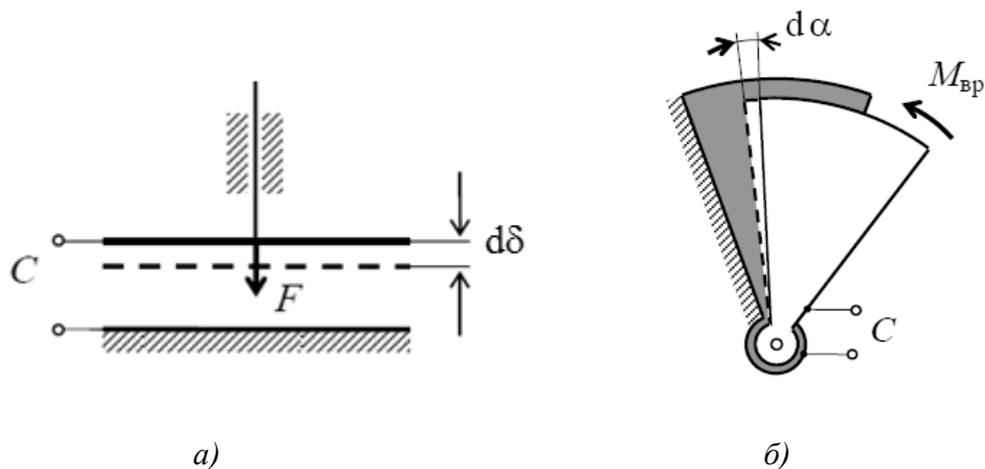
Это изменение емкости может быть зафиксировано при помощи измерительной аппаратуры и использоваться для детектирования присутствия людей в охраняемой зоне. При движении человека величины емкостей меняются, что дает возможность отделить движущиеся объекты от статических.

### **1.5. Энергия электрического поля. Силы, развиваемые в электрическом поле**

Согласно закону Кулона, между точечными зарядами существует силовое взаимодействие. Следовательно, между заряженными телами, например, обкладками конденсатора действует сила притяжения, причем чем больше напряжение на конденсаторе, тем больше сила взаимодействия обкладок.

Таким образом, емкостной преобразователь может быть использован для преобразования электрической величины – напряжения между обкладками  $U$ , в механические величины – силу притяжения между обкладками  $F$  или момент вращения  $M_{\text{вр}}$ .

Предположим, что в результате взаимного притяжения заряженных обкладок конденсатора произошло их линейное перемещение на малое расстояние  $dx$  либо поворот на малый угол  $d\alpha$ . Вид взаимного перемещения обкладок зависит от степени их свободы [1] (рис. 1.17).



**Рис. 1.17. Линейное (а) и угловое (б) перемещения подвижной обкладки конденсатора под действием сил электростатического притяжения**

При перемещении обкладок на малые значения  $d\delta$  или  $d\alpha$  силами электростатического взаимодействия совершается элементарная механическая работа  $dA$ :

$$dA = -F \cdot d\delta \quad \text{или} \quad dA = M_{\text{вр}} \cdot d\alpha.$$

Знак «минус» в первом выражении обусловлен тем, что сила  $F$  в сторону уменьшения зазора  $\delta$ .

Работа равна изменению энергии  $W_{\text{э}}$  электрического поля конденсатора, следовательно:

$$F = \frac{dW_{\text{э}}}{dx}, \quad M_{\text{вр}} = \frac{dW_{\text{э}}}{d\alpha}.$$

Электрическая энергия конденсатора накапливается при его заряде за счет работы по перемещению электрического заряда  $q$  с одной обкладки на другую. Поскольку по определению разность электрических потенциалов  $U$  обкладок равна работе по перемещению единичного заряда, полная работа по пе-

ремещению заряда  $q$  для конденсатора емкостью  $C$  может быть найдена интегрированием:

$$W_3 = \int_0^q U dq = \int_0^q U d(CU) = C \int_0^U U dU = \frac{CU^2}{2}.$$

Если напряжение между обкладками не зависит от перемещения подвижной обкладки, то

$$F = -\frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\delta}, \quad M_{\text{вр}} = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\alpha}.$$

При взаимодействии электрически заряженных пластин (рис. 1.17)

$$F = -\frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\delta} = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\delta^2},$$

$$M_{\text{вр}} = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\alpha} = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\delta} \frac{dS}{d\alpha} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 r^2 U^2}{4\delta},$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора;  $S$  – площадь обкладок;  $\delta$  – расстояние между ними;  $r$  – радиус пластины конденсатора.

Преобразование электрического напряжения в момент вращения является основой для построения электростатических измерительных механизмов вольтметров, используемых для измерения как постоянных, так и переменных напряжений. Последнее обеспечивается тем, что в уравнении преобразования величина  $U$  возводится в квадрат, и таким образом направление действующего момента вращения не зависит от полярности напряжения. Подбором формы электродов можно получить желаемую зависимость  $dS/d\alpha = f(\alpha)$  и обеспечить, в частности, линейность зависимости  $M_{\text{вр}}(U)$ .

Электростатические силовые преобразователи используются также в качестве обратных преобразователей в датчиках компенсационного типа различных физических величин.

Достоинствами электростатических силовых преобразователей являются высокое входное сопротивление, достигаемое без использования электронных усилителей, и возможность применения в широком диапазоне частот. Недостаток – малое значение создаваемой силы или момента.

## 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 2.1. Основные характеристики магнитного поля

Магнитное поле является составляющей электромагнитного поля и характеризуется силовым действием на движущиеся электрические заряды и тела, обладающие магнитным моментом, независимо от состояния их движения. Сила, действующая на движущуюся в магнитном поле электрически заряженную частицу, пропорциональна заряду частицы и ее скорости.

По определению основной характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ , который может быть определен по силе  $\vec{F}$ , действующей на заряд  $q$ , перемещающийся со скоростью  $\vec{V}$ :

$$\vec{F} = q[\vec{V} \times \vec{B}].$$

Направление силы для положительного заряда находится по правилу левой руки (рис. 2.1). Единицей измерения магнитной индукции является тесла (Тл).

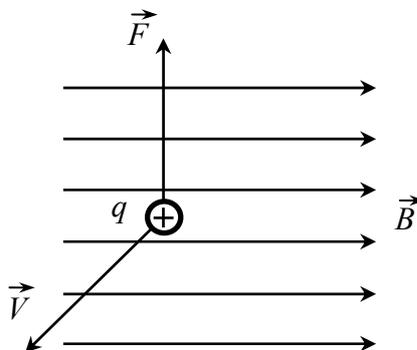


Рис. 2.1. Сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле

Магнитное поле может создаваться электрическим током (током заряженных частиц), магнитными моментами электронов в атомах либо изменяющимся во времени электрическим полем.

Магнитный момент – векторная величина, характеризующая способность электрического тока возбуждать магнитное поле. Магнитный момент зависит от силы тока и пространственного расположения контура. Для плоского контура  $S$ , по которому течет ток  $I$ , магнитный момент  $\vec{p}$  определяется по формуле:

$$\vec{p} = IS\vec{n},$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали, направление которого определяется по правилу правого винта относительно направления тока в контуре.

Таким образом, направление магнитного момента совпадает с нормалью к плоскости контура. Единицей измерения магнитного момента является ампер-квадратный метр ( $A \cdot m^2$ ).

Возникновение магнитного поля вокруг движущихся электрических зарядов (проводника с электрическим током) является основным свойством магнетизма.

Согласно современной физической теории, атомы обладают магнитными свойствами, являясь как бы элементарными магнитами. Электрон находится в постоянном вихревом вращении внутри атома. Движение электрона создает круговой ток вокруг ядра атома, который является причиной магнитного момента атома (причиной возникновения очень маленького магнитного поля). Если магнитные моменты атомов сориентировать в одном направлении, их магнитные поля сложатся, формируя одно большое магнитное поле. Магнитный момент твердого тела складывается из магнитных моментов отдельных атомов:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i,$$

где суммирование ведется по всем атомам.

Таким образом, наличием магнитных моментов атомов можно объяснить природу постоянных магнитов.

Магнитным моментом обладают элементарные частицы, атомы, и молекулы, поэтому все вещества обладают магнитными свойствами, т.е. являются магнетиками. Магнитные свойства веществ определяются величиной и ориентацией магнитных моментов молекул, ионов или атомов.

Основной характеристикой любого векторного поля является поток вектора. В магнитном поле поток вектора  $\mathbf{B}$  магнитной индукции называется магнитным потоком  $\Phi$ . Магнитный поток  $\Phi$  вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  через поверхность  $S$  определяется следующим соотношением:

$$\Phi = \oint B dS.$$

Единицей измерения магнитного потока является Вебер (Вб).

Различные материалы по-разному проявляют свои свойства в магнитном поле, что проявляется в усилении или ослаблении магнитного поля в материале по сравнению с магнитным полем вне него. Соответственно, сила взаимодействия магнитного поля и движущегося заряда зависит от среды, в которой этот

заряд движется. Для характеристики магнитных свойств среды (материала) используют понятия напряженности магнитного поля  $H$  и магнитной проницаемости материала  $\mu$ :

$$B = \mu \cdot H. \quad (2.1)$$

Единицей измерения напряженности магнитного поля в системе СИ является ампер на метр (А/м); размерность магнитной проницаемости – генри на метр (Гн/м). (В системе СГС единицы измерения  $H$  и  $B$  совпадают (гаусс), т.е. магнитная проницаемость является безразмерной величиной).

Напряжённость магнитного поля имеет физический смысл «внешнего» поля, то есть совпадает (в системе СГС – абсолютно, в системе СИ – с точностью до постоянного размерного коэффициента) с таким вектором магнитной индукции, какой был бы при отсутствии среды. Например, если поле создаётся катушкой с током, в которую вставлен железный сердечник, то напряжённость магнитного поля  $H$  внутри сердечника совпадает с вектором  $B_0$ , который был бы создан этой катушкой при отсутствии сердечника. В вакууме или немагнитных средах напряжённость магнитного поля совпадает с вектором магнитной индукции с точностью до коэффициента  $\mu_0$ :

$$B = \mu_0 \cdot H.$$

Коэффициент  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума – фундаментальная физическая постоянная, равная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Вектор магнитной индукции  $B$  является более фундаментальной характеристикой магнитного поля. Именно он определяет силу действия магнитного поля на движущиеся заряженные частицы и токи, и может быть непосредственно измерен. В то время как напряжённость магнитного поля  $H$  можно рассматривать как вспомогательную величину, которую проще рассчитать аналитически, так как ее создают свободные токи, а среду, т.е. молекулярные токи, учитывать не нужно.

Магнитная проницаемость среды  $\mu$  характеризует зависимость силы взаимодействия магнитного поля и движущегося заряда (электрического тока) от среды, в которой находится заряд (электрический ток). Для разных материалов характерны различные значения  $\mu$ . Магнитную проницаемость среды можно выразить через магнитную проницаемость вакуума:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0, \quad (2.2)$$

где  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость среды – безразмерная величина, показывающая во сколько раз усиливается магнитное поле в среде.

Для вакуума относительная магнитная проницаемость равна единице. Отличие относительной магнитной проницаемости среды от относительной магнитной проницаемости вакуума, характеризуется величиной, называемой *магнитной восприимчивостью*  $\chi_m$

$$\mu_r = 1 + \chi_m.$$

Если осуществить подстановку

$$B = \mu \cdot H = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) H = \mu_0 \cdot (H + \chi_m \cdot H) = \mu_0 \cdot (H + J).$$

Векторная величина

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H}, \quad (2.3)$$

называемая *намагниченностью*, характеризует способность вещества при воздействии на него внешнего магнитного поля создавать собственное магнитное поле и равна магнитному моменту единицы объема вещества:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}}{V}.$$

## 2.2. Магнитные свойства материалов

В зависимости от значения и знака магнитной восприимчивости все вещества условно делят на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики [1].

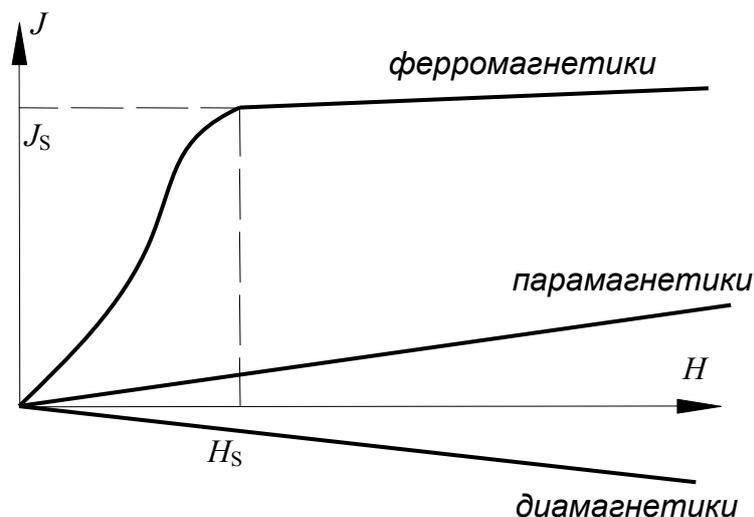
Диамагнетики имеют отрицательную магнитную восприимчивость порядка  $\chi_m = - (10^{-5} \dots 10^{-7})$ , т.е. диамагнетики слабо намагничиваются во внешнем магнитном поле в направлении, противоположном вектору напряженности внешнего поля. К диамагнетикам относятся азот, водород, германий, кремний, цинк, медь, а также некоторые органические и неорганические соединения: вода (жидкая), поваренная соль, ацетон, глицерин, нафталин и др.

Парамагнетики имеют положительную магнитную восприимчивость порядка  $\chi_m = +(10^{-5} \dots 10^{-1})$ , т.е. эти вещества намагничиваются во внешнем магнитном поле по направлению поля. К ним относятся, например, алюминий, литий, натрий, титан, платина, кислород, другие элементы, некоторые сплавы и соли.

Зависимости намагниченности диа- и парамагнетиков от напряженности магнитного поля можно считать линейными и однозначными (рис. 2.2).

Магнитные свойства диамагнетиков и парамагнетиков в измерительных средствах широкого применения не нашли. Чаще всего они используются в качестве конструкционных материалов, когда необходимо изготовить немагнит-

ные элементы. Напротив, очень широкое применение в первичных средствах измерения (датчиках) имеют магнитные свойства ферромагнитных материалов.



**Рис. 2.2.** Зависимости намагниченности материалов от напряженности магнитного поля

Ферромагнетики — это вещества, в которых при температуре, меньшей определенного значения (точки Кюри), способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Другими словами, при высоких температурах ферромагнетики обладают самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий. Характерным признаком ферромагнетиков являются высокое значение магнитной восприимчивости.  $\chi_m = +(1 \dots 10^5)$  и ее сильная и неоднозначная зависимость от напряженности магнитного поля. Ферромагнитными свойствами обладают железо, кобальт, никель, редкоземельные металлы (самарий, ниобий), многочисленные сплавы и соединения указанных металлов, а также соединения хрома и марганца.

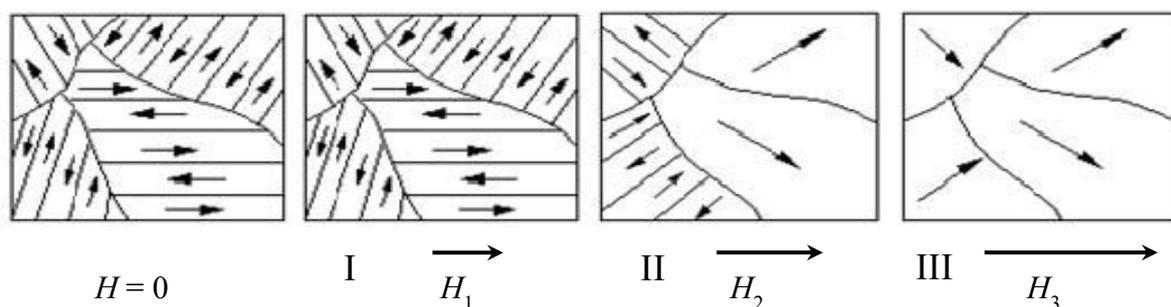
Соотношения (2.1) и (2.3) для ферромагнетиков имеют место только при определенных условиях. У них связь между намагничиванием и внешним полем более сложная — нелинейная и неоднозначная. Эта связь графически изображается так называемой кривой намагничивания  $J(H)$  (рис. 2.2). Магнитная проницаемость ферромагнетиков зависит от напряженности создаваемого в нем магнитного поля.

Так как у ферромагнетиков значение относительной магнитной проницаемости значение  $\mu_r \gg 1$ , то в соответствии с формулой  $\mu_r = 1 + \chi_m$  можно считать, что  $\mu_r \approx \chi_m$  и, следовательно,  $B \approx \mu_0 J$ . В связи с этим на практике для ха-

рактические характеристики магнитных свойств ферромагнитных материалов чаще используют не намагниченность  $J$ , а индукцию  $B$ , которая, в отличие от  $J$ , может быть определена прямыми измерениями. Кривую намагничивания при этом рисуют в координатах  $B(H)$ .

Процесс установления намагниченности ферромагнетика при действии на него внешнего магнитного поля происходит следующим образом. В состоянии полного размагничивания ферромагнетик состоит из большого количества микроскопических областей (доменов), каждая из которых самопроизвольно намагничена до насыщения. Наличие в ферромагнетике областей спонтанной намагниченности (доменов) обусловлено его кристаллическим строением и взаимодействием атомов. Размеры доменов составляют ( $10^{-4} \dots 10^{-5}$ ) м, что значительно превышает размеры отдельных атомов ( $\sim 10^{-9}$  м). В ненамагниченном веществе магнитные моменты отдельных доменов компенсируют друг друга, и общий магнитный момент образца равен нулю.

Процесс намагничивания заключается в переориентации векторов намагниченности доменов в направлении приложенного поля и в перемещении границ между доменами. Изменение структуры ферромагнетика при намагничивании схематично показано на рис. 2.3 ( $H_1 < H_2 < H_3$ ).



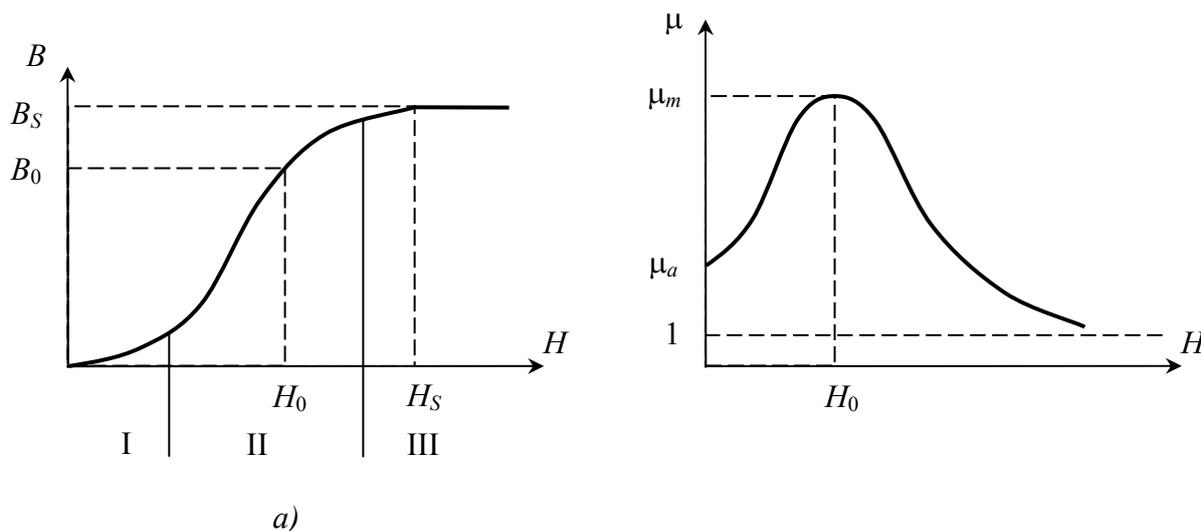
**Рис. 2.3.** Изменение доменной структуры ферромагнетика при намагничивании

Причиной возможной задержки или ускорения намагничивания является магнитная анизотропия ферромагнетика, что обусловлено наличием в ферромагнетике осей легкого намагничивания, в общем случае не совпадающих с напряженностью внешнего магнитного поля.

Если ферромагнетик, находящийся в состоянии полного размагничивания, намагничивать в монотонно и медленно возрастающем поле, то получающуюся зависимость  $B(H)$  называют *кривой первоначального намагничивания* (рис. 2.4, а).

При слабых магнитных полях (область I, рис. 2.3 и рис. 2.4, а) процесс намагничивания является обратимым, при этом  $B = \mu_a \mu_0 H$ . В этой области

протекают главным образом процессы упругого смещения границ доменов при постоянстве начальной магнитной проницаемости  $\mu_a$ .



**Рис. 2.4. Первоначальное намагничивание ферромагнетика:**

$a$  – кривая начального намагничивания  $B(H)$ ;  $b$  – зависимость относительной магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля  $\mu(H)$

При увеличении напряженности внешнего магнитного поля относительная магнитная проницаемость увеличивается до некоторого максимального значения  $\mu_m$ , при этом процесс намагничивания характеризуется быстрым ростом намагниченности (магнитной индукции в материале), связанным с необратимым смещением междоменных границ (область II, рис. 2.3 и рис. 2.4,  $a$ ). На этом участке намагничивание происходит скачками (скачки Баркгаузена), что обусловлено задержками смещения границ доменов при встрече с какими-либо неоднородностями структуры ферромагнетика (атомами примесей, дислокациями, микротрещинами и т.п.). В области приближения к насыщению (область III, рис. 2.3 и рис. 2.4,  $a$ ) основную роль играют процессы вращения (поворота) векторов намагниченности доменов относительно направления внешнего магнитного поля. После достижения магнитного насыщения, когда магнитные моменты всех доменов оказываются повернутыми в направлении  $H$ , намагниченность ферромагнетика далее с ростом напряженности магнитного поля практически не меняется.

Напряженность  $H_S$  внешнего магнитного поля, при которой индукция в материале достигает максимального значения и практически перестает зависеть от изменения внешнего магнитного поля, называется *напряженностью насыщения*. Само значение индукции  $B_S$  называют *индукцией насыщения*. Индукция насыщения является одной из характеристик магнитных свойств ферромагнетиков.

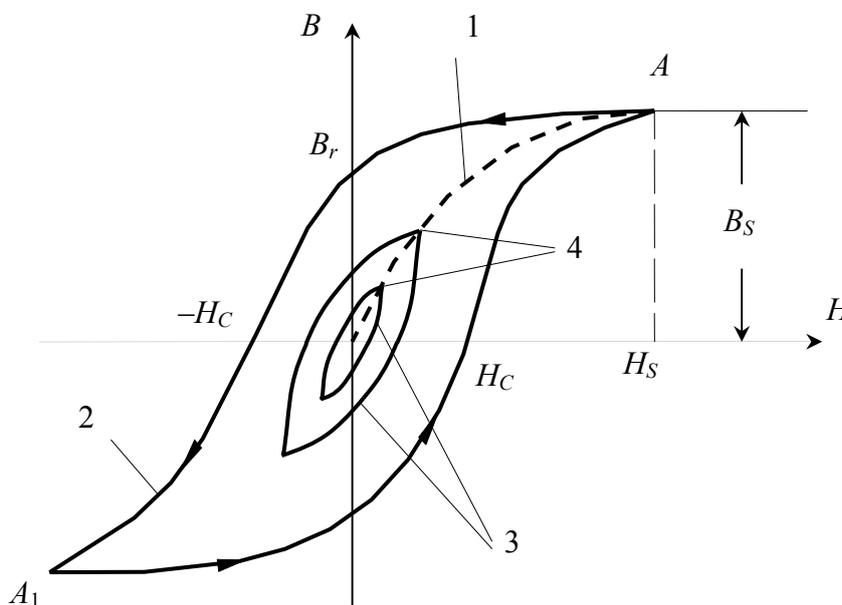
Зависимость магнитной проницаемости от напряженности внешнего маг-

нитного поля показана на рис. 2.4, б. Магнитная проницаемость, как видно из кривой начального намагничивания, возрастает в слабых полях от некоторого начального значения  $\mu_a$  до максимального значения при  $H = H_0$ :

$$\mu_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{B_0}{H_0}. \quad (2.4)$$

При дальнейшем увеличении намагничивающего поля относительная магнитная проницаемость уменьшается, асимптотически приближаясь к значению  $\mu = 1$ , когда ферромагнетик практически не влияет на магнитное поле в занимаемом им объеме. Зависимости магнитной индукции и, соответственно, проницаемости ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля являются неоднозначными.

При уменьшении напряженности магнитного поля от  $H_S$  до нуля значение магнитной индукции в материале будет уменьшаться за счет возникновения и роста доменов с магнитным моментом, направленным против поля, что обусловлено стремлением магнитной системы к минимуму энергии. Изменение доменной структуры может тормозиться наличием различного рода неоднородностей. Поэтому при уменьшении  $H$  магнитная индукция в материале будет уменьшаться по кривой, лежащей выше кривой первоначального намагничивания (рис. 2.5, кривая 2 от точки  $A$  до  $B_r$ ).



**Рис. 2.5. Зависимость индукции в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля:** 1 – кривая начального намагничивания; 2 – предельная петля намагничивания; 3 – петли частных циклов намагничивания; 4 – точки  $(B_m, H_m)$  частных петель намагничивания

Отставание индукции  $B$  от напряженности  $H$  при уменьшении напряженности называется *магнитным гистерезисом*. При уменьшении  $H$  до нуля у ферромагнетика сохраняется так называемая остаточная намагниченность. Индукцию  $B_r$  называют *остаточной магнитной индукцией*. Образец полностью размагничивается лишь в достаточно сильном поле противоположного направления, с напряженностью  $H_c$ , называемой *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении магнитного поля обратного направления образец вновь намагничивается вдоль поля до насыщения (точка  $A_1$ , рис. 2.5) и т. д.

Таким образом, при перемагничивании ферромагнетиков в переменном поле процесс изменения магнитной индукции поля в образце характеризуется симметричной замкнутой кривой, которая, вследствие запаздывания изменения индукции, называется петлей *магнитного гистерезиса* (рис. 2.5).

Если амплитуда напряженности поля заходит в область насыщения намагниченности образца, петля гистерезиса называется *предельной*, или *максимальной, петлей* (дальнейшее увеличение поля  $H$  в образце не приводит к качественным изменениям формы петли), в остальных случаях – петлей частного цикла (кривые 3, рис. 2.5). Частных циклов существует бесконечное множество, и все они лежат внутри максимальной петли гистерезиса, а максимумы значений  $B_m$  и  $H_m$  (или  $J_m$  и  $H_m$ ) частных циклов всегда лежат на основной кривой намагничивания (кривая первоначального намагничивания 1, рис. 2.5).

Нелинейность петли показывает, что индукция поля изменяется не по закону изменения напряженности. Множество возможных петель гистерезиса означают, что значение магнитной индукции  $B$ , соответствующее некоторому значению  $H$ , зависит от предыстории магнитного состояния образца и может быть различным. При этом магнитная проницаемость, определяемая по формуле (2.4), будет также зависеть от предыстории намагничивания и может изменяться в широких пределах. Поэтому само понятие «магнитная проницаемость» для ферромагнетика применимо только к *кривой начального намагничивания* – основной кривой намагничивания ферромагнетика. Однако кривая, проведенная через вершины ( $B_m$ ;  $H_m$ ) ряда частных петель гистерезиса, практически совпадает с кривой начального намагничивания (рис. 2.5). Поэтому магнитная проницаемость ферромагнетика может быть определена экспериментально через эти максимальные значения  $B_m$  и  $H_m$ , относящиеся к любой из частных петель гистерезиса (рис. 2.5), по формуле:

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_m}{H_m}. \quad (2.5)$$

Площадь петли гистерезиса пропорциональна энергии, теряемой в образце за один цикл изменения поля. По площади петли можно найти работу перемагничивания, отнесенную к единице объема, которая равна энергии, расходуемой за один полный цикл перемагничивания какого-либо образца.

Таким образом, энергия, требуемая на перемагничивание ферромагнетика, равна произведению объема образца  $V_0$  на площадь петли гистерезиса в координатах  $(B, H)$ :

$$W = V_0 \oint H \cdot dB.$$

Эта энергия идет, в конечном счете, на нагревание образца. Такие потери энергии называются *гистерезисными*, или *потерями на перемагничивание*. Полностью размагнитить ферромагнетик можно, перемагничивая его в переменном магнитном поле при плавном уменьшении амплитуды напряженности поля от насыщенного значения  $H_S$  до нуля в течение ряда циклов.

С ростом частоты переменного магнитного поля (числа циклов перемагничивания в единицу времени) к гистерезисным потерям добавляются другие потери, связанные с вихревыми токами и магнитным последствием. Потери на вихревые токи обусловлены дополнительным нагревом ферромагнетика токами, наводимыми в нем (как в проводящем материале) переменным магнитным полем. Потери на магнитное последствие обусловлены магнитной вязкостью, т.е. отставанием магнитной индукции в материале от изменения напряженности магнитного поля.

Соответственно площадь петли гистерезиса при высоких частотах увеличивается. Такую петлю называют *динамической*, в отличие от описанной статической петли. Соответственно и остальные магнитные характеристики веществ классифицируются на динамические и статические.

Основными статическими характеристиками являются следующие параметры петли гистерезиса и кривой первоначального намагничивания:

- коэрцитивная сила  $H_c$ ;
- остаточная индукция  $B_r$  (остаточная намагниченность  $J_r$ );
- индукция насыщения  $B_S$  (намагниченность насыщения  $J_S$ );
- напряженность поля, обеспечивающая магнитное насыщение  $H_S$ ;
- начальная магнитная проницаемость  $\mu_a$  (начальная магнитная восприимчивость  $\chi_a$ );
- максимальная магнитная проницаемость  $\mu_m$  (максимальная магнитная восприимчивость  $\chi_m$ ).

Для изучения поведения ферромагнетика при сложном перемагничивании

(одновременно в постоянном и переменном полях) используется дифференциальная магнитная проницаемость:

$$\mu_d = \frac{dB}{dH}.$$

В зависимости от значений статических магнитных характеристик магнитные материалы подразделяются на магнитомягкие и магнитотвердые.

К магнитомягким относятся материалы, которые намагничиваются до насыщения и перемагничиваются в относительно слабых магнитных полях напряженностью  $H \approx 10 \dots 10^3$  А/м. Для этих материалов характерны высокие значения относительной магнитной проницаемости начальной  $\mu_a = 10^2 \dots 10^5$  и максимальной  $\mu_m = 10^3 \dots 10^6$ . Коэрцитивная сила  $H_c$  магнитомягких материалов составляет обычно от  $H_c \approx 1 \dots 10^2$  А/м, а потери на гистерезис очень малы. К магнитомагким материалам относятся, например, железо, электротехническая сталь, пермаллой (сплав железа с никелем) и др.

К магнитотвердым относятся материалы, которые намагничиваются до насыщения и перемагничиваются в сравнительно сильных магнитных полях напряженностью  $H \approx 10^3 \dots 10^6$  А/м. Магнитотвердые материалы характеризуются высокими значениями коэрцитивной силы  $H_c \approx 10^3 \dots 10^5$  А/м и остаточной индукции  $B_r \approx 0,5 \dots 1,5$  Тл. Такие материалы применяются для изготовления постоянных магнитов (сплавы железа типа «Алнико» и «Магнико», кобальт-самаривые сплавы и др.).

В табл. 2.1 приведены магнитные свойства некоторых ферромагнетиков [3].

Таблица 2.1

Магнитные свойства некоторых ферромагнетиков

Вещество	Состав	$\mu_m$	$H_c$ , А/м	$B_r$ , Тл	$B_s$ , Тл
Железо техническое	Fe (99,9 %)	$5 \cdot 10^3$	80	0,05	2,1
Супермаллой	Ni (79 %), Mo (5 %), Fe (16%)	$10^6$	0,16	–	0,79
Платина-Кобальт	Pt (77 %), Co (23 %)	–	$3 \cdot 10^5$	0,5	–
Никель-цинковый феррит	ZnO – Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , NiO – Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$7,5 \cdot 10^3$	4	–	0,2

Магнитные свойства материалов зависят не только от их химического состава и чистоты материала (отсутствия дефектов кристаллической решетки), но и в значительной мере от структурного состояния кристаллической решетки, определяемого механической и термообработкой.

## 2.3. Индуктивность и взаимдуктивность

### 2.3.1. Понятие индуктивности и взаимдуктивности

Магнитное поле характеризуется силовым воздействием на движущиеся заряды. Перемещающийся заряд, в свою очередь, является источником магнитного поля. Соответственно, при протекании тока в проводнике в пространстве вокруг проводника создается магнитное поле. Если проводник представляет собой замкнутый контур, то создаваемое магнитное поле можно охарактеризовать магнитным потоком  $\Phi$ , проходящим через этот контур.

По закону электромагнитной индукции магнитный поток  $\Phi$ , проходящий через замкнутый контур, наводит в нем ЭДС. Это означает, что собственное магнитное поле катушки, создаваемое протекающим в ней током, будет наводить в ней ЭДС. Это явление называется *самоиндукцией*. Если катушка с током содержит  $w$  витков, то магнитный поток будет в каждом из них наводить ЭДС, и результирующее напряжение  $U_c$  – ЭДС самоиндукции:

$$U_c = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(w\Phi)}{dt}. \quad (2.6)$$

Величину  $\Psi = w \cdot \Phi$  называют *потокосцеплением*.

Создаваемый магнитный поток и, соответственно, потокосцепление пропорционально току, протекающему через катушку:

$$\Psi = w \cdot \Phi = L \cdot i, \quad (2.7)$$

где  $L$  – коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью катушки*.

Индуктивность характеризует связь между протекающим в обмотке электрическим током  $i$  и создаваемым этим током потокосцеплением  $\Psi$  через данную обмотку:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w\Phi}{i}. \quad (2.8)$$

Чем выше значение индуктивности обмотки, тем более сильное магнитное поле создает данная обмотка при фиксированном значении электрического тока. Единицей измерения индуктивности является генри ( $1 \text{ Гн} = 1 \text{ В с/А}$ ).

Если индуктивность катушки постоянна, то с учетом (2.6) и (2.7) для ЭДС самоиндукции можно написать

$$U_c = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (2.9)$$

Из этого уравнения получаем выражение для индуктивности:

$$L = -\frac{U_c}{di/dt}.$$

Из уравнений (2.9) следует, что:

- индуцированное напряжение пропорционально скорости изменения тока в катушке;
- полярность индуцированного напряжения будет разной при увеличении и уменьшении тока, текущего в одном и том же направлении;
- в случае постоянного тока индуцированное напряжение равно нулю.

При расчете электронных схем индуктивность представляют в виде комплексного сопротивления:

$$Z_L = \frac{U}{i} = j\omega L,$$

где  $j$  – мнимая единица;  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота (рад/с) протекающего синусоидального тока;  $f$  – частота в Гц.

Из этого выражения видно, что, во-первых, комплексное сопротивление катушки индуктивности увеличивается с ростом частоты, а во-вторых, ток отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$ .

Индуктивность обмотки зависит от ее формы, размеров, числа витков, диаметра провода, способа намотки, а также от магнитных свойств окружающей обмотку среды. Если обмотка имеет жесткую конструкцию и вблизи ее отсутствуют ферромагнетики, то индуктивность такой обмотки постоянна. В противном случае индуктивность может изменяться при изменении формы или размеров обмотки, перемещении окружающих ферромагнитных объектов, либо при изменении их магнитной проницаемости (например, по причине зависимости магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля) [1].

Если две катушки с током находятся в непосредственной близости друг от друга, то магнитный поток, создаваемый электрическим током  $i_1$  в первой катушке, проходя через контур второй катушки, будет индуцировать в ней ЭДС, а ток  $i_2$  во второй катушке приведет к появлению ЭДС в первой катушке. При этом можно записать

$$U_{c1} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}, \quad U_{c2} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (2.10)$$

где  $M_{21}$ ,  $M_{12}$  – коэффициенты взаимной индуктивности двух катушек.

Взаимная индуктивность (взаимоиндуктивность) – величина, характеризующая магнитную связь двух или более электрических контуров (обмоток).

Важно отметить, что  $M_{21} = M_{12}$ . Численно взаимноиндуктивность двух обмоток равна отношению потокосцепления магнитного поля тока одной обмотки к силе тока первой обмотки:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_{12}}{i_1}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{w_1 \Phi_{21}}{i_2},$$

где  $\Psi_{12}=w_2\Phi_{12}$  – потокосцепление со второй катушкой магнитного поля тока первой катушки;  $\Psi_{21}=w_1\Phi_{21}$  – потокосцепление с первой катушкой магнитного поля тока второй катушки;  $\Phi_{12}$  – магнитный поток, создаваемый током первой катушки и проходящий через контур второй катушки;  $\Phi_{21}$  – магнитный поток, создаваемый током второй катушки и проходящий через контур первой катушки (рис. 2.6).

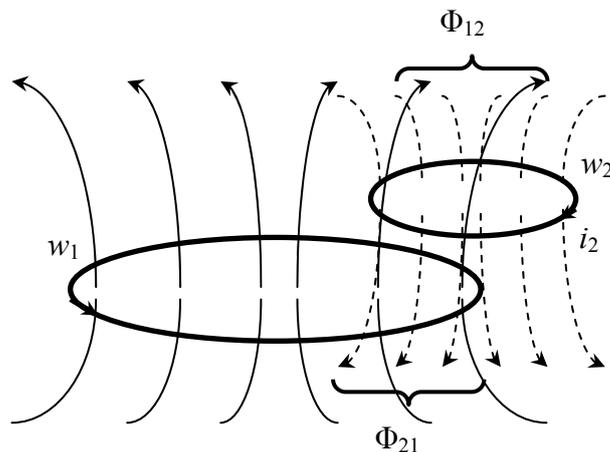


Рис. 2.6. К определению взаимноиндуктивности катушек

Взаимоиндуктивность зависит от формы, размеров, числа витков катушек, а также от их взаимного расположения (расстояния между обмотками и их ориентации в пространстве) и магнитных свойств окружающей обмотки среды.

### 2.3.2. Физические основы индуктивных измерительных преобразований

Как было отмечено ранее, индуктивность обмотки зависит от собственных параметров и магнитных свойств среды. На использовании этой зависимости могут быть построены различные измерительные устройства.

Многовитковые обмотки без ферромагнитных сердечников (магнитопро-

водов) применяются в различных электронных устройствах для измерения параметров магнитного поля, в индукционных измерительных преобразователях перемещений, вихретоковых преобразователях физических величин и др. Более широкое применение для индуктивного измерительного преобразования имеют обмотки с ферромагнитными сердечниками различной конструкции.

При анализе работы и расчете характеристик измерительных преобразователей с катушками на ферромагнитных сердечниках вводится понятие магнитной цепи. Магнитной цепью измерительного преобразователя называют совокупность путей распространения магнитных потоков. Магнитные потоки в общем случае могут распространяться как в сердечнике, называемом в данном случае *магнитопроводом*, так и вне его (воздушные участки магнитной цепи).

На рис. 2.7 показана обмотка с замкнутым ферромагнитным сердечником постоянного сечения. Особенность такой магнитной цепи заключается в том, что практически весь магнитный поток, создаваемый электрическим током  $i$  обмотки, замыкается по магнитопроводу, магнитная проницаемость которого на несколько порядков превышает магнитную проницаемость воздуха. В данном случае магнитными потоками рассеяния (замыкающимися не по магнитопроводу, а по воздуху) можно пренебречь, а магнитное поле в магнитопроводе считать однородным.

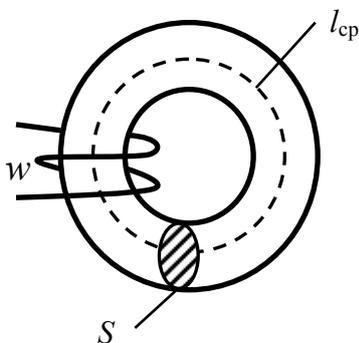


Рис. 2.7. Обмотка на ферромагнитном сердечнике

С учетом принятых допущений магнитный поток  $\Phi$  через обмотку может быть определен следующим образом:

$$\Phi = \oint B dS = BS, \quad (2.11)$$

где  $B$  – индукция в магнитопроводе;  $S$  – площадь поперечного сечения магнитопровода.

В соответствии с законом полного тока [1]:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = Hl_{\text{cp}} = i_{\text{пл}} = iw, \quad (2.12)$$

где  $l_{\text{cp}}$  – длина средней силовой линии;  $H$  – напряженность магнитного поля, создаваемого током в катушке;  $i$  – ток в катушке;  $i_{\text{пл}} = iw$  – полный ток, проходящий внутри контура  $l_{\text{cp}}$ .

С учетом (2.11) и (2.12) и (2.5) выражение (2.8) для индуктивности обмотки приобретает вид

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w\Phi}{i} = \frac{wBSw}{Hl_{\text{cp}}} = \frac{w^2 S}{l_{\text{cp}}} \frac{B}{H} = w^2 \frac{\mu_r \mu_0 S}{l_{\text{cp}}}, \quad (2.13)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость материала магнитопровода.

Преобразованием (2.11) с учетом (2.5) и (2.12) можно получить:

$$\Phi = BS = \mu_r \mu_0 HS = \mu_r \mu_0 \frac{iw}{l_{\text{cp}}} S = iw \frac{\mu_r \mu_0 S}{l_{\text{cp}}} = \frac{iw}{R_{\text{м}}}. \quad (2.14)$$

Величину

$$R_{\text{м}} = \frac{l_{\text{cp}}}{\mu_r \mu_0 S} \quad (2.15)$$

называют *магнитным сопротивлением*. Единицей измерения магнитного сопротивления в системе СИ является ампер на вебер (А/Вб).

Соотношение (2.14) аналогично закону Ома для замкнутой электрической цепи. Его называют *законом Ома для магнитной цепи*. Магнитный поток аналогичен току электрической цепи, магнитное сопротивление аналогично сопротивлению электрическому току. Произведение  $iw$  по аналогии с электродвижущей силой (ЭДС) называется *магнитодвижущей силой* (МДС), или *намагничивающей силой*.

По аналогии с электрической проводимостью вводится понятие магнитной проводимости – величины, обратной магнитному сопротивлению:

$$G_{\text{м}} = \frac{1}{R_{\text{м}}} = \frac{\mu_r \mu_0 S}{l_{\text{cp}}}. \quad (2.16)$$

Таким образом, для индуктивности катушки (2.13) можно записать

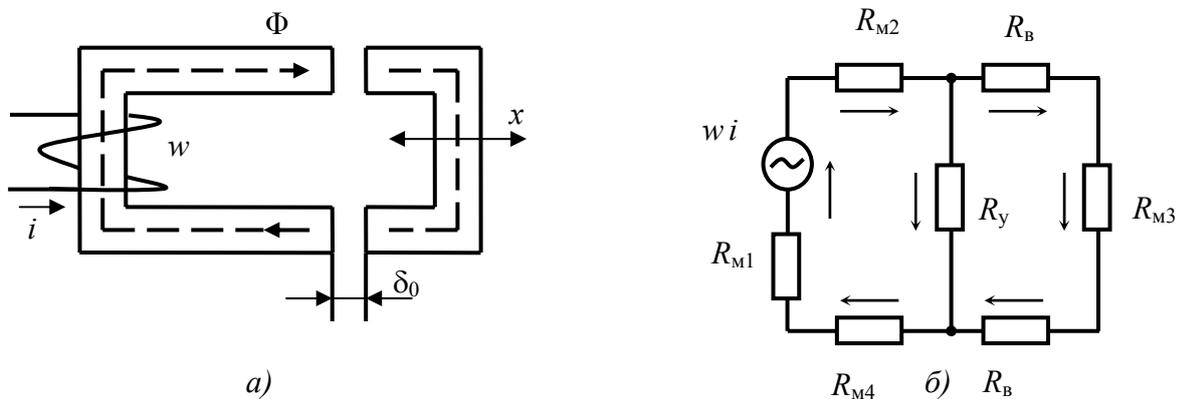
$$L = w^2 \frac{\mu_r \mu_0 S}{l_{\text{ср}}} = \frac{w^2}{R_M} = w^2 G_M.$$

В случае, если магнитопровод состоит из участков с различными поперечным сечением и магнитной проницаемостью, имеет воздушные зазоры, а потоками рассеивания нельзя пренебречь (рис. 2.8, а), то индуктивность обмотки определяется выражением

$$L = \frac{w^2}{R_{M\Sigma}} = w^2 G_{M\Sigma}, \quad (2.17)$$

где  $R_{M\Sigma}$ ,  $G_{M\Sigma}$  – полное (суммарное) магнитное сопротивление и суммарная проводимость магнитной цепи.

Для расчета полного магнитного сопротивления (или суммарной проводимости) магнитной цепи составляется ее эквивалентная схема замещения (рис. 2.8, б). Расчет ведется по аналогии с расчетом электрических цепей.



**Рис. 2.8.** Магнитная цепь с воздушными зазорами (а) и эквивалентная схема замещения магнитной цепи (б)

Магнитные сопротивления однородных участков магнитопровода определяются по аналогии с (2.15):

$$R_{Mj} = \frac{l_j}{\mu_{rj} \mu_0 S_j},$$

где  $l_j$ ,  $S_j$ ,  $\mu_{rj}$  – протяженность, площадь поперечного сечения и относительная магнитная проницаемость материала  $j$ -го участка магнитопровода.

На переменном электрическом токе магнитные сопротивления участков магнитопровода имеют комплексный характер.

Если не учитывать краевые магнитные потоки через боковые грани и ребра магнитопровода, то магнитные проводимости воздушных промежутков (зазоров) определяются выражением

$$G_B = \frac{1}{R_B} = \frac{\mu_0 S_B}{\delta}, \quad (2.18)$$

где  $\delta$  – длина воздушного зазора;  $S_B$  – площадь воздушного зазора.

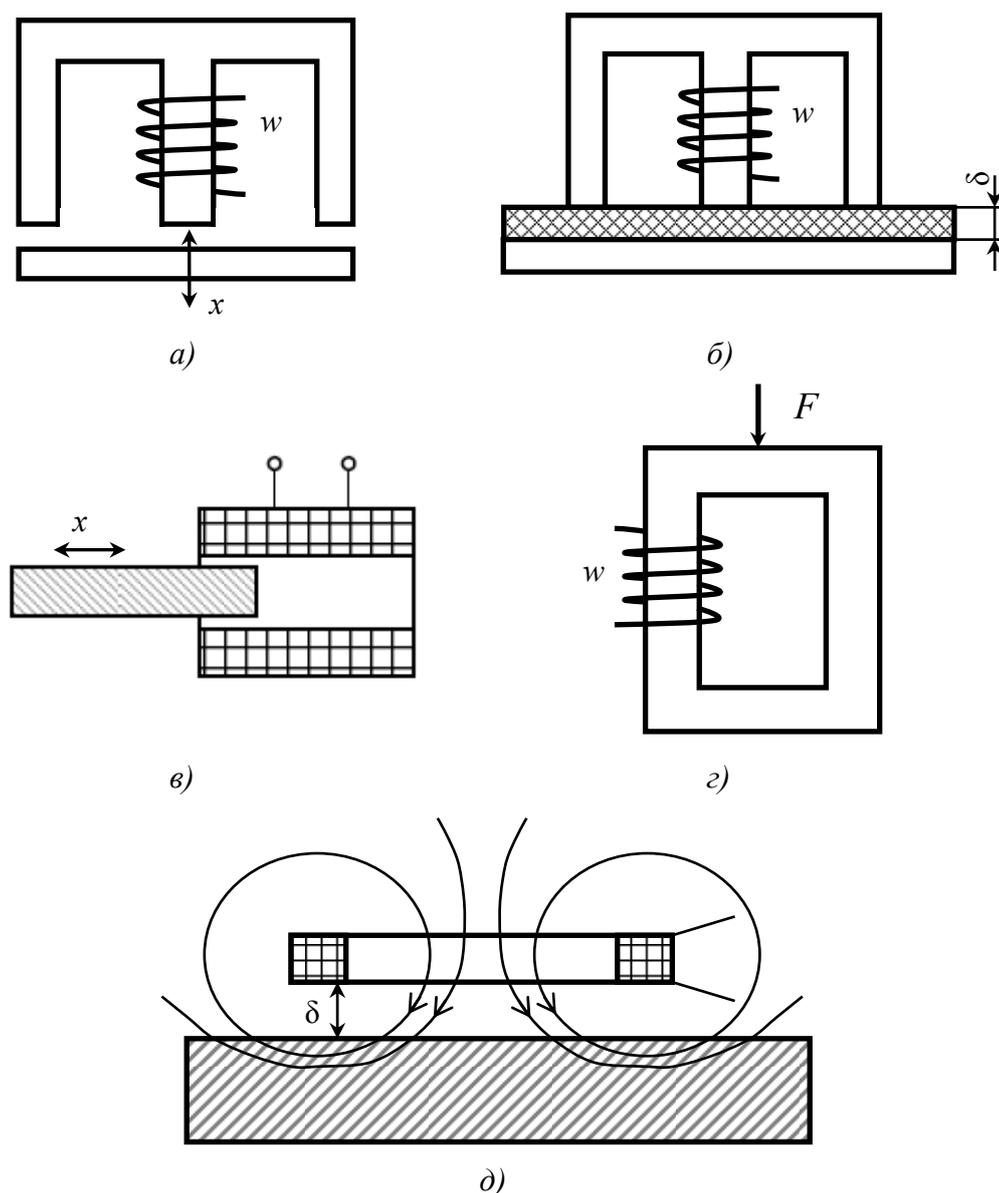
Для малых зазоров формула (2.18) обеспечивает удовлетворительную точность при расчетах. С увеличением воздушных зазоров формулу (2.18) следует корректировать с учетом потоков утечки и боковых потоков рассеяния.

Зависимость индуктивности обмотки от геометрических и магнитных свойств всех участков магнитной цепи позволяет получать измерительную информацию о любом из этих параметров (например, о длине воздушного зазора либо магнитной проницаемости материала).

На рис. 2.9 в качестве примеров иллюстрируется использование индуктивного измерительного преобразования для измерения толщины немагнитного покрытия на ферромагнитном материале (рис. 2.9, б), перемещения ротора (или сердечника) из ферромагнитного материала (рис. 2.9, а, в).

Индуктивное измерительное преобразование может быть применено в датчиках, основанных на различных физических явлениях и эффектах. Например, в магнитоупругих преобразователях, основанных на зависимости магнитных свойств ферромагнитных материалов от механических напряжений или деформаций (рис. 2.9, г). Под действием силы в ферромагнитном сердечнике возникают механические напряжения, что приводит к изменению и магнитной проницаемости материала (подробнее см. п. 3.5). За счет этого меняется сопротивление магнитной цепи и индуктивность катушки (см. формулу (2.17)).

Индуктивность катушки также может меняться при приближении к ней проводящих объектов из немагнитных материалов (рис. 2.9, д). Переменное магнитное поле катушки в проводящем объекте наводит вихревые токи, магнитное поле которых направлено встречно магнитному полю катушки. Соответственно, результирующий магнитный поток, проходящий через катушку, а следовательно и индуктивность катушки, уменьшаются. На явлении возникновения вихревых токов основан принцип действия вихретоковых преобразователей перемещений или датчиков близости (рис. 2.9, д) (подробнее см. п. 3.2).



**Рис. 2.9. Примеры применения индуктивного измерительного преобразования:**  
*а, в* – преобразователи перемещений; *б* – измерение толщины покрытия;  
*г* – магнитоупругий преобразователь силы; *д* – вихретоковый датчик близости

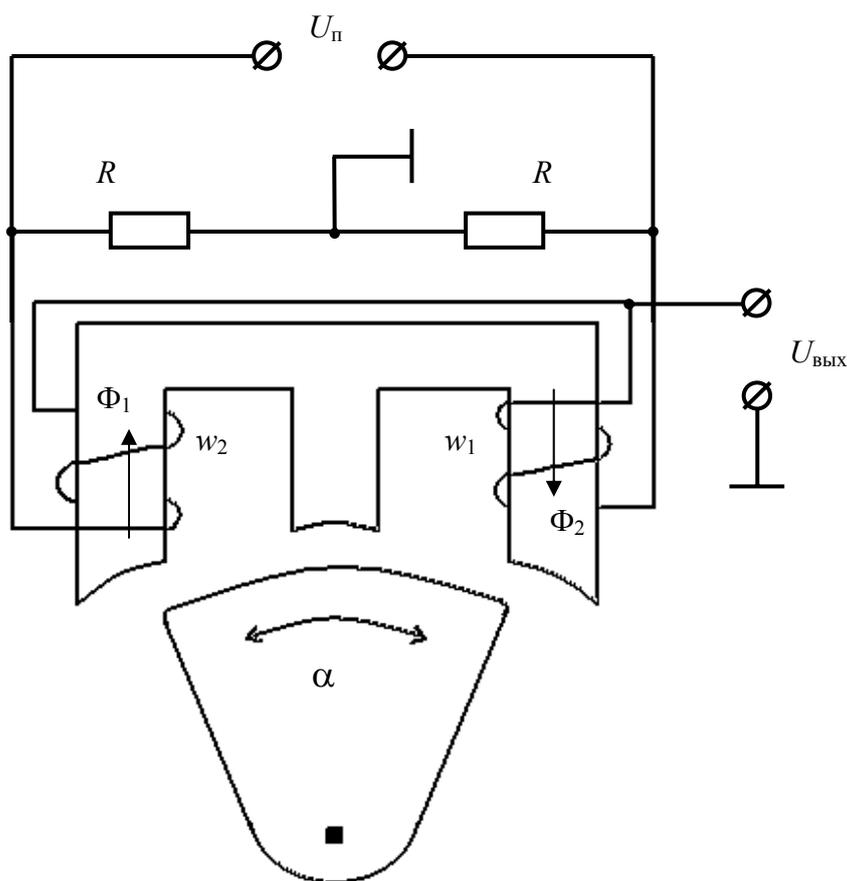
Для преобразования изменения индуктивности катушки в электрический сигнал в виде тока или напряжения катушку включают в измерительную цепь переменного тока.

На рис. 2.10 показана возможность применения мостовой измерительной схемы на примере дифференциального индуктивного преобразователя угловых перемещений.

Преобразователь содержит Ш-образный сердечник (статор) с двумя катушками индуктивности на боковых полюсах и ротор – подвижный элемент, угол поворота которого необходимо измерить. При симметричном положении

ротора относительно статора магнитные проводимости воздушных зазоров под боковыми полюсами равны, следовательно, равны магнитные потоки  $\Phi_1 = \Phi_2$  и индуктивности катушек, мостовая схема сбалансирована, и выходное напряжение  $U_{\text{ВЫХ}}$  равно нулю.

При отклонении ротора от нулевого положения магнитные проводимости воздушных зазоров под полюсами изменяются, в результате чего меняются значения магнитных потоков в полюсах магнитопровода и меняется значение индуктивностей, что приводит к появлению на выходной диагонали мостовой схемы напряжения, пропорционального перемещению ротора относительно статора.



**Рис. 2.10. Схема построения дифференциального индуктивного преобразователя угловых перемещений**

Если пренебречь активными сопротивлениями катушек, то выходное напряжение такого преобразователя определяется по формуле

$$U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{п}} \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1},$$

где  $L_1, L_2$  – индуктивности катушек;  $U_{\text{п}}$  – напряжение питания мостовой схемы.

Применение мостовой схемы в качестве измерительной схемы индуктивного преобразователя позволяет обеспечить высокую чувствительность к угловым перемещениям и приемлемую линейность функции преобразования. Погрешность линейности подобных датчиков не превышает единиц процентов. Недостатком подобных схем является значительный уровень нулевого сигнала, основными причинами появления которого являются асимметрия цепей катушек индуктивности: наличие короткозамкнутых витков, несимметрия полюсов магнитопровода, неточность установки ротора, неоднородность магнитных свойств материала магнитопровода, потери на гистерезис и вихревые токи в ветвях магнитопровода и др.

### 2.3.3. Физические основы взаимноиндуктивных измерительных преобразований

Взаимоиндуктивность обмоток, как и собственная индуктивность, зависит от формы и размеров обмоток, числа витков, геометрических и магнитных характеристик магнитной цепи, в которую включены обмотки, магнитной проницаемости окружающей среды. Характер этой зависимости от указанных факторов, по сути, тот же, что и для собственной индуктивности.

Кроме перечисленных влияющих факторов, взаимная индуктивность зависит также от взаимного расположения обмоток, что может быть использовано в измерительных системах определения местоположения и ориентации объектов в пространстве.

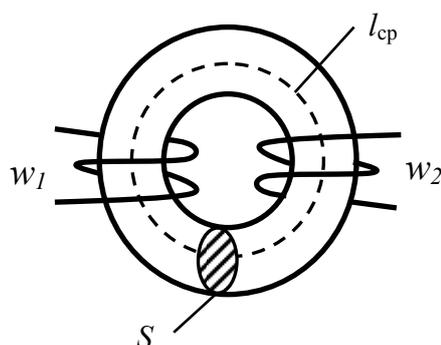


Рис. 2.11. Две обмотки на ферромагнитном сердечнике

Для случая замкнутого магнитопровода постоянного сечения (рис. 2.11) при наличии на магнитопроводе двух обмоток с числами витков  $w_1$  и  $w_2$ , их взаимноиндуктивность определяется выражением

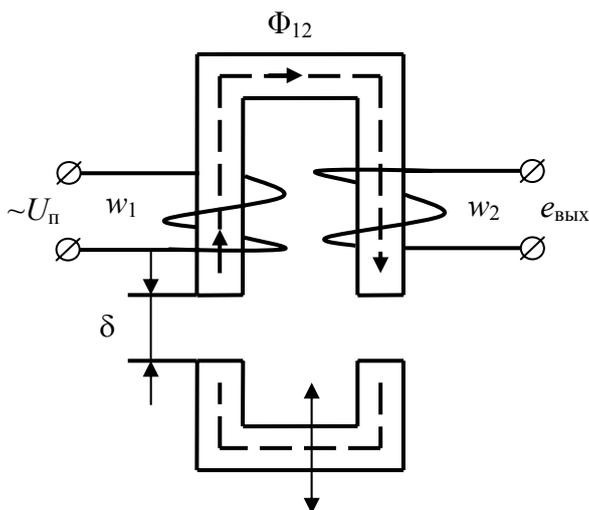
$$M = w_1 w_2 \frac{\mu_r \mu_0 S}{l_{cp}} = \frac{w_1 w_2}{R_m}.$$

При изменении параметров магнитной цепи (например, при изменении величины воздушных зазоров) взаимоиндуктивность катушек меняется. Это свойство лежит в основе принципа действия взаимоиндуктивных преобразователей перемещений.

На рис. 2.12 показана схема построения взаимоиндуктивного преобразователя перемещений. При перемещении ротора изменяется потокосцепление тока одной катушки с контуром другой и, следовательно, меняется взаимоиндуктивность катушек. При этом, если в одной катушке протекает переменный ток  $i_1$ , то в соответствии с формулой (2.10) во второй катушке с числом витков  $w_2$  будет наводиться ЭДС, амплитуда которой зависит от взаимоиндуктивности  $M_{12}$  катушек:

$$e_{\text{ВЫХ}} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} = -w_2 \frac{d\Phi_{12}(t)}{dt},$$

где  $\Phi_{12}(t)$  – магнитный поток, создаваемый током  $i_1$  в первой катушке и проходящий через витки  $w_2$  второй катушки.



**Рис. 2.12. Схема построения взаимоиндуктивного преобразователя перемещений**

То есть изменение взаимоиндуктивности модулирует переменную ЭДС, наводимую во второй катушке. Таким образом, на выходе второй катушки формируется гармонический сигнал, модулированный по амплитуде:

$$e_{\text{ВЫХ}} = w_2 \Phi_{12} \omega \sin \omega t, \quad (2.19)$$

где  $\Phi_{12}$  – амплитудное значение магнитного потока;  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота питающего напряжения;  $\omega^{-1}, f$  – частота питающего напряжения, Гц.

В качестве выходной величины взаимоиндуктивных преобразователей перемещений принимают действующее значение наводимой ЭДС:

$$E = \frac{e_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{w_2 \omega \Phi_{12}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} w_2 f \Phi_{12} = 4,44 w_2 f \Phi_{12}, \quad (2.20)$$

где  $e_{\max} = w_2 \omega \Phi_{12}$  – амплитуда наводимой ЭДС.

В соответствии с законом Ома для магнитной цепи магнитный поток равен:

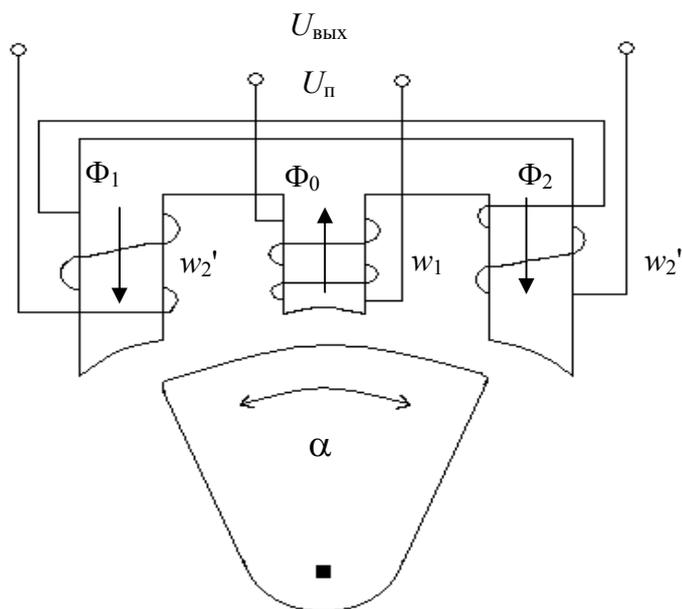
$$\Phi_{12} = i_1 w_1 G_{\Sigma}, \quad (2.21)$$

где  $G_{\Sigma}$  – суммарная проводимость магнитной цепи.

С учетом (2.21) функцию преобразования (2.20) можно представить в следующем виде:

$$E = 4,44 f w_1 w_2 i_1 G_{\Sigma}.$$

Суммарная проводимость магнитной цепи практически полностью определяется проводимостью воздушных зазоров, которая линейна по отношению к площади зазора и нелинейна по отношению к его длине (см. формулу(12)). Поэтому чаще взаимоиндуктивные преобразователи строятся таким образом, чтобы измеряемое перемещение было связано с площадью воздушного зазора. Пример схемы построения такого преобразователя показан на рис. 2.13.



**Рис. 2.13. Схема построения трехстержневого взаимоиндуктивного преобразователя угловых перемещений**

Трёхстержневой взаимоиндуктивный преобразователь угловых перемещений (рис. 2.13) представляет собой Ш-образный магнитопровод (статор) с тремя катушками и ротор, связанный с элементом, угловые перемещения кото-

рого необходимо измерить. На среднем полюсе статора располагается первичная обмотка с числом витков  $w_1$ , к которой подводится напряжение переменного тока  $U_{\text{п}}$ . Вторичная обмотка, с которой снимается напряжение  $U_{\text{вых}}$ , состоит из двух одинаковых сигнальных катушек с числом витков  $w_2'$  и  $w_2''$ , соединённых между собой последовательно встречно (по дифференциальной схеме) и расположенных на крайних стержнях статора.

Магнитный поток  $\Phi_0$ , создаваемый первичной обмоткой  $w_1$ , разделяется на две составляющие  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в соответствии с магнитными проводимостями  $G_1$  и  $G_2$  воздушных зазоров между ротором и крайними стержнями статора. Магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  наводят во вторичных катушках  $w_2'$  и  $w_2''$  ЭДС  $E_1$  и  $E_2$ . Выходное напряжение в силу встречного включения сигнальных катушек равно разности наводимых в них ЭДС:

$$U_{\text{вых}} = E_1 - E_2. \quad (2.22)$$

Действующие значения ЭДС, индуцируемые в каждой из сигнальных обмоток, определяются аналогично рассмотренному ранее преобразователю (см. формулу (2.20)). При условии симметричности СО ( $w_2' = w_2'' = w_2$ ) выражение (2.22) переписывается в виде

$$U_{\text{вых}} = 4,44w_2f(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (2.23)$$

При симметричном расположении ротора относительно статора, когда ротор перекрывает торцевые поверхности крайних стержней статора ровно на половину, магнитные проводимости крайних воздушных зазоров и, соответственно, магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  равны между собой. При этом напряжение на выходе вторичных обмоток в соответствии с (2.23) равно нулю. Такое положение ротора называют *нулевым*, или *нейтральным*.

При отклонении ротора от нулевого положения торцевые поверхности полюсов статора перекрываются неодинаково, магнитная проводимость воздушного зазора под одним полюсом при этом увеличивается, под другим — уменьшается. Происходит перераспределение магнитных потоков: магнитный поток через полюс, торцевая поверхность которого перекрыта ротором больше, увеличивается, через другой полюс — уменьшается. Соответственно меняются взаимоиנדуктивности между центральной и боковыми катушками. На выходе преобразователя появится напряжение (2.23), пропорциональное разности индуцированных в сигнальных катушках ЭДС и имеющее фазу большей ЭДС.

Взаимоиндуктивные преобразователи осуществляют преобразование перемещений подвижной части прибора в электрический сигнал и используются в различных автоматических приборных устройствах, приборах первичной ин-

формации – электромеханических датчиках давления газа или жидкости, датчиках угловой скорости гироскопического типа, датчиках линейных и угловых ускорений, гироскопических датчиках углового положения летательных аппаратов и гироскопических стабилизаторах.

Аналогично индуктивному измерительному преобразованию взаимноиндуктивное преобразование может быть положено в основу работы вихретоковых преобразователей перемещений (п. 3.2) и магнитоупругих датчиков механических напряжений или деформаций (п. 3.5).

## 2.4. Энергия магнитного поля. Силы, развиваемые в магнитном поле

### 2.4.1. Физические основы силовых взаимодействий в магнитных полях

Магнитное поле создается электрическим током, на проведение которого затрачивается энергия. Ее значение численно равно работе по перемещению электрического заряда  $q$  через обмотку:

$$W = \int_0^q U dq = \int_0^q U \frac{dq}{dt} dt = \int_0^t UI dt,$$

где  $U$  – напряжение на обмотке;  $I$  – ток в обмотке;  $t$  – время.

При постоянном токе энергия выделяется на обмотке, как на активном сопротивлении  $R$ , в виде тепла:

$$W = \int_0^t UI dt = UI t = I^2 R t.$$

Если не учитывать энергетические потери на нагрев обмотки, т.е. считать, что обмотка обладает только реактивной (индуктивной) составляющей сопротивления, то для поддержания постоянного тока энергия расходоваться не будет. А энергия, требующаяся для установления тока – его увеличения от нулевого значения до  $i$ , – и будет являться энергией  $W_m$  магнитного поля, создаваемого обмоткой с током. Ее значение численно равно работе по перемещению электрического заряда  $q$  через обмотку при возрастании силы тока от 0 до  $i$ :

$$W = \int_0^q u(t) dq, \tag{2.24}$$

где  $u(t)$  – падение напряжения на индуктивности обмотки при изменении тока.

Величина  $u(t)$  равна взятой с обратным знаком ЭДС самоиндукции, возникающей в обмотке при изменении тока:

$$u(t) = -e(t) = \frac{d\Psi}{dt}, \quad (2.25)$$

где  $\Psi = L \cdot i$  – потокосцепление с обмоткой магнитного поля электрического тока обмотки,  $L$  – индуктивность обмотки.

Подставив (2.25) в (2.24) после преобразования, получим

$$W_M = \int_0^q u(t) dq = \int_0^q \frac{d\Psi}{dt} dq = \int_0^q \frac{dq}{dt} d\Psi = \int_0^q i(t) d\Psi = \int_0^q i(t) d(Li) = \int_0^i Li(t) di = \frac{Li^2}{2}. \quad (2.26)$$

В соответствии с (2.7) потокосцепление можно представить произведением магнитного потока  $\Phi$ , создаваемого током в катушке, и числа витков  $w$  катушки. При этом энергия (2.26) магнитного поля катушки:

$$W_M = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi i}{2} = \frac{w\Phi i}{2} = \frac{\Theta_M \Phi}{2},$$

где  $\Theta_M = w \cdot i$  – магнитодвижущая сила, создаваемая катушкой с током.

Аналогичным образом можно определить энергию магнитного поля двух обмоток с токами  $i_1$  и  $i_2$ , находящихся в непосредственной близости друг от друга (индуктивно связанных):

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2, \quad (2.27)$$

где  $L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1}$  – индуктивность первой обмотки;  $L_2 = \frac{\Psi_2}{i_2}$  – индуктивность второй

обмотки;  $M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_2}$  – взаимоиנדуктивность обмоток;  $\Psi_1 = w_1 \Phi_1$  – потокос-

цепление с витками первой обмотки магнитного поля тока первой обмотки,  $\Psi_2 = w_2 \Phi_2$  – потокосцепление с витками второй обмотки магнитного поля тока второй обмотки;  $\Psi_{12} = w_2 \Phi_{12}$  – потокосцепление с витками второй обмотки магнитного поля тока первой обмотки,  $\Psi_{21} = w_1 \Phi_{21}$  – потокосцепление с витками первой обмотки магнитного поля тока второй обмотки,  $\Phi_{12}$  – магнитный поток, создаваемый током первой обмотки и проходящий через контур второй обмотки,  $\Phi_{21}$  – магнитный поток, создаваемый током второй обмотки и проходящий через контур первой обмотки.

Знак «плюс» либо «минус» в (2.27) зависит от того, совпадают либо противоположны направления силовых линий магнитных полей обмоток с токами (определяется направлением включения обмоток).

Выражение (2.27) можно переписать в следующем виде:

$$W_M = \frac{\Psi_1 i_1}{2} + \frac{\Psi_2 i_2}{2} \pm \frac{1}{2} (\Psi_{21} i_1 + \Psi_{12} i_2) = \frac{w_1 \Phi_1 i_1}{2} + \frac{w_2 \Phi_2 i_2}{2} \pm \frac{1}{2} (w_1 \Phi_{21} i_1 + w_2 \Phi_{12} i_2) =$$

$$= \frac{\Theta_{M1} \Phi_1}{2} + \frac{\Theta_{M2} \Phi_2}{2} \pm \frac{1}{2} (\Theta_{M1} \Phi_{21} + \Theta_{M2} \Phi_{12}) = \frac{\Theta_{M1} (\Phi_1 \pm \Phi_{21})}{2} + \frac{\Theta_{M2} (\Phi_2 \pm \Phi_{12})}{2},$$

где  $\Theta_{M1} = w_1 i_1$ ,  $\Theta_{M2} = w_2 i_2$  – магнитодвижущие силы, создаваемые соответствующей катушкой.

Если ввести в обозначения суммарные магнитные потоки  $\Phi_{1\Sigma}$  и  $\Phi_{2\Sigma}$ , проходящие через контур первой и второй катушек соответственно, то энергию магнитного поля двух индуктивно связанных катушек можно представить общей формулой:

$$W_M = \frac{\Theta_{M1} \Phi_{1\Sigma}}{2} + \frac{\Theta_{M2} \Phi_{2\Sigma}}{2} = \frac{w_1 i_1 \Phi_{1\Sigma}}{2} + \frac{w_2 i_2 \Phi_{2\Sigma}}{2}.$$

Возможны три вида силовых взаимодействий в магнитных полях:

- электромагнитное – взаимодействие магнитного поля контура с током и ферромагнитного тела;
- электродинамическое – взаимодействие магнитных полей контуров с токами;
- магнитоэлектрическое – взаимодействие магнитных полей постоянного магнита и контура с током.

Рис. 2.14 иллюстрирует электромагнитное взаимодействие магнитного поля обмотки с током и ферромагнитного сердечника [1]. В зависимости от взаиморасположения сердечника и обмотки, а также крепления сердечника (степени свободы) результатом взаимодействия может быть как линейное (рис. 2.14, а, б), так и угловое (рис. 2.14, в, г) перемещение сердечника.

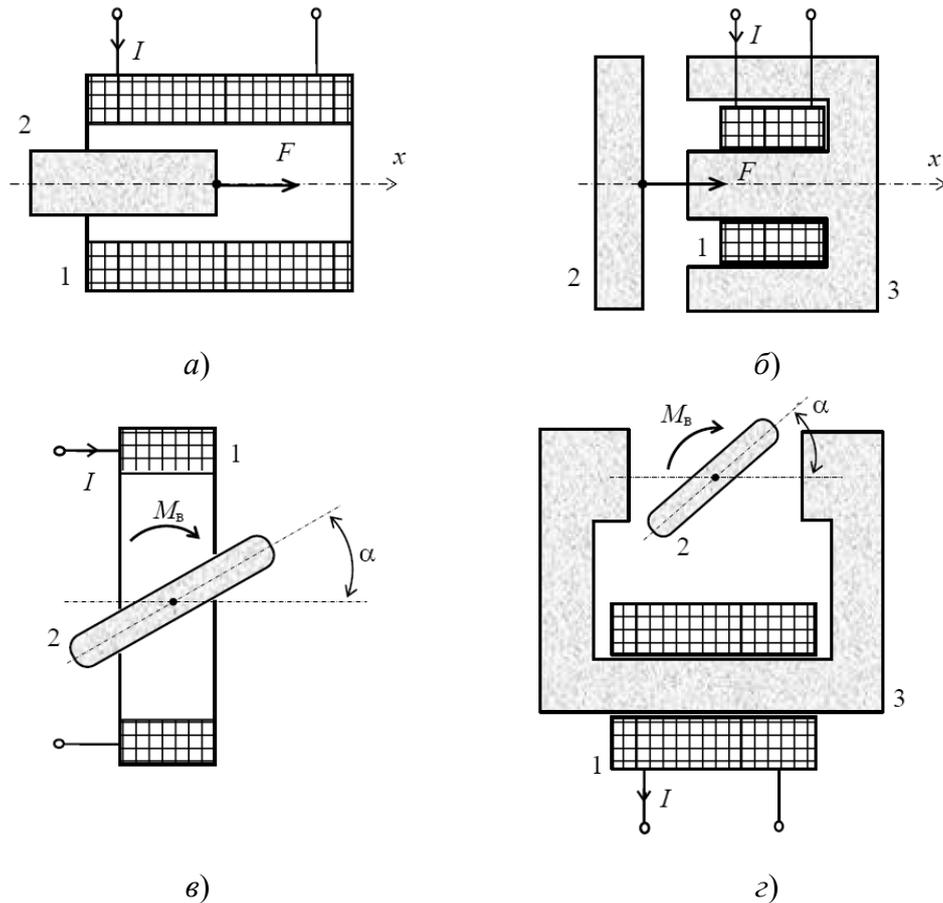
Сила  $F$  и момент вращения  $M_{вр}$  определяются дифференцированием выражения, описывающего энергию магнитного поля обмотки с током, по величинам, соответственно, линейного  $x$  и углового  $\alpha$  перемещения:

$$F = \frac{dW_M}{dx}, \quad M_{вр} = \frac{dW_M}{d\alpha}.$$

Если ток в катушке не зависит от перемещения подвижного элемента, то сила и момент вращения определяются следующим образом:

$$F = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx} = \frac{(wI)^2}{2} \frac{dG_{M\Sigma}}{dx}, \quad M_{\text{вр}} = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{d\alpha} = \frac{(wI)^2}{2} \frac{dG_{M\Sigma}}{d\alpha}, \quad (2.28)$$

где  $G_{M\Sigma}$  – суммарная магнитная проводимость магнитной цепи;  $I$  – действующее значение тока.



**Рис. 2.14. Варианты электромагнитного взаимодействия:**  
 1 – обмотка; 2 – ферромагнитный сердечник; 3 – магнитопровод

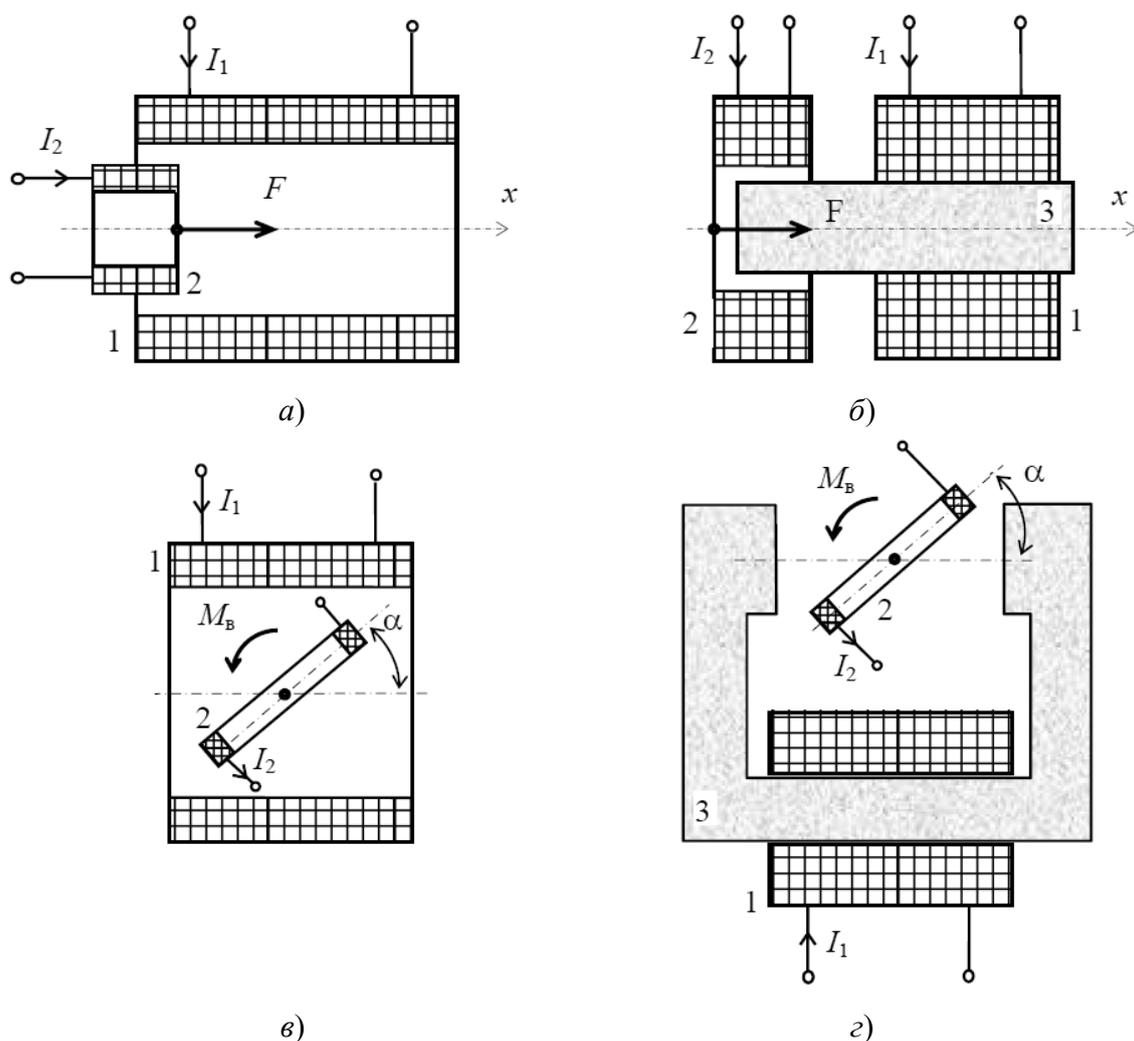
Соотношения (2.28) могут быть использованы для преобразования электрического тока в механические величины – силу и момент вращения. Электромагнитное взаимодействие используется в электромагнитных измерительных механизмах стрелочных ампермет- и вольтметров, применяемых, главным образом, для измерений в цепях переменного тока.

Зависимости силы и момента вращения от силы электрического тока обмотки носят квадратичный характер. Электромагниты могут работать как на постоянном, так и на переменном токе. Сила и момент вращения действуют на ферромагнитный сердечник в направлении, соответствующем увеличению индуктивности обмотки. (Электромагниты работают только на притяжение). Для обеспечения реверсивности сил или моментов применяют дифференциальные

схемы построения силовых элементов или дифференциальные схемы включения катушек.

Рис. 2.15 иллюстрирует электродинамическое взаимодействие двух обмоток с токами  $I_1$  и  $I_2$ . Аналогично предыдущему случаю возможны варианты линейного перемещения подвижной обмотки (рис. 2.15, а, б) и вращения (рис. 2.15, в, г).

Сила  $F$  и момент вращения  $M_{\text{вр}}$  определяются дифференцированием выражения (2.27) и (4.46) по линейному  $x$  и угловому  $\alpha$  перемещению. При этом первые два слагаемых в выражении (2.27) практически не зависят от перемещения подвижной обмотки.



**Рис. 2.15. Варианты электродинамического взаимодействия:**  
 $1$  – неподвижная обмотка;  $2$  – подвижная обмотка;  $3$  – магнитопровод

Для постоянных токов получаем

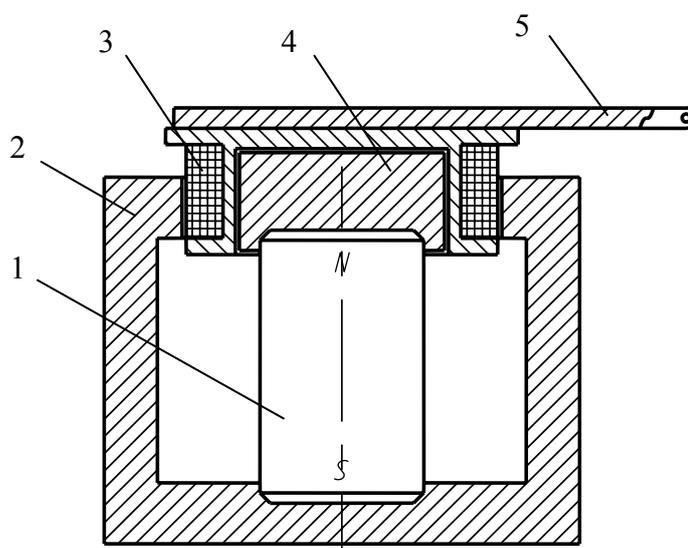
$$F = \frac{dW_{\text{м}}}{dx} = \pm I_1 I_2 \frac{dM}{dx}, \quad M_{\text{вр}} = \frac{dW_{\text{м}}}{d\alpha} = \pm I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha}. \quad (2.29)$$

Для переменных токов

$$F = \frac{dW_M}{dx} = \pm I_1 I_2 \frac{dM}{dx} \cos \varphi, \quad M_{вр} = \frac{dW_M}{d\alpha} = \pm I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha} \cos \varphi, \quad (2.30)$$

где  $I_1, I_2$  – действующие значения токов обмоток;  $\varphi$  – фазовый сдвиг между токами.

Зависимости (2.29) и (2.30) положены в основу измерительных преобразований произведения токов в силу или вращающий момент и используются в электродинамических амперметрах, вольтметрах постоянного и переменного токов (напряжений), фазометрах, ваттметрах.



**Рис. 2.16. Пример магнитоэлектрического взаимодействия:**

1 – постоянный магнит; 2 – цилиндрический магнитопровод;  
3 – катушка; 4 – полюсной наконечник; 5 – рычаг

Различные варианты магнитоэлектрического взаимодействия можно получить заменой постоянным магнитом ферромагнитного сердечника (рис. 2.14) или одной из обмоток с током (электромагнита) (рис. 2.15). На рис. 2.16 показан пример магнитоэлектрического взаимодействия.

Силы и моменты, возникающие при магнитоэлектрическом взаимодействии, описываются законом Ампера:

$$F = w B_p l_a i, \quad M_{вр} = w B_p S i \cos \alpha,$$

где  $B_p$  – индукция магнитного поля в рабочем зазоре;  $l_a$  – активная длина проводника (длина проводника, непосредственно находящегося в магнитном поле);  $S$  – площадь контура с током, находящегося в магнитном поле;  $\alpha$  – угол между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости контура.

На зависимости  $M_{вр}(i)$  основан принцип действия магнитоэлектрических электромеханических амперметров и вольтметров постоянного тока (напряжения).

#### **2.4.2. Применение эффектов силовых взаимодействий в магнитных полях**

В информационно-измерительных приборах и системах общего и специального назначения широко применяются системы коррекции, программного разворота подвижных углов, следящие системы, контуры силовой обратной связи. Исполнительными устройствами этих систем чаще всего являются силовые или моментные преобразователи, работа которых основана на эффекте силовых взаимодействий в магнитных полях.

Назначение таких преобразователей заключается в преобразовании электрического сигнала в механическую силу или момент. Наибольшее применение имеют преобразователи, основанные на электромагнитном или магнитоэлектрическом взаимодействии в магнитном поле. В основном такие преобразователи применяются в качестве преобразователей обратной связи в информационно-измерительных приборах и системах, работающих по принципу силовой компенсации: системах коррекции гироскопов с тремя степенями свободы, системах обратной связи гироскопических стабилизаторов, датчиках угловой скорости, линейного и углового ускорения, абсолютного и избыточного давлений и др.

В зависимости от выполняемых функций в составе измерительного устройства или системы силовые (моментные) преобразователи могут работать в режиме управления (например, в гироскопических приборах при начальной ориентации или программном развороте подвижного узла), в режиме компенсации (для компенсации вредных моментов, создаваемых конструктивными элементами устройства) и в режиме измерения (например, для измерения гироскопического момента в датчиках угловой скорости или силы инерции в акселерометрах). Требования, предъявляемые к моментным преобразователям, зависят от их назначения, т.е. от режима работы.

Самые жесткие требования предъявляются к моментным преобразователям при работе в режиме измерения: они должны развивать большие моменты и иметь низкие значения нестабильности и нелинейности характеристики.

В прецизионных навигационных приборах (акселерометрах, датчиках угловой скорости, гироскопах) наиболее широкое применение получили электромеханические силовые (моментные) преобразователи электромагнитного и магнитоэлектрического типа, которые могут работать как при аналоговом, так и при импульсном токах управления. Использование импульсных токов управле-

ния позволяет повысить стабильность и линейность характеристики моментных преобразователей и осуществить их связь с микропроцессорными вычислительными устройствами, которые в настоящее время широко применяются в измерительной технике.

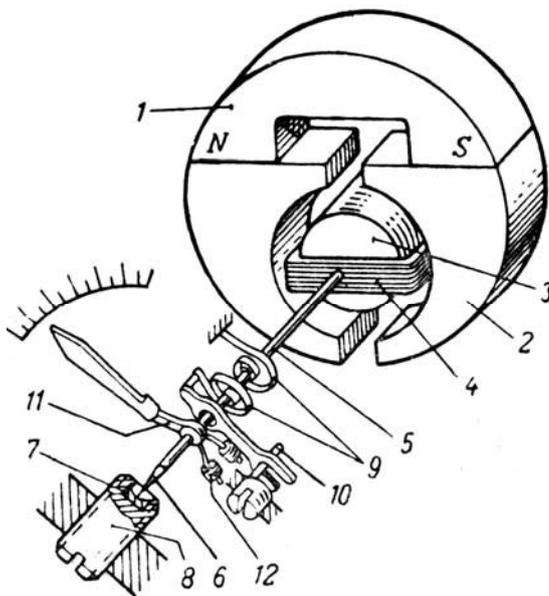
Примеры применения в измерительной технике магнитоэлектрического взаимодействия приведены на рис. 2.17, 2.18.

На рис. 2.17 изображена электрокинематическая схема гальванометра, в конструкции которого использован магнитоэлектрический моментный преобразователь с наружным неподвижным магнитом *1* и подвижной плоской катушкой *4*. Подобные конструкции применяются в большинстве стрелочных приборов для измерения тока или других физических величин, функционально связанных с током в катушке [8].

При протекании в катушке *4* тока на две смежных части катушки, расположенных между полюсными наконечниками *2* и цилиндрическим магнитопроводом *3*, действует пара сил, разворачивающая катушку вокруг оси *5*. Пара сил создает вращающий момент:

$$M_{\text{вр}} = w l_a b B_p I = w S_a B_p i,$$

где  $S_a = b l_a$  – активная площадь рамки;  $b$  – ширина катушки;  $l_a$  – активная длина катушки.



**Рис. 2.17. Схема построения магнитоэлектрического гальванометра:**

- 1* – постоянный магнит; *2* – полюсные наконечники (арматура);
- 3* – цилиндрический магнитопровод; *4* – подвижная рамка (катушка), *5* – полуось;
- 6* – керн; *7* – подпятник; *8* – винт; *9* – спиральные противодействующие пружины;
- 10* – узел корректора, *11* – узел стрелки, *12* – противовесы

Противодействующий момент при повороте катушки в гальванометре создается двумя спиральными пружинами 9, служащими одновременно токоподводами обмотки преобразователя. Противодействующий момент спиральных пружин равен

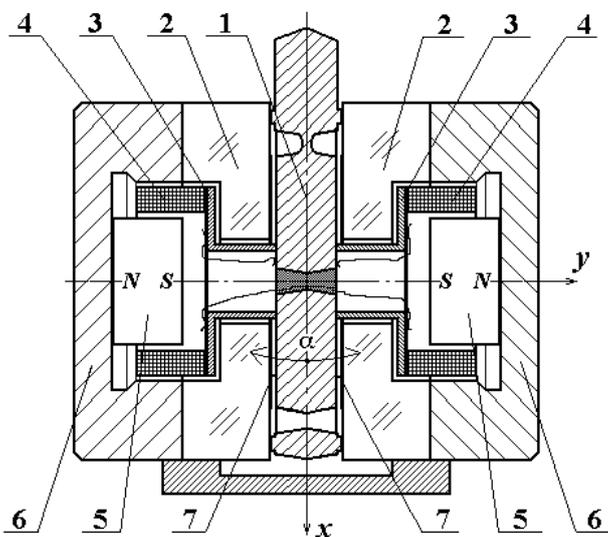
$$M_{\text{пр}} = 2G_{\text{пр}}\varphi,$$

где  $G_{\text{пр}}$  – жесткость одной пружины;  $\varphi$  – угол поворота подвижной системы.

В установившемся режиме вращающий момент уравновешивается противодействующим:  $M = M_{\text{пр}}$ . Из этого условия можно определить угол отклонения подвижной системы:

$$\varphi = \frac{wS_a B_p}{2G_{\text{пр}}} I.$$

Если индукция в рабочем зазоре распределена равномерно, т.е. одинакова во всех точках, то угол отклонения подвижной системы пропорционален протекающему в катушке току и статическая характеристика магнитоэлектрического гальванометра линейна.



**Рис. 2.18. Схема подвижного узла маятникового акселерометра:**

- 1 – кремниевый чувствительный элемент; 2 – стеклянные крышки; 3 – каркас катушек датчика момента; 4 – катушка датчика момента; 5 – постоянный магнит;
- 6 – магнитопровод; 7 – обкладки емкостного преобразователя перемещений

На рис. 2.18 представлена схема построения подвижного узла маятникового акселерометра с обратной связью, в составе которого используется магни-

тоэлектрический преобразователь. Схема построения магнитоэлектрического преобразователя подобна, рассмотренной на рис. 2.16.

Чувствительный элемент акселерометра представляет собой подвижную массу *1*, выполненную из монокристаллического кремния методом анизотропного травления, помещенную в узкий зазор между двумя стеклянными крышками *2*. На чувствительный элемент монтируются два каркаса *3* с катушками *4* датчика момента. Магнитная система образована постоянными магнитами *5* и магнитопроводом *6*. На стеклянных крышках подвижного узла располагаются обкладки емкостного преобразователя перемещений *7*. Датчик силы играет роль «электропружины», обрабатывающей входное воздействие. Выходной сигнал в виде напряжения снимается с сопротивления нагрузки, которое включено последовательно с катушками силового обратного преобразователя.

### 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И ЭФФЕКТЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

---

#### 3.1. Явление электромагнитной индукции

##### 3.1.1. Физические основы явления электромагнитной индукции

Согласно 2-му уравнению Максвелла, напряженность электрического поля и скорость изменения во времени магнитного потока связаны законом электромагнитной индукции:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $E$  – вектор напряженности электрического поля;  $\Phi$  – магнитный поток, проходящий сквозь поверхность, охватываемую контуром  $L$ .

Если среда непроводящая, то циркуляция вектора напряженности электрического поля не приведет к возникновению в контуре  $L$  тока или ЭДС. Когда среда распространения магнитного потока проводящая, или когда контур  $L$  представляет собой реальный проводящий виток, циркуляция вектора  $E$  по контуру витка представляет собой ЭДС этого витка:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.1)$$

Физическое явление, заключающееся в возникновении ЭДС в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, проходящего внутри этого контура, носит название явления электромагнитной индукции. Электрический ток, вызываемый этой ЭДС, называется индукционным. Явление электромагнитной индукции было открыто английским ученым М. Фарадеем в 1831 году и независимо американским ученым Дж. Генри в 1832 году.

Согласно (3.1), ЭДС индукции прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока. Знак минус в правой части выражения определяет направление индукционного тока в соответствии с правилом Ленца, согласно которому индукционный ток в контуре направлен так, что создаваемый им магнитный поток стремится препятствовать тому изменению магнитного потока, которое вызывает данный ток.

Для обмотки, имеющей  $w$  витков, вводится понятие потокосцепления  $\Psi = w\Phi$ , соответственно ЭДС индукции для обмотки:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.2)$$

В общем случае магнитный поток определяется интегрированием скалярного произведения векторов магнитной индукции  $B$  и площади элементарной площадки  $dS$  по площади поверхности  $S$ , ограниченной контуром среднего витка:

$$\Phi = \oint B dS.$$

Направление вектора элементарной площадки  $dS$  совпадает с нормалью  $n$  к этой площадке (рис. 3.1).

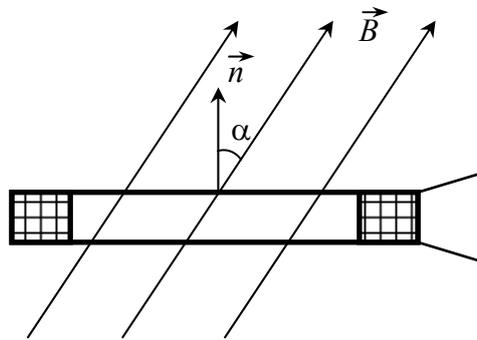


Рис. 3.1. К определению магнитного потока

Если считать магнитное поле в ограниченном обмоткой пространстве однородным, то магнитный поток может быть вычислен по формуле

$$\Phi = \iint B dS = BS \cos \alpha, \quad (3.3)$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями векторов индукции магнитного поля и нормали к плоскости среднего витка обмотки (рис. 3.1).

Подстановкой (3.3) в (3.2) получаем

$$e = -w \frac{d[BS \cos \alpha]}{dt}.$$

Таким образом, индуцируемая переменным магнитным потоком ЭДС зависит от индукции магнитного поля  $B$ , площади контура  $S$ , ориентации контура по отношению к направлению магнитного потока (угол  $\alpha$ ) и числа витков катушки  $w$ . Измерительные устройства, принцип действия которых основан на явлении электромагнитной индукции, реализуют зависимость одного их перечисленных параметров от измеряемой величины.

### 3.1.2. Варианты применения явления электромагнитной индукции при построении измерительных устройств

Явление электромагнитной индукции нашло большое практическое применение при построении измерительных устройств.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся варианты реализации измерительных преобразований, основанных на явлении электромагнитной индукции.

#### *а. Неподвижная обмотка в переменном магнитном поле*

Если измерительную катушку расположить, как показано на рис. 3.1, в изменяющемся по гармоническому закону магнитном поле с индукцией:

$$B(t) = B_m \cos \omega t,$$

где  $B_m$  – амплитуда переменного магнитного поля;  $\omega$  – круговая частота изменения магнитного поля, то в катушке будет наводиться переменная ЭДС, частота которой совпадает частотой переменного магнитного поля, а амплитуда зависит от его параметров:

$$e = -wS \cos \alpha \frac{dB}{dt} = wSB_m \omega \cos \alpha \sin \omega t. \quad (3.4)$$

При  $\alpha=90^\circ$  амплитуда индуцируемой ЭДС равна

$$e_{\max} = wSB_m \omega = 2\pi f w S B_m,$$

где  $f$  – частота изменения магнитного поля в Гц.

Зависимость амплитуды ЭДС от параметров гармонического магнитного поля (амплитуды, частоты, ориентации силовых линий относительно обмотки) позволяет на основе измерения ЭДС получать измерительную информацию об этих параметрах.

Если катушка располагается в магнитном поле, изменяющемся во времени по неизвестному закону  $B(t)$ , то непосредственно по характеру изменения индуцируемой ЭДС определить характеристики магнитного поля невозможно.

Поскольку ЭДС индукции, согласно (3.4), является функцией, производной от индукции, то нахождение индукции магнитного поля осуществляется интегрированием ЭДС:

$$\int e(t) dt = -wS \cos \alpha \int \frac{dB(t)}{dt} dt = -wS \cos \alpha B(t).$$

где  $e(t)$  – закон изменения во времени индуцируемой ЭДС.

Операцию интегрирования можно реализовать схемным путем за счет применения интегратора в цепи обработки выходного сигнала. Таким образом, можно получить закон изменения индукции магнитного поля во времени.

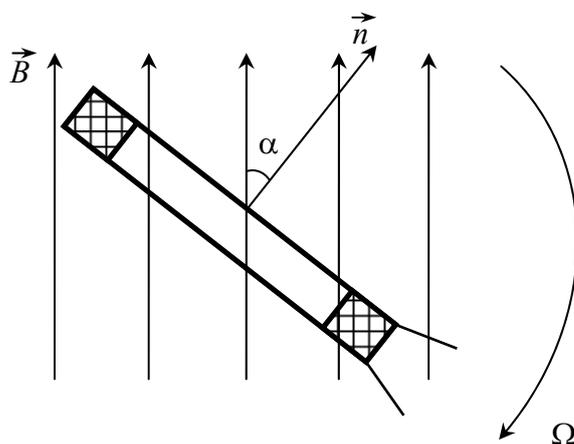
Преобразователи для измерения параметров магнитных полей в воздушном пространстве обычно выполняются в виде измерительных катушек различной формы, начало и конец обмотки которых находятся в одном месте, чтобы не создавались дополнительные контуры за счет подводящих проводов.

Для измерения напряженности магнитного поля при испытании ферромагнитных материалов используются плоские измерительные катушки, помещаемые на поверхности испытуемого образца; при этом измеренная в воздухе напряженность поля принимается равной напряженности поля на поверхности образца.

### ***б. Вращающаяся обмотка в постоянном магнитном поле***

При вращении катушки в постоянном магнитном поле (рис. 3.2) магнитный поток, проходящий через контур катушки, изменяется за счет изменения во времени угла  $\alpha$  между нормалью к плоскости катушки и направлением линий магнитной индукции. В этом случае ЭДС, наводимая в катушке равна

$$e = wBS \sin \alpha(t) \frac{d\alpha(t)}{dt}.$$



**Рис. 3.2. Катушка, вращающаяся в магнитном поле**

При постоянной скорости вращения  $\Omega = \text{const}$  зависимость угла поворота катушки от времени имеет вид

$$\alpha(t) = \Omega t,$$

и индуцируемая ЭДС

$$e = wSB\Omega \sin \Omega t.$$

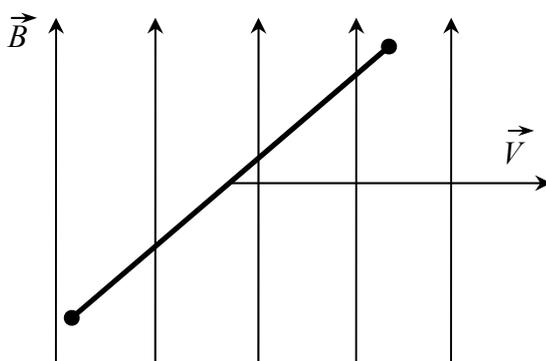
Таким образом, ЭДС обмотки, вращающейся в постоянном магнитном поле с угловой частотой  $\Omega$ , имеет гармонический характер. Амплитуда ЭДС прямо пропорциональна индукции магнитного поля и частоте вращения, что дает возможность использовать рассматриваемую схему измерительного преобразования для измерения характеристик постоянных магнитных полей (при известной частоте вращения), а также частоты вращения (при известной индукции магнитного поля). Устройства последнего типа называются *магнитоиндукционными тахометрами*.

Принцип вращающейся катушки в магнитном поле используется также в устройствах, предназначенных для преобразования механической энергии в электрическую (в генераторах).

### ***в. Линейное перемещение проводника в постоянном магнитном поле***

При движении проводника длиной  $l$  со скоростью  $v$  в магнитном поле индукцией  $B$  в направлении, перпендикулярном линиям индукции и длине проводника (рис. 3.3), на концах проводника индуцируется ЭДС:

$$e = Blv.$$



**Рис. 3.3. Проводник, перемещающийся в магнитном поле**

Появление ЭДС вызвано силой Лоренца, действующей на свободные заряды в проводнике при их движении в магнитном поле и приводящей перемещению зарядов в проводнике.

На таком принципе измерительного преобразования возможно измерение параметров магнитного поля (при известной скорости перемещения проводника) или параметров перемещения (при известной индукции магнитного поля). Второй вариант имеет более широкое применение и используется, например, в индукционных датчиках параметров вибрации.

Рис. 3.4 иллюстрирует вариант схемы построения преобразователя виб-

рации. Круглая катушка 2 средним диаметром  $D_{cp}$  расположена в поле постоянного магнита 1 с индукцией в рабочем зазоре  $B_p$ . Каркас катушки 3 связан с объектом, вибрацию которого необходимо измерить. При движении катушки наводится ЭДС:

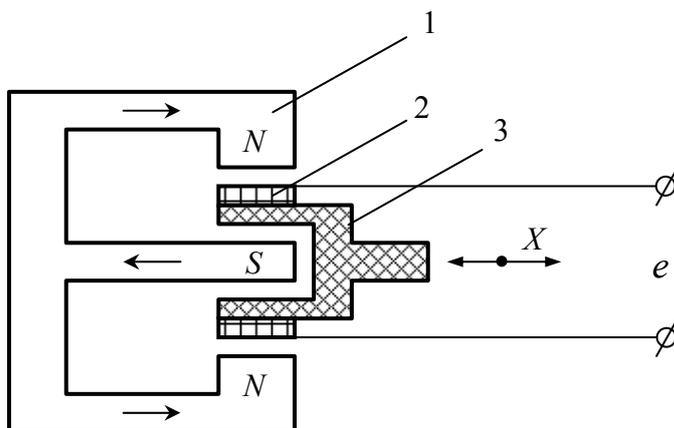
$$e = \pi D_{cp} w B_p \frac{dX}{dt},$$

где  $X$  – виброперемещение.

При синусоидальной вибрации амплитудой  $X_m$  и частотой  $f$  ЭДС в катушке будет иметь гармонический характер:

$$e = 2\pi^2 D_{cp} w B_p X_m f \cos 2\pi f t.$$

Таким образом, частота наводимой в катушке ЭДС совпадает с частотой вибрации, а амплитуда пропорциональна скорости вибрации. Чтобы получить сигнал, пропорциональный виброперемещению или виброускорению в цепи обработки ЭДС применяют соответственно интегрирующий или дифференцирующий усилитель.



**Рис. 3.4. Схема построения индукционного преобразователя параметров вибрации:**

1 – магнитная система; 2 – сигнальная катушка; 3 – каркас катушки

## ***2. Изменение магнитного потока за счет изменения параметров магнитной цепи***

При расположении катушки с током на ферромагнитном сердечнике (магнитопроводе) создаваемый магнитный поток будет зависеть от параметров магнитной цепи (свойств материалов, размеров воздушных зазоров и т.д.). При этом возможна реализация двух вариантов измерительных преобразований: индуктивного и взаимоиндуктивного.

При индуктивном измерительном преобразовании на ферромагнитном сердечнике располагают катушку, индуктивность которой зависит от параметров магнитной цепи. Примеры реализации индуктивного измерительного преобразования были рассмотрены в п. 2.3.2 (рис. 2.8, а, – рис. 2.10).

Если на магнитопроводе расположить две катушки, одна из которых является источником магнитного поля (в катушке протекает ток), а другая – сигнальной (в ней наводится ЭДС), то значение наводимой ЭДС будет зависеть от параметров магнитной цепи. Такой вариант реализует взаимоиндуктивное измерительное преобразование.

Физические основы взаимоиндуктивного измерительного преобразования рассмотрены в п. 2.3.3. Пример возможной реализации представлен на рис. 2.12. В соответствии с (2.19) и (2.21) выходной сигнал в виде индуцируемой ЭДС в сигнальной обмотке (рис. 2.12) равен

$$e = 2\pi f w_1 w_2 i_1 G_{\Sigma} \sin 2\pi f t.$$

Если считать, что магнитная проводимость магнитопровода мала, то суммарная магнитная проводимость цепи полностью определяется проводимостью воздушных зазоров. При данном допущении для схемы на рис. 2.12

$$G_{\Sigma} = \frac{\mu_0 S_{\text{в}}}{2\delta},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $S_{\text{в}}$  – площадь воздушного зазора;  $\delta$  – длина воздушного зазора.

Таким образом, амплитуда наводимой во второй катушке ЭДС зависит от длины воздушного зазора (от перемещения ротора):

$$e_{\text{max}} = \pi f w_1 w_2 i_1 \frac{\mu_0 S_{\text{в}}}{\delta}.$$

При замкнутом магнитопроводе (без воздушных зазоров) модуляция магнитного потока может быть достигнута изменением магнитной проницаемости материала магнитопровода, например, под действием механических напряжений. На таком принципе основана работа магнитоупругих преобразователей деформаций или механических напряжений.

#### ***д. Изменение площади захвата магнитного поля замкнутым контуром***

Если магнитное поле сосредоточено в некоторой ограниченной в пространстве области, то магнитный поток, наводящий ЭДС в проводящем контуре

будет определяться не всей площадью контура, а только ее частью (рис. 3.5). В этом случае изменение магнитного потока и наводимой в контуре ЭДС возможно за счет перемещения контура в собственной плоскости.

Если контур содержит  $w$  витков, то индуцируемую ЭДС можно представить в виде

$$e = -w \frac{d\Phi_x}{dt} = -w \left( B \frac{dS_x}{dt} + S_x \frac{dB}{dt} \right), \quad (3.5)$$

где  $\Phi_x$  – магнитный поток, проходящий внутри проводящего контура;  $B$  – индукция магнитного поля;  $S_x$  – площадь захвата магнитного поля проводящим контуром.

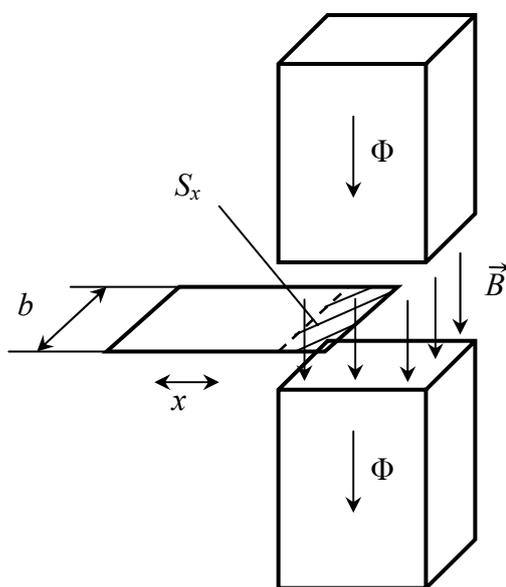


Рис. 3.5. Перемещение контура в магнитном поле

На основе зависимости (3.5) возможно два варианта реализации измерительного преобразования:

- при постоянной индукции магнитного поля ( $B = \text{const}$ ) возможно измерение быстро меняющихся перемещений (например, вибрации);
- при переменной индукции  $B(t) = B_m \cos \omega t$  возможно измерение медленно меняющихся, стационарных перемещений.

Первый случай аналогичен рассмотренному выше варианту реализации индукционных преобразователей вибрации. Наводимая в перемещающемся контуре ЭДС при этом равна

$$e = -wB \frac{dS_x}{dt} = -wBb \frac{dx}{dt} = 2\pi f w B b X_m \sin 2\pi f t,$$

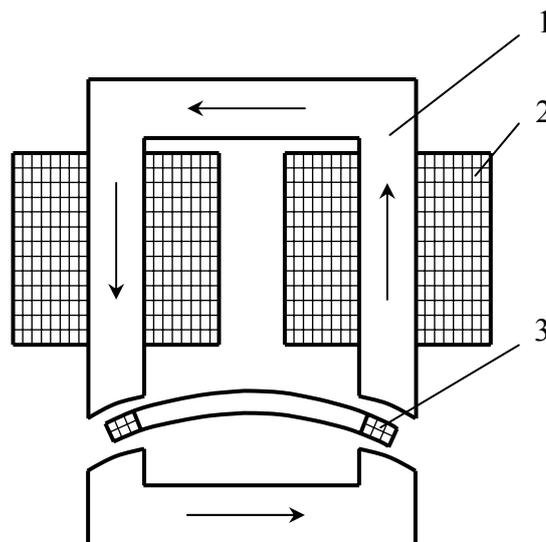
где  $b$  – ширина контура;  $X_m, f$  – амплитуда и частота вибрации.

Во втором случае перемещение контура модулирует по амплитуде наводимую в проводящем контуре ЭДС, частота  $\omega$  которой определяется частотой переменного магнитного поля:

$$e = -wS_x \frac{dB}{dt} = wBbx\omega \sin \omega t. \quad (3.5)$$

На таком принципе строится работа взаимноиндуктивных преобразователей перемещений с подвижной катушкой. Один из возможных вариантов построения такого преобразователя представлен на рис. 3.6.

Преобразователь представляет собой П-образный магнитопровод  $1$  (статор), на котором располагается обмотка возбуждения  $2$ , состоящая из двух катушек с числом витков  $w_1'$  и  $w_1''$ . Вторичная обмотка (сигнальная катушка)  $3$  выполнена в виде плоской рамки с числом витков  $w_2$ , которая перемещается в воздушном зазоре магнитопровода.



**Рис. 3.6.** Схема построения взаимноиндуктивного преобразователя с подвижной катушкой:  $1$  – магнитопровод;  $2$  – обмотка возбуждения;  $3$  – сигнальная обмотка

Две половины обмотки возбуждения ( $w_1'$  и  $w_1''$ ) включаются последовательно согласованно (или параллельно согласованно) и создают суммарную магнитодвижущую силу. Нулевым (исходным) положением рамки преобразователя является её симметричное положение относительно полюсов магнитопровода, в зазоре которого она находится. В таком положении левая и правая части подвижной рамки (сигнальной катушки) пронизываются одинаковыми по величине и противоположно направленными магнитными потоками. В резуль-

тате, при таком расположении рамки суммарный поток сцепления с ней равен нулю, и ЭДС, индуцированная в рамке, отсутствует.

При перемещении рамки, например, влево потокосцепление с рамкой магнитного потока под левым полюсом увеличивается, а под правым полюсом – уменьшается. При этом суммарный поток, проходящий внутри контура сигнальной катушки, становится не равным нулю, и в катушке наводится ЭДС. При перемещении катушки вправо меняется фаза наводимой ЭДС.

### 3.2. Явление возникновения вихревых токов в электропроводных материалах

Пусть у нас имеется обмотка с переменным электрическим током  $i_0$  (рис. 3.7). Магнитное поле  $\vec{B}_0$  обмотки в пространстве вблизи нее будет создавать некоторый магнитный поток. Так как магнитное поле катушки переменное, то и создаваемый магнитный поток будет изменяться во времени. В соответствии с законом электромагнитной индукции, изменяющийся во времени магнитный поток создает вихревое электрическое поле, напряженность  $E$  которого связана с индукцией  $B_0$  магнитного поля соотношением [1]

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}_0}{dt}. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) представляет собой уравнение Максвелла, записанной в дифференциальной форме.

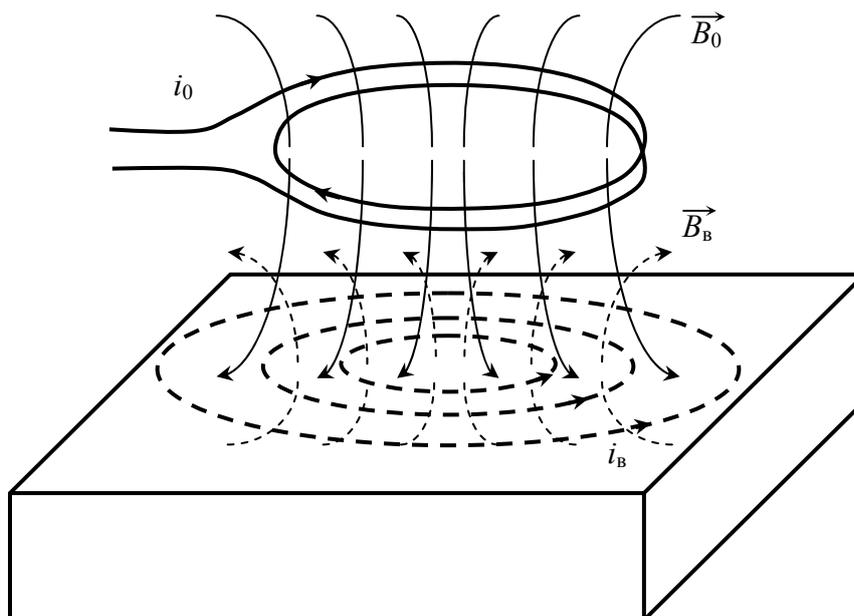


Рис. 3.7. Эффект образования вихревых токов в электропроводящих материалах

Если такую обмотку поместить вблизи электропроводящего объекта, например пластины (рис. 3.7), то наличие электрического поля в электропроводящей среде приведет к появлению электрического тока, плотность которого  $j$ , согласно закону Ома, прямо пропорциональна напряженности электрического поля  $E$  и удельной электрической проводимости материала  $\gamma$  (см. формулу (1.4)).

Этот электрический ток  $i_v$  совпадает по направлению с линиями напряженности индуцируемого электрического поля и, соответственно, также имеет вихревой характер.

Таким образом, в электропроводящих объектах, находящихся под воздействием переменного магнитного поля, возникают вихревые токи. Вихревые токи также называют токами Фуко в честь французского физика, первым подробно исследовавшим их свойства.

Вихревые токи имеют собственное магнитное поле  $\vec{B}_v$ . Согласно правилу Ленца, переменное магнитное поле вихревых токов стремится противодействовать изменениям магнитного потока, индуктирующего вихревые токи. В пластине магнитное поле вихревых токов и возбуждающее магнитное поле имеют противоположное направление, вследствие чего результирующее магнитное поле достаточно резко затухает по глубине. Для приближенной оценки глубины  $\delta$  проникновения электромагнитного поля в объект используется формула [1]

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_r \mu_0}},$$

где  $\omega$  – круговая частота тока возбуждения;  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость материала.

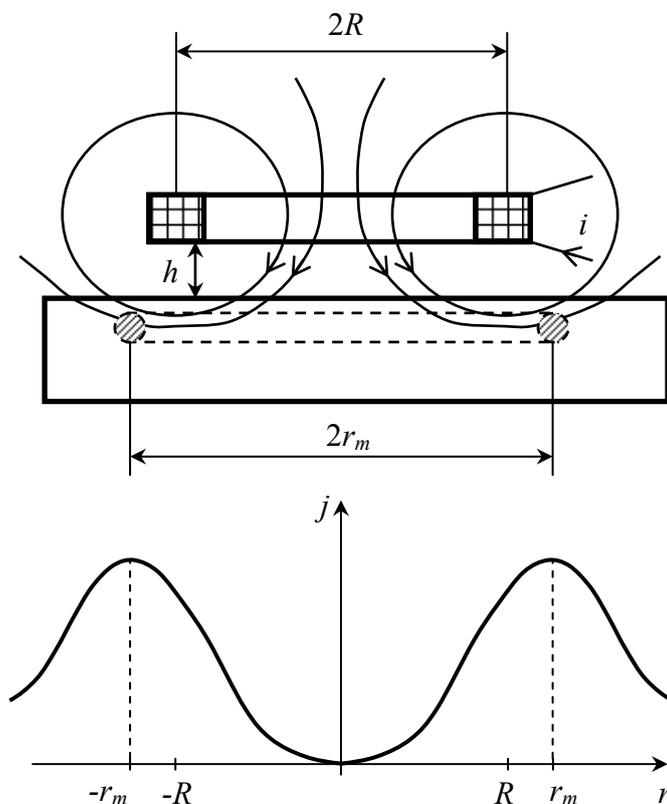
Величина  $\delta$  соответствует затуханию напряженности магнитного поля в  $e$  раз ( $e \approx 2,72$  – основание натурального логарифма) по сравнению со значением напряженности магнитного поля на поверхности объекта. Глубина проникновения электромагнитного поля и, соответственно, глубина распространения вихревых токов уменьшается с увеличением частоты тока возбуждения, удельной электрической проводимости и магнитной проницаемости материала.

Эффект вытеснения носителей зарядов и, соответственно, вихревых токов к поверхности проводника называется поверхностным эффектом или скин-эффектом.

Таким образом, плотность вихревых токов максимальна на поверхности объекта. Кроме того, протекающие на поверхности и вблизи ее токи характеризуются неравномерным радиальным распределением плотности [1] (рис. 3.8). Плотность вихревых токов максимальна для контуров, радиус  $r_m$  которых может быть определен по приближенной формуле:

$$r_m \approx R + 0,75h, \quad (3.7)$$

где  $R$  – радиус контура с током;  $h$  – расстояние между обмоткой и поверхностью объекта.



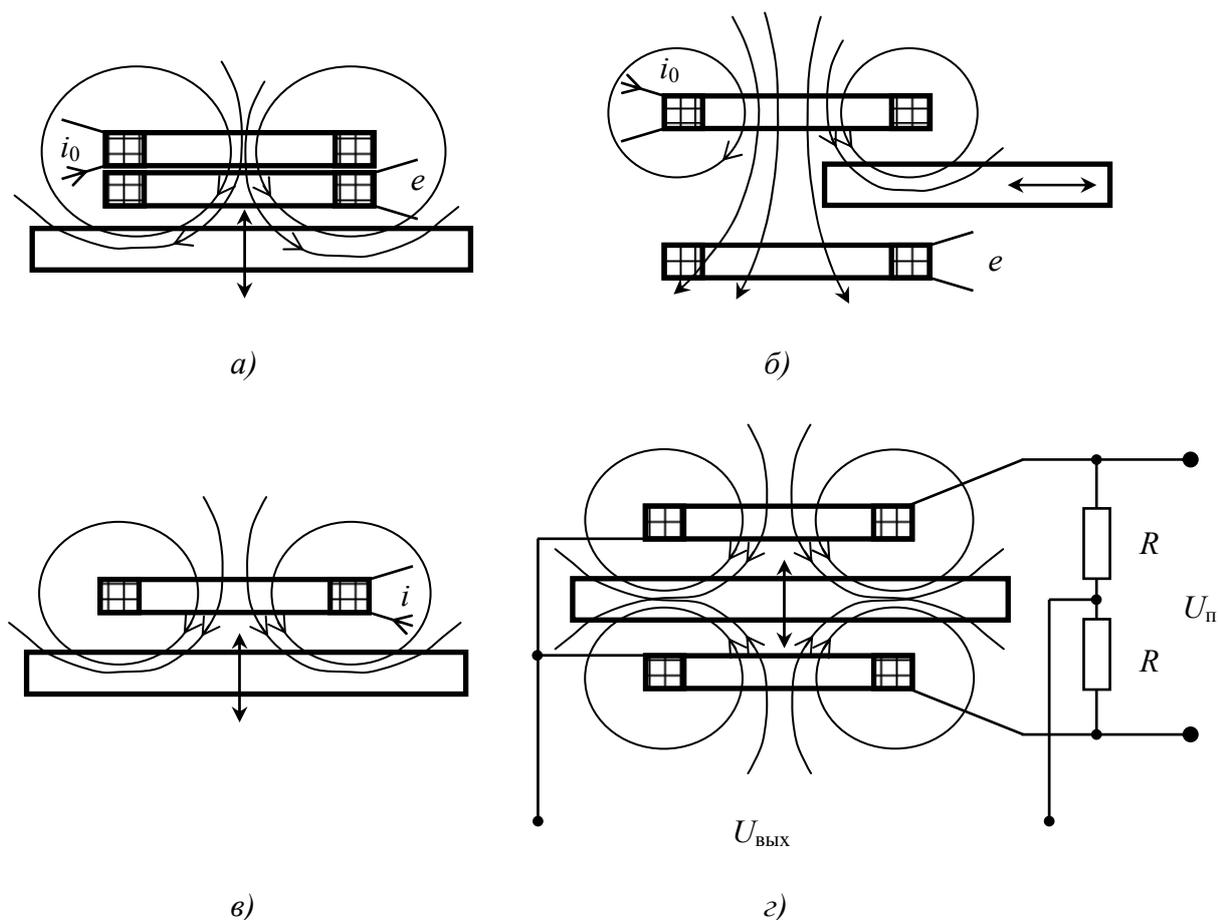
**Рис. 3.8. Радиальное распределение вихревых токов в электропроводящем объекте**

При отсутствии зазора между обмоткой и поверхностью объекта ( $h = 0$ ) радиус контура максимальной плотности вихревых токов равен радиусу обмотки  $R$ . С увеличением зазора радиус контура максимальной плотности  $r_m$  возрастает. Максимальное значение плотности вихревых токов соответствует контуру, имеющему наибольшее значение взаимной индуктивности с контуром обмотки возбуждения. Данному условию и соответствует контур вихревых токов с радиусом, определяемым (3.7).

Если форма обмотки возбуждения отличается от круглой, то и форма контуров вихревых токов будет отличаться от круглой. Таким образом, контуры вихревых токов повторяют по форме контур обмотки возбуждения. Это утверждение справедливо, если размеры проводящего объекта превосходят размеры обмотки с током. При малых размерах электропроводящего объекта (соизмеримых или меньших, чем размеры обмотки с током) форма контуров вихревых токов может повторять по форме поверхность объекта.

Параметры вихревых токов (амплитуда, фаза, пространственное распределение) зависят от геометрических размеров, формы и структурных особенностей электропроводящего объекта, электромагнитных характеристик материала, взаиморасположения объекта и катушки с током, частоты и амплитуды тока возбуждения. Однако указанные информативные параметры вихревых токов не могут быть измерены непосредственным образом. Измерительная информация о параметрах вихревых токов может быть получена косвенным способом. Например, путем измерения характеристик их магнитного поля с помощью дополнительной измерительной обмотки (взаимоиндуктивное измерительное преобразование) либо с помощью той же обмотки, что используется для возбуждения магнитного поля (индуктивное измерительное преобразование).

Примеры схем построения вихретоковых преобразователей, реализующих взаимноиндуктивное и индуктивное измерительные преобразования приведены на рис. 3.9. Измеряемой величиной может быть перемещение проводящего объекта или расстояние до него (например, толщина его покрытия слоем диэлектрика).



**Рис. 3.9. Схемы построения вихретоковых преобразователей:**  
 а, б – реализующие взаимноиндуктивное измерительное преобразование;  
 в, г – реализующие индуктивное измерительное преобразование

В случае взаимоиндуктивного преобразования (рис. 3.9, *а, б*) возбуждение магнитного поля происходит за счет тока в первичной обмотке (обмотке возбуждения), а выходным электрическим сигналом, отражающим свойства электропроводящего объекта, является ЭДС вторичной измерительной обмотки. Эта ЭДС обусловлена не только магнитным полем вихревых токов, но и непосредственно магнитным полем обмотки возбуждения:

$$e = -w_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -w_2 \left( \frac{d\Phi_0}{dt} + \frac{d\Phi_B}{dt} \right) = e_0 + e_x,$$

где  $w_2$  – число витков измерительной обмотки;  $\Phi_2$  – суммарный магнитный поток, проходящий внутри контура измерительной обмотки;  $\Phi_0$  – магнитный поток обмотки возбуждения;  $\Phi_B$  – магнитный поток, создаваемый вихревыми токами;  $e_0$  – начальная ЭДС, обусловленная непосредственным действием возбуждающего магнитного поля  $\Phi_0$  первичной обмотки;  $e_x$  – вносимая ЭДС, обусловленная действием магнитного поля вихревых токов.

Составляющая ЭДС  $e_x$ , наводимая во вторичной обмотке, будет меняться при изменении параметров вихревых токов. Для исключения начальной ЭДС применяют дифференциальные схемы построения преобразователей с встречным включением измерительных обмоток.

В случае индуктивного преобразования (рис. 3.9, *в, г*) электрическим сигналом, отражающим свойства электропроводящего объекта, является индуктивность обмотки или ее комплексное электрическое сопротивление:

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0,$$

где  $R_0, L_0$  – активное сопротивление и индуктивность обмотки.

При анализе работы подобных преобразователей проводящий объект рассматривают как замкнутый контур, обладающий своим комплексным сопротивлением:

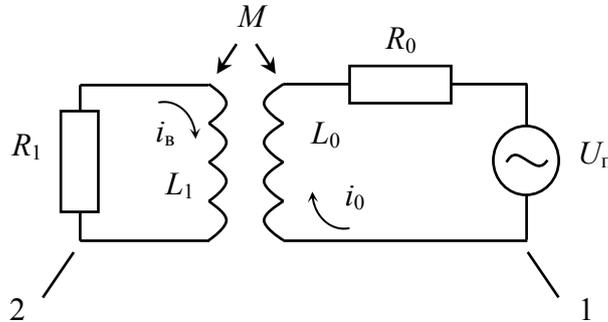
$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1,$$

где  $R_1, L_1$  – активное сопротивление и индуктивность проводящего объекта как замкнутого контура.

На рис. 3.10 изображена упрощенная электрическая схема, соответствующая схеме индуктивного преобразования [2] (рис. 3.9, *в*). Катушка с источником питания  $U_{\text{п}}$  образует первичную цепь 1, а проводящий объект – вторичную 2. Взаимовлияние цепей характеризуется коэффициентом взаимной индукции:

$$M = k\sqrt{L_0 L_1}, \quad (3.8)$$

где  $k$  – коэффициент связи между катушкой и объектом, зависящий от их взаимного расположения.



**Рис. 3.10.** Эквивалентная электрическая схема вихрекового преобразователя:

1 – катушка с источником питания; 2 – электропроводящий объект

В соответствии с законом Кирхгофа для первичной и вторичной цепи (рис. 3.10) можно записать

$$\begin{cases} (R_0 + j\omega L_0)i_0 + j\omega M i_в = U_π, \\ j\omega M i_0 + (R_1 + j\omega L_1)i_в = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Выражая из второго уравнения системы (3.9) вихревой ток  $i_в$  и подставляя его в первое уравнение, получим

$$\left[ R_0 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} R_1 + j\omega \left( L_0 - \frac{\omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} L_1 \right) \right] i_0 = U_π.$$

Для источника питания полное сопротивление первичной цепи изменяется из-за связи с вторичной цепью, при этом активное сопротивление увеличивается, а индуктивность уменьшается:

$$R_{0\text{ЭКВ}} = R_0 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} R_1, \quad L_{0\text{ЭКВ}} = L_0 - \frac{\omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} L_1. \quad (3.10)$$

Если проводящий объект выполнен из материала с высокой электропроводностью, то справедливы соотношения

$$R_1 \ll R_0 \text{ и } R_1 \ll \omega L_1. \quad (3.11)$$

С учетом (3.8) и допущений (3.11) выражения (3.10) упрощаются:

$$R_{0\text{ЭКВ}} = R_0 + k^2 \frac{M^2}{L_1^2} R_1 = R_0 + k^2 \frac{L_0}{L_1} R_1 \approx R_0,$$

$$L_{0\text{ЭКВ}} = L_0 - \frac{M^2}{L_1} = L_0(1 - k^2).$$

На рис. 3.9, *з* показан пример реализации дифференциальной схемы индуктивного преобразования. При взаимодействии с проводящим объектом магнитных полей двух катушек их индуктивности изменяются. При перемещении проводящего объекта эти изменения противофазны: индуктивность одной катушки увеличивается, другой уменьшается. С помощью мостовой схемы формируется разностный сигнал.

Чем выше электрическая проводимость материала объекта, тем сильнее взаимосвязь катушки с током и объекта и выше чувствительность подобных датчиков. При этом желательно, чтобы проводящий объект был немагнитным. Если к катушке приблизить ферромагнитный объект, то в ней возникнут два противоположных эффекта: уменьшение магнитного сопротивления контура магнитной цепи приведет к увеличению индуктивности катушки, а вихревые токи будут стремиться ее уменьшить. Результирующее направление изменения индуктивности в этом случае будет зависеть от соотношения величин проницаемости и удельного сопротивления объекта.

### 3.3. Эффект Холла. Магниторезистивный эффект

#### 3.3.1. Физические основы проявления эффекта Холла

Эффект Холла относится к группе гальваномагнитных явлений, связанных с действием магнитного поля на электрические свойства проводников и полупроводников, по которым протекает электрический ток.

Эффект был открыт американским физиком Эдвином Холлом в 1879 году. Сущность явления заключается в возникновении в твердом проводнике с током, помещенном в магнитное поле, перпендикулярное к электрическому току, электрического поля, перпендикулярного направлению тока и магнитного поля.

В основе эффекта Холла лежит взаимодействие между электрическими зарядами и магнитными полями. Любая заряженная частица, движущаяся в магнитном поле, испытывает действие силы Лоренца, направление которой перпендикулярно направлению движения частицы и направлению магнитного поля. Величина этой силы прямо пропорциональна величине заряда  $q$ , скорости частицы  $v$  и индукции магнитного поля  $B$ :

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Рассмотрим металлическую или полупроводниковую пластину, по которой проходит ток (рис. 3.11). Если поместить пластинку в магнитное поле, направленное перпендикулярно линиям тока, то сила Лоренца, действующая на движущиеся внутри пластинки со скоростью  $v$  электроны, равна

$$F_{\perp} = e_{-}vB, \quad (3.12)$$

где  $e_{-}$  – заряд электрона.

В формуле (3.12) полагается, что магнитное поле направлено строго перпендикулярно вектору скорости электронов  $v$ .

Действие силы Лоренца приводит к отклонению движущихся электронов от прямолинейной траектории, параллельной продольной оси пластинки, в сторону одной из боковых граней (для случая, показанного на рис. 3.11, – в сторону ближней грани). На противоположной грани остается нескомпенсированный положительный заряд ионов кристаллической решетки. В результате этого в пластине возникает поперечное электрическое поле (поле Холла), направленное от дальней боковой грани к ближней.

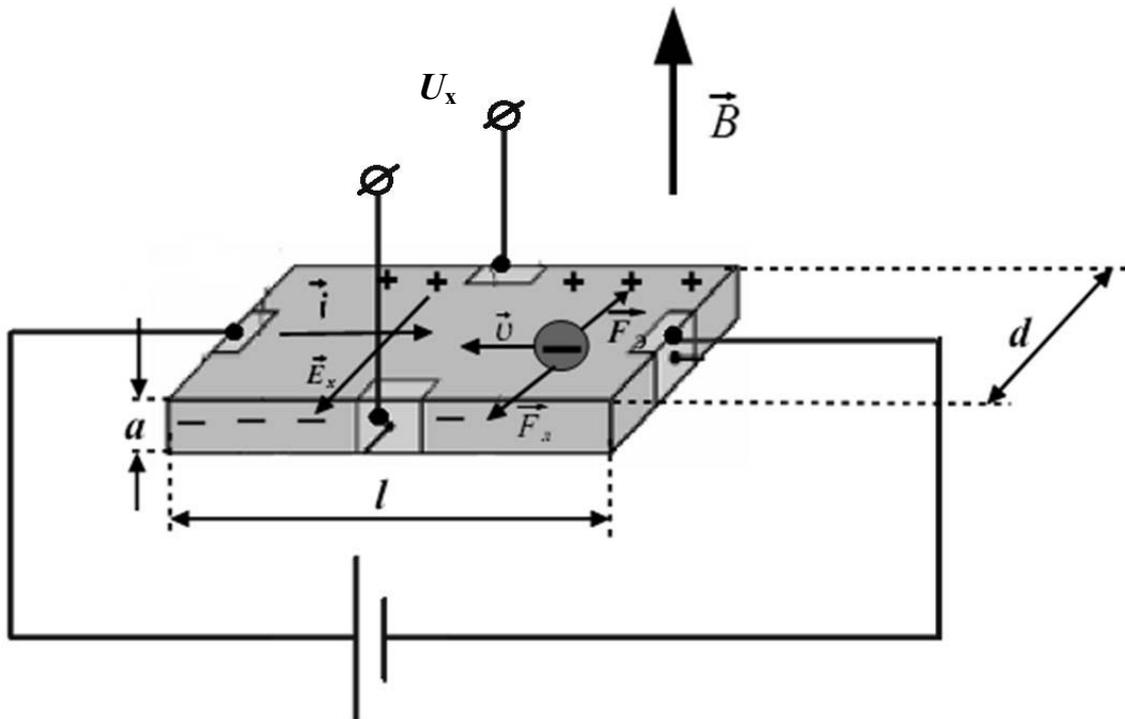


Рис. 3.11. Физические основы проявления эффекта Холла в проводниках

Обозначим напряженность образовавшегося электрического поля через  $E_x$ . Со стороны возникшего электрического поля на электроны будет действовать сила

$$F_3 = e_- E_x,$$

направление которой противоположно направлению силы  $F_{л}$ .

Разделение зарядов в образце будет продолжаться до тех пор, пока силы магнитного и электрического полей не уравновесят друг друга, т. е.:

$$e_- vB = e_- E_x,$$

Откуда напряженность поля Холла

$$E_x = vB. \quad (3.13)$$

Возникающая вследствие действия электрического поля  $E_x$  разность потенциалов  $U_x$  на противоположных боковых гранях пластины называют ЭДС Холла (рис. 3.11).

Скорость движения электронов может быть выражена через силу тока. По определению, сила тока есть заряд, проходящий через сечение проводника в единицу времени:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Если скорость движения электронов постоянна, то

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{Ne_-}{\Delta t}, \quad (3.14)$$

где  $N$  – количество электронов, прошедших через некоторое сечение проводника за время  $\Delta t$ .

Пусть скорость движения электронов такова, что через сечение проводника  $S = ad$  за время  $\Delta t$  проходят все электроны, находящиеся в некотором объеме  $V_0 = adb$  (рис. 3.12). Тогда

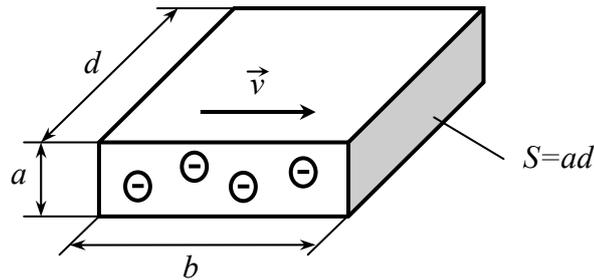
$$N = nV_0 = nadb, \quad (3.15)$$

где  $n$  – объемная концентрация электронов в материале,  $a$  – толщина пластинки в направлении магнитного поля,  $d$  – ширина пластинки в направлении поля  $E_x$  (рис. 3.11, 3.12).

Подставляя (3.15) в (3.14), получим соотношение, связывающее силу тока и скорость движения электронов:

$$i = \frac{ne_-adb}{\Delta t} = ne_-adv, \quad (3.16)$$

где  $v = \frac{b}{\Delta t}$  – скорость движения электронов.



**Рис. 3.12. К определению силы тока в пластине**

Если считать электрическое поле  $E_x$  однородным, то ЭДС Холла может быть определена следующим образом:

$$U_x = E_x d .$$

С учетом (3.13) получаем

$$U_x = E_x d = vBd . \quad (3.17)$$

Выразим из (3.16) скорость движения электронов и подставим в (3.17):

$$U_x = Bd \frac{i}{ne_{-}ad} = \frac{R_h}{a} iB , \quad (3.18)$$

где  $R_h = \frac{1}{ne_{-}}$  – коэффициент Холла, зависящий от природы вещества пластинки.

В случае если направление вектора магнитной индукции и направление электрического тока взаимно не перпендикулярны, то ЭДС Холла описывается следующим выражением:

$$U_x = \frac{R_h}{a} iB \sin \alpha ,$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями векторов магнитной индукции и электрического тока.

### **3.3.2. Эффект Холла в полупроводниках**

В соответствии с формулой (3.18) ЭДС Холла зависит от величины проходящего тока, индукции магнитного поля, ширины пластины и концентрации носителей заряда. Ввиду большой концентрации свободных электронов в проводниках коэффициент Холла имеет для них пренебрежимо малое значение

( $R_h \sim 10^{-3} \text{ см}^3/\text{Кл}$ ). На много порядков больше значение этого коэффициента для полупроводников ( $R_h \sim 10^5 \text{ см}^3/\text{Кл}$ ), которые и используются в качестве материала для преобразователей Холла [1].

Условно считают, что знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда носителей тока. У полупроводников с электронной проводимостью ( $n$ -типа) постоянная  $R_h$  отрицательна, у полупроводников с дырочной проводимостью ( $p$ -типа) –  $R_h$  положительна.

При выводе формулы (3.18) полагалось, что все носители заряда имеют одинаковую скорость. Если учитывать распределение носителей заряда по скоростям, то необходимо ввести числовой множитель  $A$ , отличный от единицы [7]:

$$R_h = \frac{A}{ne_-}$$

где  $A$  – постоянная, зависящая от механизма рассеяния носителей заряда:  $A=0,99\dots 1,93$ . Практически для большинства металлов можно считать  $A \approx 1$ .

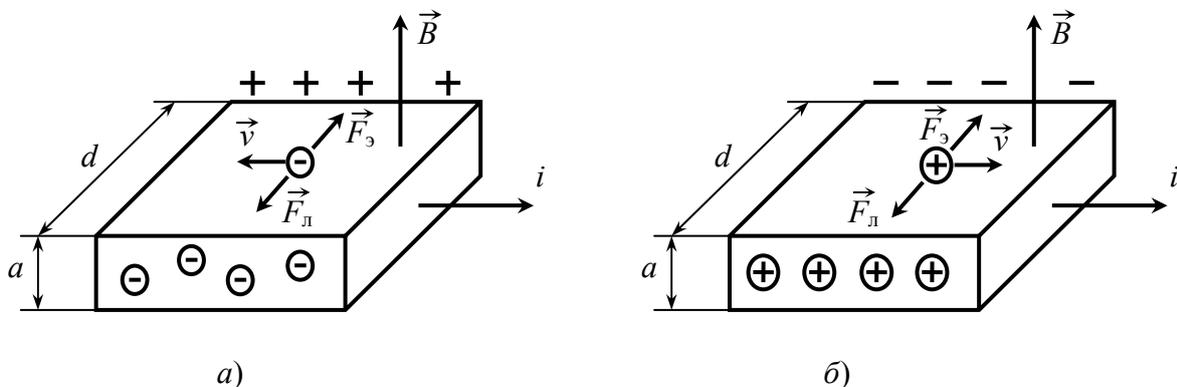
Для полупроводников с учетом рассеяния электронов на тепловых колебаниях решетки [7]:

$$A = \frac{3\pi}{8} \approx 1,18.$$

Откуда получаем

$$R_h = \frac{3\pi}{8ne_-}. \quad (3.19)$$

Наглядная иллюстрация эффекта Холла в полупроводниках с  $n$ -типом и  $p$ -типом проводимости приведена на рис. 3.13,  $a$ ,  $б$ .



**Рис. 3.13. Эффект Холла:**  $a$  – в проводниках и полупроводниках с  $n$ -проводимостью;  $б$  – в полупроводниках с  $p$ -проводимостью

В собственных полупроводниках электрический ток создается движением, как электронов, так и дырок. Дрейфовая скорость движения дырок совпадает по направлению с направлением электрического тока, а скорость электронов противоположна направлению тока. Так как заряд дырок положителен, то действующая на них сила Лоренца имеет такое же направление, как и сила, действующая на электроны (на рис. 3.13, *a*, *b* силы направлены к ближней грани).

Следовательно, при заданных направлениях магнитного поля и силы тока дырки и электроны отклоняются силой Лоренца в одну и ту же сторону, в результате чего направления электрических полей Холла, созданных за счет движения дырок и электронов, противоположны. Постоянная Холла в собственных полупроводниках может быть рассчитана по формуле [7]

$$R = \frac{A \mu_+^2 n_+ - \mu_-^2 n_-}{e_- \mu_+ n_+ + \mu_- n_-}, \quad (3.20)$$

где  $n_-$  и  $n_+$  – концентрации электронов и дырок;  $\mu_-$  и  $\mu_+$  – их подвижности.

Подвижность носителей заряда  $\mu$  равна дрейфовой скорости носителей заряда в электрическом поле напряженностью 1 В/м. Следовательно, подвижность и средняя скорость носителей заряда связаны между собой следующим соотношением:

$$\mu = \frac{v}{E}, \quad (3.21)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля.

В собственном полупроводнике концентрации электронов и дырок одинаковы:  $n_- = n_+$ . В этом случае формула (3.20) приобретает вид

$$R = \frac{A \mu_+ - \mu_-}{e_- n \mu_+ + \mu_-}.$$

Если бы подвижности электронов и дырок в собственном полупроводнике были равны друг другу, постоянная Холла обратилась бы в нуль и эффект бы не наблюдался. Однако в действительности  $\mu_- \neq \mu_+$ , и постоянная Холла собственных проводников отлична от нуля.

В примесных полупроводниках основными носителями заряда являются либо электроны (примесные полупроводники *n*-типа), либо дырки (примесные полупроводники *p*-типа). В металлах ток создается электронами.

Одновременное измерение постоянной Холла и удельной электропроводности полупроводника позволяет рассчитать подвижность носителей заряда.

Согласно закону Ома, плотность тока в среде пропорциональна напряженности электрического поля:

$$j = \gamma E, \quad (3.22)$$

где  $\gamma$  – удельная электрическая проводимость.

С другой стороны,

$$j = \frac{i}{S},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения проводника.

Для рассматриваемой пластины (рис. 3.11) площадь  $S = ad$ , и с учетом (3.16), получаем

$$j = \frac{i}{S} = \frac{ne_{-}adv}{S} = ne_{-}v. \quad (3.23)$$

Сравнивая (3.22) и (3.23), с учетом (3.21) получим

$$\gamma = \frac{ne_{-}v}{E} = ne_{-}\mu. \quad (3.24)$$

Перемножим постоянную Холла (3.19) на удельную проводимость (3.24):

$$R_h \gamma = \frac{3\pi}{8ne_{-}} ne_{-}\mu = \frac{3\pi}{8} \mu.$$

Откуда

$$\mu = \frac{8}{3\pi} R_h \gamma.$$

Если известно полное сопротивление образца  $R_{\text{обр}}$ , то удельная электрическая проводимость:

$$\gamma = \frac{l}{ad} \frac{1}{R_{\text{обр}}},$$

где  $l$  – длина образца.

Соответственно, подвижность носителей заряда в полупроводнике можно рассчитать по формуле

$$\mu = \frac{8R_h}{3\pi} \frac{l}{ad} \frac{1}{R_{\text{обр}}}.$$

### 3.3.3. Физические основы проявления магниторезистивного эффекта

Магниторезистивный эффект заключается в изменении электрического сопротивления твердых проводников под действием внешнего магнитного поля. Это изменение обусловлено увеличением удельного электрического сопротивления проводящего материала под действием магнитного поля.

Причина магниторезистивного эффекта, как и в случае эффекта Холла, заключается в искривлении траекторий носителей заряда под действием магнитного поля. Количественно эффект зависит от материала резистивного элемента и его формы.

В проводниковых материалах магниторезистивный эффект проявляется слабо. Относительное изменение удельного электрического сопротивления  $\Delta\rho/\rho_0$  в магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл для хороших проводников составляет порядка  $10^{-4}$ . Исключение составляет висмут, для которого  $\Delta\rho/\rho_0 \approx 2$  при  $B = 3$  Тл, где  $\rho_0$  – значение удельного электрического сопротивления при отсутствии магнитного поля [1].

Существенно сильнее магниторезистивный эффект выражен в полупроводниках, для которых при  $B = 1$  Тл изменение удельного электрического сопротивления составляет  $\Delta\rho/\rho_0 \approx (10^{-2} \dots 10)$  и существенно зависит от температуры и наличия примесей.

Весьма существенна зависимость степени проявления магниторезистивного эффекта от формы магниторезистора. Если магниторезистор представляет собой пластинку длиной  $l$  и шириной  $d$ , то в зависимости от соотношения  $l$  и  $d$  относительное изменение электрического сопротивления при одном и том же значении индукции магнитного поля будет различным.

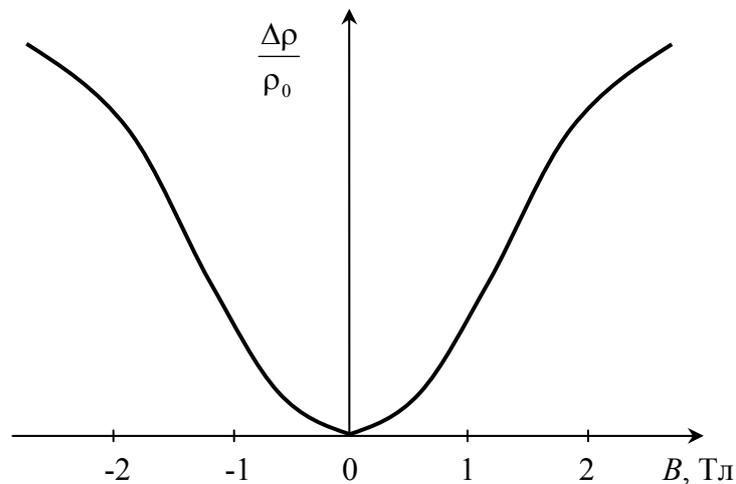
Максимальное значение относительного изменения удельного электрического сопротивления  $\Delta\rho_m/\rho_0$  соответствует отношению  $l/d \rightarrow 0$  (короткий и широкий магниторезистор). С увеличением отношения  $l/d$  (длинный и узкий магниторезистор) величина  $\Delta\rho/\rho_0$  уменьшается. Такая зависимость магнитной чувствительности от формы магниторезистора обусловлена тем, что при относительно малом поперечном размере магниторезистора ограничено и поперечное смещение носителей заряда под действием магнитного поля.

Зависимость удельного электрического сопротивления магниторезистора от индукции поперечного магнитного поля описывается выражением

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{k_1 B^2}{1 + k_2 B^2},$$

где  $k_1$  – коэффициент, зависящий от формы магниторезистора;  $k_2$  – коэффициент, зависящий от материала магниторезистора.

Примерный вид зависимости  $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}(B)$  показан на рис. 3.14. Для слабых магнитных полей (обычно для  $B < 0,2 \dots 0,4$  Тл) зависимость  $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}(B)$  имеет квадратичный характер, для средних магнитных полей (от  $0,4 \dots 0,5$  до  $1,5 \dots 2,0$  Тл) – линейный. В области сильных магнитных полей зависимость  $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}(B)$  вновь становится нелинейной и в пределе удельное сопротивление перестает зависеть от индукции магнитного поля.



**Рис. 3.14. Характер зависимости изменения электрического сопротивления магниторезистора от индукции магнитного поля**

### **3.3.4. Область применения эффекта Холла**

Эффект Холла позволяет определить тип носителей заряда (электронный или дырочный) в металле или полупроводнике, что делает его достаточно хорошим методом исследования свойств полупроводников. С помощью эффекта Холла стало возможным понять суть процессов проводимости в полупроводниках и провести грань между полупроводниками и другими типами плохо проводящих материалов. Это обусловлено тем, что измерение ЭДС (разности потенциалов) Холла, возникающей в материале перпендикулярно направлению электрического тока и внешнего магнитного поля, дает возможность непосредственно определить концентрацию и знак носителей заряда.

Последнее позволяет определить принадлежность материала к тому или иному типу полупроводников ( $p$  или  $n$ -типа). Измерения эффекта Холла дают возможность отделить случай ионной проводимости от случая электронной проводимости. Наличие эффекта Холла в проводниках и полупроводниках сви-

детельствует об электронном характере проводимости. С помощью эффекта Холла возможно получить данные и о подвижности носителей заряда (так называемая *холловская* подвижность). Таким образом, можно считать, что эффект Холла – один из наиболее эффективных методов исследования электрических свойств полупроводниковых материалов.

Но все же основное применение преобразователей Холла – измерение постоянных и переменных магнитных полей. Магнитная чувствительность в зависимости от материала и режима работы преобразователя составляет 0,05...1 В/Тл. Кроме того, преобразователи Холла применяются в качестве измерительных преобразователей электрических величин для перемножения электрических сигналов, в том числе для измерения электрической мощности. В этих случаях одна из электрических входных величин преобразуется в силу электрического тока, а другая с помощью электромагнитного преобразователя – в магнитную индукцию. Электромагнитный преобразователь обеспечивает при этом гальваническую развязку цепей.

Датчики Холла получили большое распространение в бесколлекторных, или вентильных, электродвигателях (сервомоторах). Датчики закрепляются непосредственно на статоре двигателя и выступают в роли датчика положения ротора, реализующего обратную связь по положению ротора. Также на основе эффекта Холла работают некоторые виды ионных реактивных двигателей. Логические датчики Холла используют в устройствах синхронизации, системе зажигания, считывателях магнитных карт, ключей, в бесконтактных реле и т.д.

Основная область использования магниторезисторов та же, что и эффекта Холла – измерение магнитных полей. Но, если применение преобразователей Холла более эффективно для области слабых полей, то в области сильных магнитных полей целесообразно использование магниторезисторов.

### **3.4. Изменение свойств ферромагнитных материалов в сильных магнитных полях. Магнитная модуляция**

#### **3.4.1. Понятие магнитной модуляции**

Магнитные свойства ферромагнитных материалов характеризуются кривой намагничивания  $B=f(H)$  – зависимостью магнитной индукции в материале от напряженности внешнего магнитного поля. Эта зависимость нелинейна и обладает гистерезисом (см. п. 2.2, рис. 2.5). При анализе свойств магнитомягких материалов в больших диапазонах изменения магнитных полей шириной петли гистерезиса можно пренебречь и считать зависимость  $B=f(H)$  однозначной. В

области слабых магнитных полей магнитную проницаемость магнитомягких материалов можно считать постоянной, а зависимость  $B=f(H)$  – линейной:

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H,$$

где  $\mu$ ,  $\mu_r$  – абсолютная и относительная магнитные проницаемости среды,  $\mu_0$  – магнитная постоянная (абсолютная магнитная проницаемость вакуума).

При увеличении напряженности магнитного поля ферромагнитные материалы проявляют нелинейные свойства, при этом магнитная проницаемость изменяется в зависимости от внешнего магнитного поля  $\mu=f(H)$ . В первом приближении изменение индукции в материале при изменении напряженности магнитного поля определяется следующим выражением:

$$\Delta B = \frac{dB}{dH} \Delta H = \mu_d \Delta H,$$

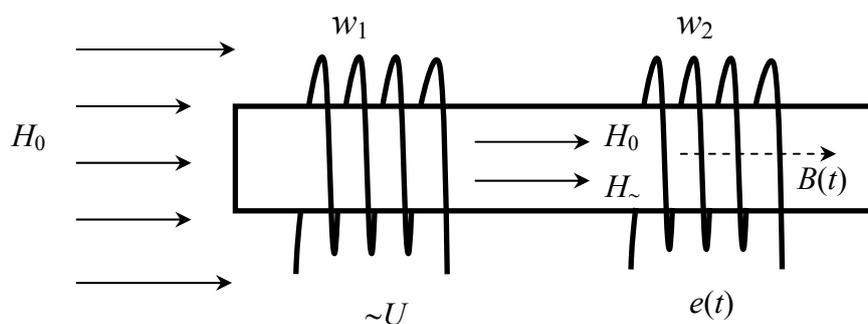
где  $\mu_d = \frac{dB}{dH}$  – дифференциальная магнитная проницаемость.

При достижении напряженности магнитного поля некоторого значения  $H_{\text{нас}}$  индукция в материале достигает максимального значения  $B_{\text{нас}}$  и перестает зависеть от напряженности магнитного поля, при этом  $\mu_d=0$ , и материал теряет свои магнитные свойства.

*Магнитной модуляцией* называют процесс циклического перехода ферромагнетиков в область магнитного насыщения под действием внешних магнитных полей разных частот. Наибольшее практическое применение имеет случай одновременного намагничивания материала в постоянном и переменном магнитных полях.

Измерительные устройства, основанные на проявлении нелинейных свойств ферромагнитных материалов при их одновременном намагничивании в постоянном и переменных магнитных полях, называются *магнитомодуляционными*. Обычно одно из полей является задаваемым (модулирующим), а параметры другого являются информативными, т.е. измеряемыми или связанными с измеряемыми величинами.

Возможность преобразования параметров постоянного магнитного поля в электрический сигнал рассмотрим на следующем примере. Пусть длинный цилиндрический ферромагнитный сердечник расположен в постоянном магнитном поле напряженностью  $H_0$  (рис. 3.15). На сердечнике намотаны две обмотки: обмотка возбуждения  $w_1$ , питаемая переменным электрическим током, и измерительная обмотка  $w_2$ . Ток в первой обмотки создает переменное магнитное поле напряженностью  $H$ .



**Рис. 3.15. Ферромагнитный сердечник с двумя катушками в постоянном магнитном поле**

ЭДС измерительной обмотки, в соответствии с законом электромагнитной индукции, определяется выражением

$$e(t) = -w_2 \frac{d\Phi}{dt} = -w_2 S \frac{dB}{dt},$$

где  $\Phi$  – магнитный поток через измерительную обмотку;  $S$  – площадь поперечного сечения ферромагнитного сердечника;  $B$  – индукция магнитного поля в сердечнике.

Будем считать закон изменения напряженности переменного магнитного поля синусоидальным с некоторой амплитудой  $H_m$  и циклической частотой  $\omega$ :

$$H_{\sim}(t) = H_m \sin(\omega t). \quad (3.25)$$

В общем случае магнитные свойства ферромагнетика имеют нелинейный характер, поэтому для нахождения закона изменения во времени индукции магнитного поля при известном характере изменения напряженности воспользуемся кривой намагничивания ферромагнетика.

Для получения зависимости  $B(t)$  следует для каждого значения времени  $t_i$  найти с использованием зависимости  $H(t)$  соответствующее значение  $H_i$ , а далее с использованием зависимости  $B(H)$  – соответствующее моменту времени  $t_i$  значение индукции  $B_i$ .

### **3.4.2. Режимы работы магнитомодуляционных преобразователей**

В зависимости от соотношения амплитуды напряженности переменного магнитного поля  $H_m$ , напряженности постоянного магнитного поля  $H_0$  и напряженности насыщения  $H_{\text{нас}}$  возможны три режима работы магнитомодуляционных преобразователей:

1.  $H_m \ll H_{\text{нас}}, H_0 < H_{\text{нас}}$ ;
2.  $H_0 > H_{\text{нас}}, |H_0 - H_m| \leq H_{\text{нас}}$ ;
3.  $H_m > H_{\text{нас}} + H_0, H_0 \ll H_m$ .

Рассмотрим подробнее режимы работы магнитомодуляционных преобразователей на примере стержня с двумя обмотками (рис. 3.15).

### **Первый режим ( $H_m \ll H_{\text{нас}}, H_0 < H_{\text{нас}}$ )**

При отсутствии внешнего магнитного поля ( $H_0=0$ ) и при таком значении тока в обмотке возбуждения, что  $H_m \ll H_{\text{нас}}$  зависимость  $B(H)$  можно считать линейной (рис. 3.16). При этом дифференциальная магнитная проницаемость  $\mu_d = \frac{dB}{dH}$  постоянна, и зависимости  $B(t)$  и, соответственно,  $e(t)$  близки к гармоническим с частотой  $\omega$ . (На рис. 3.16 эти зависимости показаны пунктиром). С учетом (3.25) ЭДС при отсутствии внешнего магнитного поля равна:

$$e(t) = -w_2 S \frac{dB}{dt} = -w_2 S \frac{dB}{dH} \frac{dH}{dt} = -w_2 S \mu_d \omega H_m \cos \omega t.$$

В случае намагничивания ферромагнетика одновременно в переменном и постоянном магнитных полях напряженность магнитного поля в материале равна

$$H(t) = H_0 + H_m \sin \omega t.$$

В этом случае зависимость  $B(t)$  отличается от синусоидальной, при этом искажение синусоиды носит несимметричный характер: положительная полуволна отличается от отрицательной как по амплитуде, так и по форме (рис. 3.16).

Магнитная проницаемость в этом случае является функцией времени  $\mu_d(t)$ , поэтому выражение для ЭДС сигнальной обмотки можно записать следующим образом:

$$e(t) = -w_2 S \frac{dB}{dt} = -w_2 S \frac{d(\mu_d \Delta H)}{dt} = -w_2 S \left[ \mu_d(t) \frac{dH}{dt} + (H(t) - H_0) \frac{d\mu_d}{dt} \right]. \quad (3.26)$$

Будем считать, что суммарная напряженность магнитного поля в материале не выходит за область линейного изменения дифференциальной магнитной проницаемости, тогда

$$\mu_d(t) = \mu [1 - kH(t)] = \mu [1 - k(H_0 + H_m \sin \omega t)], \quad (3.27)$$

где  $\mu$  – начальное значение магнитной проницаемости;  $k$  – некоторый постоянный коэффициент.

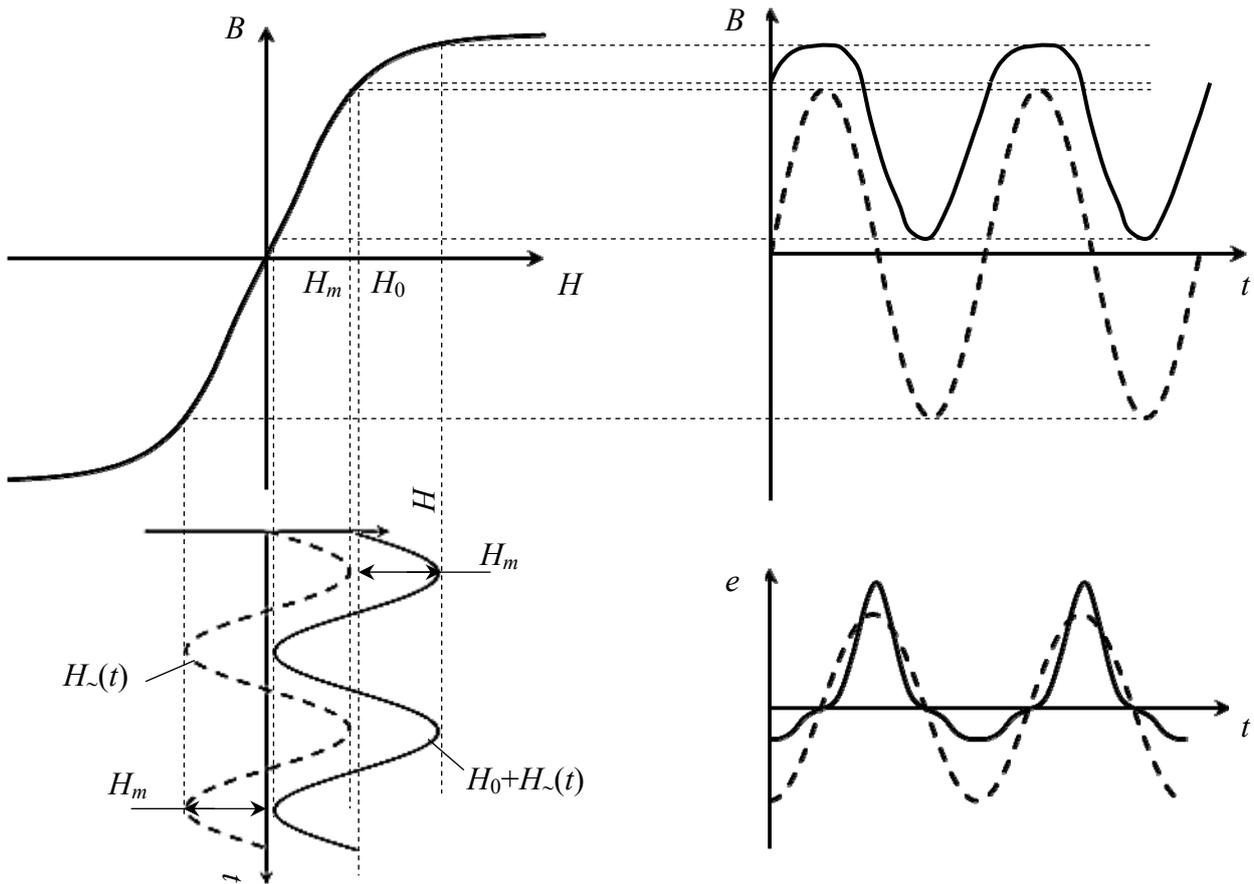


Рис. 3.16. Графики зависимостей при одновременном намагничивании ферромагнетика в постоянном и переменном полях (первый режим:  $H_m \ll H_{нас}$ ,  $H_0 < H_{нас}$ )

Подставив (3.27) в (3.26), после преобразования получим

$$e(t) = -w_2 S \mu H_m \omega [(1 - kH_0) \cos \omega t + kH_m \sin 2\omega t]. \quad (3.28)$$

Из (3.28) видно, что выходная ЭДС включает в себя два гармонических сигнала с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ . Если вместо (3.27) задать более сложный закон изменения  $\mu(H)$ , то количество гармоник в выходном сигнале увеличится.

Таким образом, при намагничивании ферромагнетика в постоянном и переменном магнитных полях в спектре сигнала  $e(t)$ , наряду с первой гармоникой частоты  $\omega$ , присутствуют также четные гармоники этой частоты.

Наличие постоянного магнитного поля существенным образом влияет на форму сигнала  $e(t)$ , что дает возможность использования рассматриваемого измерительного преобразования для измерения характеристик постоянных магнитных полей.

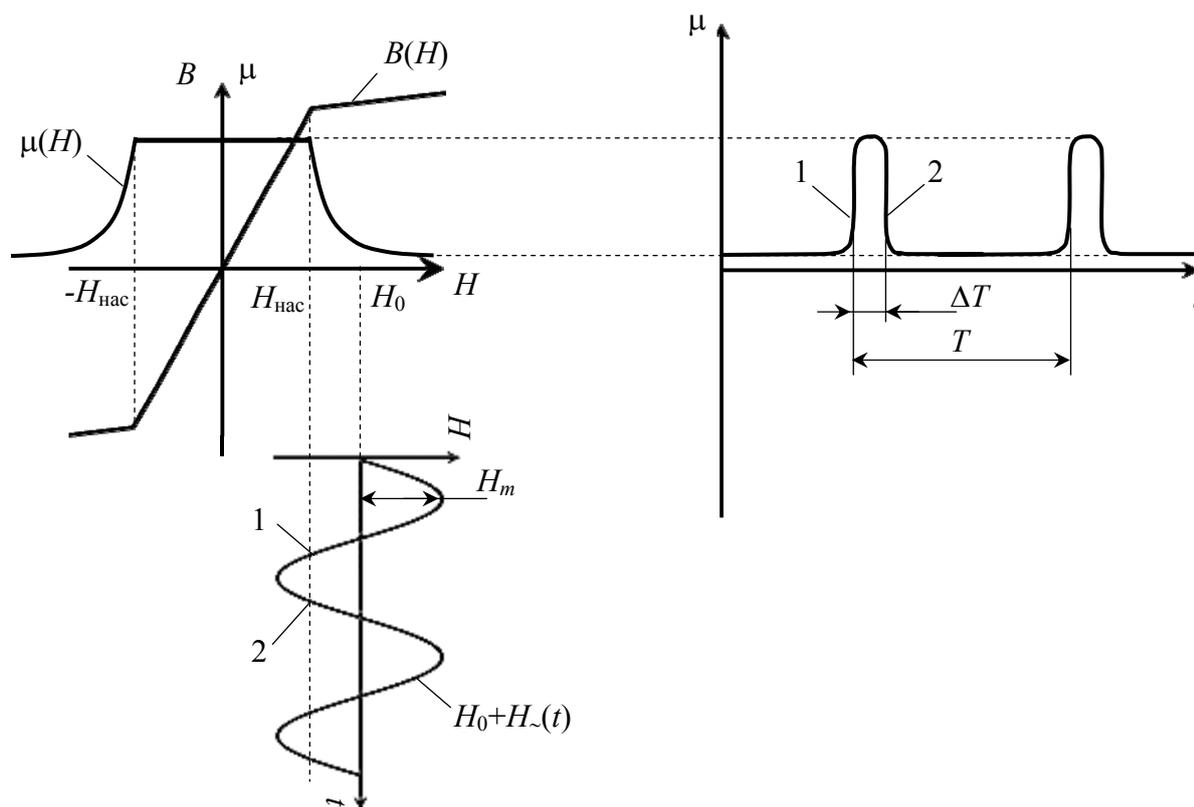
**Второй режим ( $H_0 > H_{нас}$ ,  $|H_0 - H_m| \leq H_{нас}$ )**

Физику процесса намагничивания ферромагнетика во втором режиме

можно пояснить с помощью графиков зависимостей (рис. 3.17). Зависимость  $B(H)$  на участке  $[-H_{\text{нас}}, H_{\text{нас}}]$  условно будем считать линейной.

В данном режиме измеряемыми являются параметры переменного магнитного поля, а постоянное магнитное поле является модулирующим. Значение  $H_0$  определяет диапазон измерения амплитуды переменного магнитного поля:  $H_0 - H_{\text{нас}} < H_m < H_0 + H_{\text{нас}}$ .

Так как  $H_0 > H_{\text{нас}}$ , сердечник находится в режиме насыщения и выходит из него лишь в те полупериоды переменного магнитного поля, когда  $\tilde{H}$  направлена встречно  $H_0$  и достигает такого значения, что результирующая напряженность оказывается меньше напряженности насыщения (участок 1-2, рис. 3.17). Если переменное магнитное поле изменяется по гармоническому закону, то зависимость  $\mu(t)$  представляет собой последовательность импульсов, частота следования которых соответствует частоте  $\omega$  переменного магнитного поля, а ширина  $\Delta T$  характеризует амплитуду  $H_m$ .



**Рис. 3.17. Графики зависимостей при одновременном намагничивании ферромагнетика в постоянном и переменном полях (второй режим:  $H_0 > H_{\text{нас}}$ ,  $|H_0 - H_m| \leq H_{\text{нас}}$ )**

Если на сердечнике поместить катушку с переменным током, то ее индуктивность в промежуток времени  $\Delta T$ , соответствующий участку 1-2, резко возрастает. При этом ток, протекающий в катушке, также будет носить им-

пульсный характер. Измеряя ток, можно судить о параметрах переменного магнитного поля.

### Третий режим ( $H_m > H_{\text{нас}} + H_0$ , $H_0 \ll H_m$ )

Физика процесса намагничивания ферромагнетика в третьем режиме поясняется на рис. 3.18. В таком режиме модулирующим является переменное магнитное поле, а измеряемым – постоянное магнитное поле. Для постоянного магнитного поля сердечник дважды за период выходит из режима насыщения (участки 1-2 и 3-4, рис. 3.18).

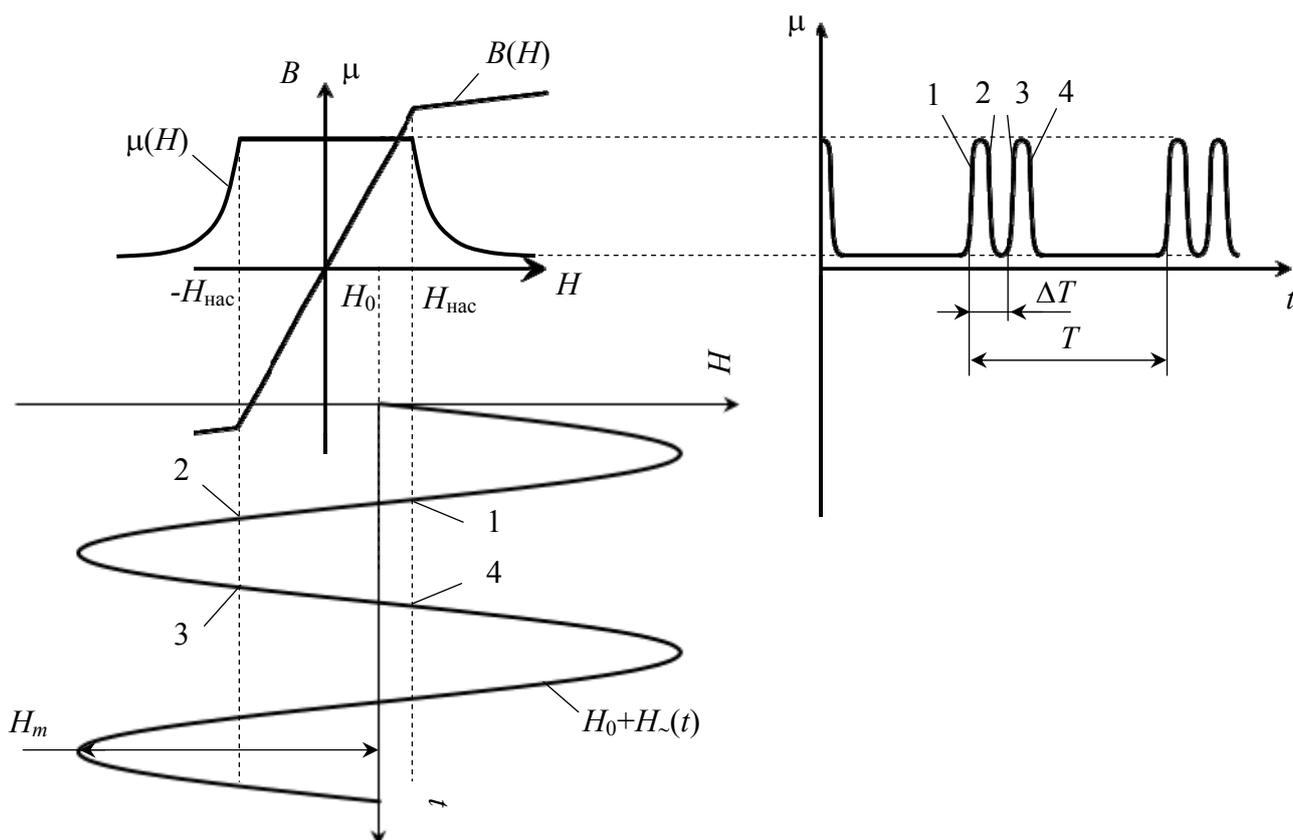


Рис. 3.18. Графики зависимостей при одновременном намагничивании ферромагнетика в постоянном и переменном полях (третий режим:  $H_m > H_{\text{нас}} + H_0$ ,  $H_0 \ll H_m$ )

Зависимость  $\mu(t)$  так же, как и в предыдущем режиме, представляет собой последовательность импульсов, но на каждый период переменного магнитного поля  $T$  приходится два импульса зависимости  $\mu(t)$ . При условии  $H_0 \ll H_m$  ширина импульсов практически не зависит от напряженности постоянного магнитного поля, а информационной характеристикой является интервал время между соседними импульсами  $\Delta T$ . При отсутствии постоянного магнитного поля  $H_0 = 0$ :

$$\Delta T = \frac{T}{2}.$$

При  $H_0 \neq 0$  меняется расстояние между соседними импульсами. Для определения знака постоянного магнитного поля сравниваются фазы зависимостей  $\mu(t)$  и  $H(t)$ .

### **3.4.3. Практическое применение магнитной модуляции в измерительной технике**

В измерительной технике магнитомодуляционные преобразователи применяются для измерения параметров постоянных магнитных полей (феррозонды), для преобразования постоянного тока в переменный с уменьшением или увеличением абсолютного значения тока. Первые устройства называются измерительными трансформаторами постоянного тока, вторые – магнитными усилителями.

Рассмотрим примеры построения магнитомодуляционных преобразователей.

#### ***Измерительные трансформаторы постоянного тока***

Применяются для измерения больших постоянных токов, а также или токов и напряжений в высоковольтных цепях постоянного тока.

Схема построения измерительного трансформатора постоянного тока представлена на рис. 3.19 [5]. Преобразователь состоит из двух одинаковых замкнутых ферромагнитных сердечников из магнитомягкого материала, форма петли магнитного гистерезиса которых близка к идеальной прямоугольной. Первичная обмотка трансформатора представляет собой шину, по которой течет большой ток  $I_1$ . Будем считать, что число витков первичной обмотки  $w_1=1$ .

Вторичные обмотки размещены на ферромагнитных сердечниках, имеют одинаковое количество витков  $w_2$ , соединены последовательно встречно и подключены к вспомогательному источнику переменного напряжения  $U_2$ . Ток  $i_2$ , протекающий по вторичным обмоткам, выпрямляется с помощью диодного моста и измеряется амперметром. За счет встречного включения вторичных обмоток в каждый момент времени напряженности постоянного и переменного магнитных полей, создаваемых токами  $I_1$  и  $i_2$ , в одном сердечнике складываются, а в другом – вычитаются.

Режим намагничивания сердечников соответствует рассмотренному выше второму режиму. Благодаря большому магнитному потоку, создаваемому током  $I_1$ , сердечники находятся в режиме насыщения и выходят из него, когда напряженность встречного переменного магнитного поля компенсирует напряженность постоянного магнитного поля.

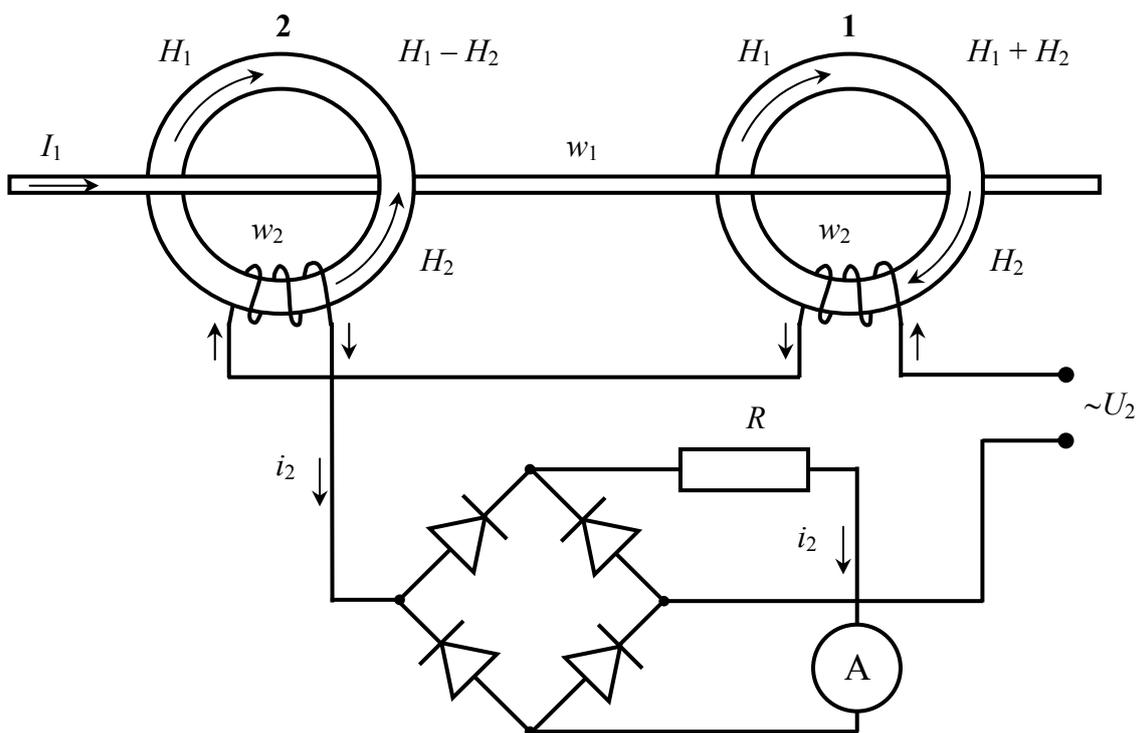


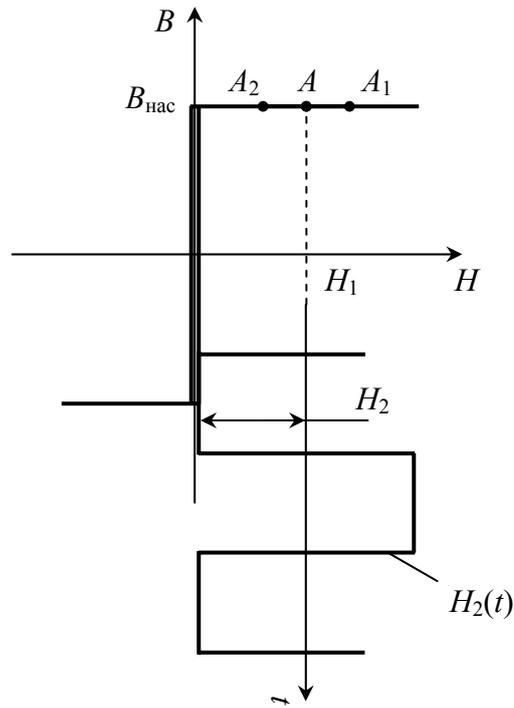
Рис. 3.19. Схема построения измерительного трансформатора постоянного тока

На рис. 3.20 изображена идеализированная прямоугольная кривая намагничивания сердечника. На кривой намагничивания напряженности магнитного поля  $H_1$ , создаваемого током  $I_1$ , соответствует начальная рабочая точка  $A$  на участке насыщения. При увеличении тока  $I_1$  рабочая точка смещается вправо ( $A_1$ ), при уменьшении – влево ( $A_2$ ).

Рассмотрим полпериода тока  $i_2$ , когда в сердечнике 1 напряженности магнитных полей  $H_1$  и  $H_2$ , создаваемых токами  $I_1$  и  $i_2$ , складываются, а в сердечнике 2 – вычитаются. При сложении напряженность магнитного поля в сердечнике 1 увеличивается, а индукция остается неизменной, равной индукции насыщения. При встречном направлении магнитных полей индукция в сердечнике 2 остается неизменной пока  $H_1 < H_2$ . При равенстве напряженностей происходит изменение индукции, и во вторичной обмотке индуцируется ЭДС, встречная приложенному напряжению  $U_2$  и уравнивающая его. При этом должно выполняться условие

$$|H_1 - H_2| \leq H_{\text{нас}}, \quad (3.29)$$

где  $H_{\text{нас}}$  – напряженность магнитного поля, соответствующая переходу сердечника в режим насыщения.



**Рис. 3.20. Кривая намагничивания сердечника  $B(H)$  и зависимость напряженности переменного магнитного поля  $H_2(t)$**

Для идеальной прямоугольной петли гистерезиса ( $H_{\text{нас}} = 0$ ) условие (3.29) имеет вид:

$$H_1 = H_2. \quad (3.30)$$

Напряженность магнитного поля можно выразить через магнитодвижущую силу (МДС):

$$H_1 = \frac{\Theta_1}{l_m} = \frac{w_1 I_1}{l_m}, \quad H_2 = \frac{\Theta_2}{l_m} = \frac{w_2 i_2}{l_m}, \quad (3.31)$$

где  $\Theta_1 = w_1 I_1$ ,  $\Theta_2 = w_2 i_2$  – МДС (ампер-витки) первичной и вторичной обмотки соответственно,  $l_m$  – длина пути прохождения магнитного потока (средней линии сердечника).

С учетом (3.30) и (3.31) для тока во вторичных обмотках получим:

$$i_2 = \frac{w_1}{w_2} I_1. \quad (3.32)$$

В следующий полупериод, вследствие встречного включения обмоток, вычитание напряженностей магнитных полей происходит в сердечнике  $l$ , в обмотке которого индуцируется ЭДС, уравновешивающее приложенное напряже-

ние. Таким образом, ЭДС, индуцируемая в цепи вторичных обмоток, не позволяет току  $i_2$  превысить значение (3.32).

Если допустить, что активные сопротивления вторичных обмоток равны нулю, то ток  $i_2$  независимо от приложенного напряжения  $U_2$  мгновенно возрастает до значения (3.32). При этом кривая вторичного тока имеет прямоугольную форму (рис. 3.20).

За счет соотношения числа витков  $w_1 < w_2$  происходит уменьшение измеряемого тока. Если необходимо увеличить значение тока, то первичную обмотку выполняют с большим числом витков ( $w_1 > w_2$ ). Такие преобразователи называют *магнитными усилителями*.

Форма вторичного тока не зависит от формы, частоты и значения вспомогательного напряжения, если изменение магнитной индукции в сердечниках не превышает удвоенной индукции насыщения:

$$\Delta B < 2B_{\text{нас}}, \quad (3.33)$$

или

$$B_m < B_{\text{нас}},$$

где  $B_m$  – амплитуда переменной индукции магнитного поля, создаваемого током  $i_2$  при отсутствии тока  $I_1$  ( $I_1=0$ ).

Условие выбора значения вспомогательного напряжения:

$$E_c = \frac{w_2 \omega B_m S_m}{\sqrt{2}} \geq U_2,$$

где  $E_c$  – действующее значение ЭДС самоиндукции;  $\omega=2\pi f$  – круговая частота вспомогательного напряжения;  $f$  – частота, Гц;  $S_m$  – площадь поперечного сечения сердечника.

Обычно напряжение  $U_2$  выбирают из условия  $B_m = (0,7 \dots 0,9) B_{\text{нас}}$ . Если условие (3.33) не выполняется, то может произойти повторное насыщение сердечника в нижней части цикла перемагничивания, и оба сердечника окажутся в состоянии насыщения. При этом вторичный ток перестает зависеть от измеряемого первичного тока и ограничивается только сопротивлением вторичных обмоток.

Погрешности измерительных трансформаторов постоянного тока с последовательным соединением вторичных обмоток главным образом обусловлены отличием реальной петли перемагничивания сердечников от идеальной прямоугольной петли и, в меньшей степени, конечным значением сопротивления вторичной цепи преобразователя. Реальная кривая перемагничивания отличается от идеальной наличием гистерезиса и не нулевой напряженности насы-

щения  $H_{\text{нас}} \neq 0$ . При этом условие уравнивания противоЭДС и вспомогательного напряжения соответствует (3.29). Подставим (3.31) в (3.29):

$$|w_2 i_2 - w_1 I_1| \leq H_{\text{нас}} l_{\text{м}}.$$

Решая данное неравенство относительно тока  $i_2$ , получим

$$-\frac{H_{\text{нас}} l_{\text{м}}}{w_2} + \frac{w_1}{w_2} I_1 \leq i_2 \leq \frac{w_1}{w_2} I_1 + \frac{H_{\text{нас}} l_{\text{м}}}{w_2}. \quad (3.34)$$

Условие (3.34) можно переписать в виде:

$$i_2 = \frac{w_1}{w_2} (I_1 \pm \Delta I),$$

где  $\Delta I = \frac{H_{\text{нас}} l_{\text{м}}}{w_1}$  – абсолютная погрешность измерения тока.

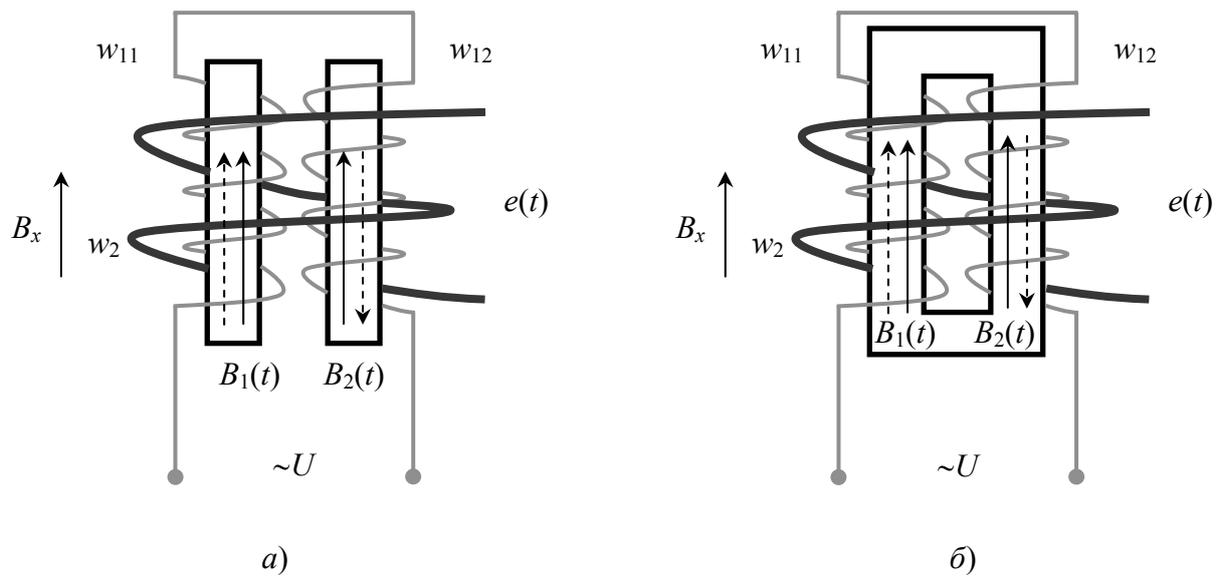
### ***Феррозонды***

Практическое использование варианта магнитомодуляционного измерительного преобразователя, представленного на рис. 3.15, невозможно. Это связано с наличием большой начальной ЭДС измерительной обмотки, наводимой переменным магнитным полем при отсутствии измеряемого постоянного магнитного поля, и относительно малых изменений ЭДС измерительной обмотки, обусловленных действием на ферромагнетик постоянного магнитного поля.

Исключение начальной ЭДС из выходного сигнала измерительной обмотки возможно, в частности, с использованием варианта магнитомодуляционного преобразователя с двумя встречно включенными модулирующими обмотками  $w_1$  и одной сигнальной обмоткой  $w_2$ , показанного на рис. 3.21. Такие преобразователи получили название *феррозонды*. Наибольшее распространение получили феррозонды с продольным возбуждением с разомкнутой (рис. 3.21, а) или замкнутой (рис. 3.21, б) цепью [5].

Возбуждающая обмотка феррозонда имеет две одинаковые секции  $w_{11}$  и  $w_{12}$ , расположенные, соответственно, на левой и правой половинах сердечника. Измерительная обмотка расположена поверх обеих секций возбуждающей обмотки. Относительно внешнего постоянного магнитного поля секции обмотки возбуждения соединены встречно, что обеспечивает при отсутствии постоянного магнитного поля равенство нулю начальной ЭДС измерительной обмотки.

Работа такого преобразователя соответствует режиму 3 намагничивания материала, рассмотренного ранее.



**Рис. 3.21. Схемы построения феррозондов:**  
*a* – с разомкнутой магнитной цепью; *б* – с замкнутой магнитной цепью

Выражение для ЭДС измерительной обмотки можно представить в виде:

$$e = -w_2 \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt} = -w_2 \left( \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} \right) = -w_2 S \left( \frac{dB_1}{dt} - \frac{dB_2}{dt} \right).$$

где  $w_2$  – число витков измерительной обмотки;  $S$  – площадь поперечного сечения сердечника;  $\Phi_{\Sigma}$  – суммарный магнитный поток, проходящий через контур сигнальной обмотки;  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $B_1$ ,  $B_2$  – магнитные потоки и магнитная индукция, соответственно, в левой и правой части сердечника.

На рис. 3.22 показаны графики, поясняющие работу феррозонда. При отсутствии постоянного магнитного поля намагничивание левой и правой половин сердечника носит зеркально симметричный характер. Поэтому сумма магнитных потоков  $\Phi_1(t) + \Phi_2(t)$  в этом случае равна нулю, и, соответственно, ЭДС измерительной обмотки так же равна нулю.

При наличии постоянного магнитного поля ввиду различного направления силовых линий в левой и правой частях сердечника симметрия магнитных полей нарушается. Сумма магнитных потоков  $\Phi_1(t) + \Phi_2(t)$  в этом случае отлична от нуля, что приводит к появлению некомпенсированной ЭДС измерительной обмотки (рис. 3.22).

Из рис. 3.22 видно, суммарный магнитный поток внутри контура сигнальной обмотки меняется с удвоенной частотой, в результате чего в измерительной обмотке возникает ЭДС  $e(t)$  с частотой в два раза больше частоты напряжения питания первичной обмотки. (На рис. 3.22 период  $T_e$  выходной ЭДС в

два раза меньше периода  $T$  изменения напряженности возбуждающего магнитного поля:  $T_e = T/2$ ). Амплитуда выходной ЭДС пропорциональна индукции постоянного магнитного поля  $B_x$ .

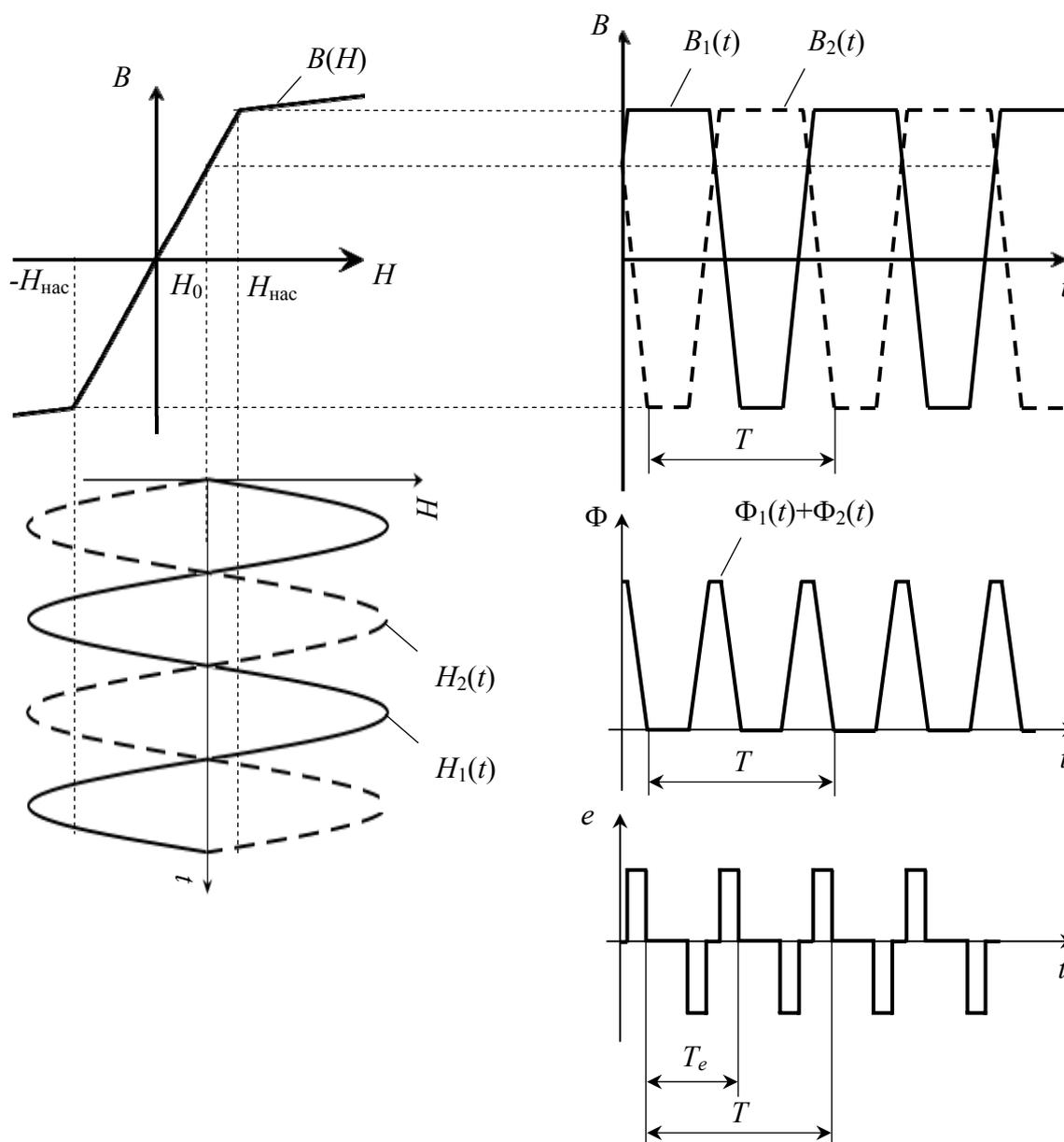


Рис. 3.22. Графики зависимостей, поясняющих работу феррозонда

Основной проблемой при построении высокочувствительных феррозондов является снижение наводок и шума. Для этого применяются хорошо защищенные измерительные цепи, а сами датчики специальным образом симметрируются, чтобы исключить ЭДС взаимной индуктивности между первичной и вторичной обмотками.

Феррозонды – одни из самых чувствительных магнитных преобразовате-

лей. Порог их чувствительности составляет порядка  $10^{-4} \dots 10^{-5}$  А/м ( $10^{-10} \dots 10^{-11}$  Тл). Верхний предел измерения ограничен нарушением линейности функции преобразования и обычно не превышает  $5 \cdot 10^{-4}$  Тл. Для измерения более сильных полей применяется метод уравнивания, при котором феррозонд используется в качестве преобразователя неравновесия.

Основные области использования феррозондов:

- поиск полезных ископаемых;
- обнаружение ферромагнитных объектов;
- изучение пространственно-временной структуры поля Земли и планет;
- ориентирование и определение местоположения различных подвижных объектов в поле Земли;
- контроль качества выпускаемых электротехнических сталей и других материалов и изделий;
- контроль остаточной намагниченности материалов.

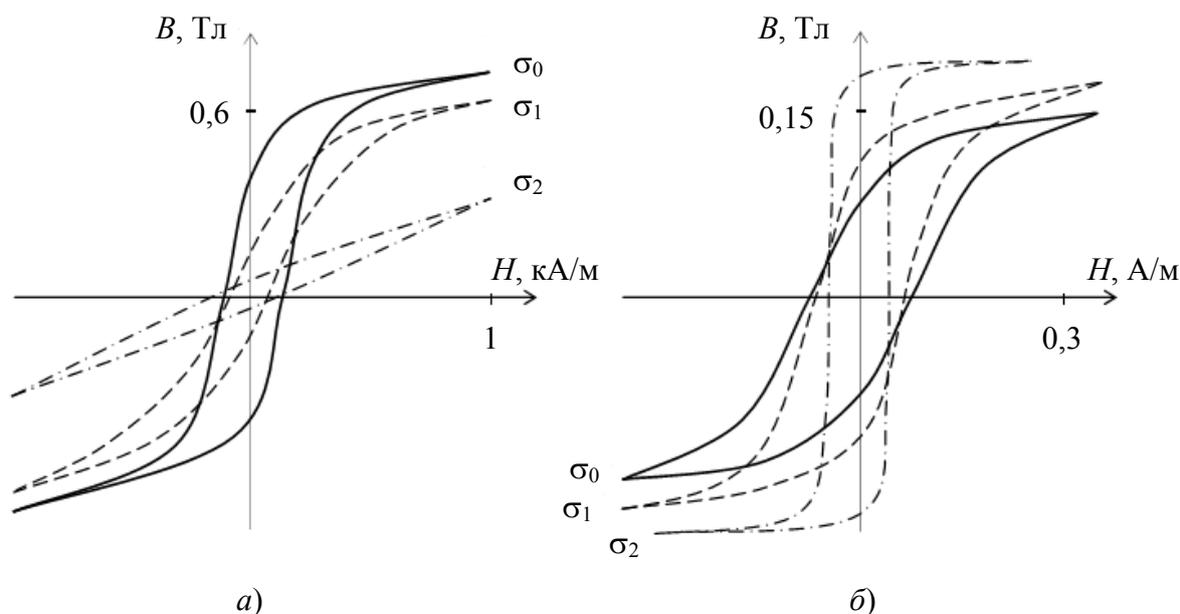
### 3.5. Магнитоупругий эффект

Магнитоупругий эффект заключается в изменении магнитных свойств ферромагнитного материала под действием механических упругих деформаций. Магнитоупругий эффект проявляется в изменении формы и размеров гистерезисной петли перемагничивания ферромагнетика при его деформации.

В качестве примера на рис. 3.23 приведены кривые перемагничивания никеля и пермаллоя для различных механических напряжений растяжения  $\sigma$  [1].

Для никеля с увеличением механического напряжения растяжения наклон петли гистерезиса, а следовательно, и магнитная проницаемость уменьшаются. Кроме того, заметно уменьшается и остаточная индукция. Для пермаллоя с увеличением механического напряжения растяжения кривая гистерезиса приближается к прямоугольной. Остаточная индукция и магнитная проницаемость существенно возрастают. При замене растяжения сжатием приращения магнитных параметров меняют свой знак.

Магнитоупругий эффект объясняется тем, что при действии механических напряжений изменяется доменная структура ферромагнетика – происходит смещение границ доменов и изменение направлений их векторов намагниченности, т.е. те же процессы, что и при намагничивании ферромагнетика. При совпадении направленности упомянутых процессов, происходящих в результате механической деформации и намагничивания, имеет место возрастание магнитной проницаемости, в противном случае – ее уменьшение.



**Рис. 3.23.** Петля магнитного гистерезиса никеля (а) и пермаллоя (б) при механическом напряжении растяжения:  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ,  $\sigma_2 = 5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$

Основной характеристикой материала с точки зрения его магнитоупругих свойств является коэффициент магнитоупругой чувствительности, определяемый как отношение относительного изменения магнитной проницаемости к относительной деформации  $k_\varepsilon$  либо к механическому напряжению  $k_\sigma$ :

$$k_\varepsilon = \frac{\Delta\mu/\mu}{\Delta l/l} = \frac{\Delta\mu/\mu}{\varepsilon_l}, \quad k_\sigma = \frac{\Delta\mu/\mu}{\sigma},$$

где  $\Delta\mu/\mu$  – относительное изменение магнитной проницаемости;  $\varepsilon_l = \Delta l/l$  – относительная продольная деформация ферромагнитного объекта;  $\sigma$  – механическое напряжение в нем.

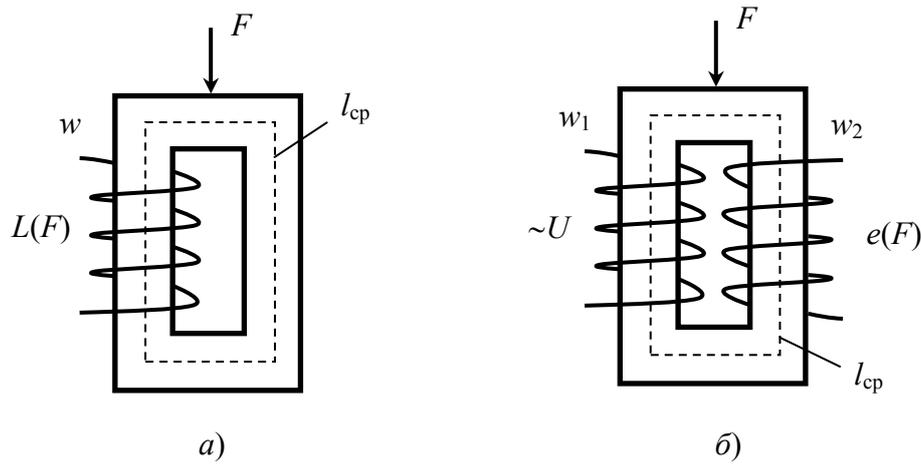
Поскольку деформация и механическое напряжение связаны между собой законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon_l,$$

где  $E$  – модуль Юнга материала, то коэффициенты  $k_\varepsilon$  и  $k_\sigma$  связаны между собой соотношением

$$k_\varepsilon = Ek_\sigma.$$

Для преобразования изменений магнитной проницаемости материала под действием деформации в электрический сигнал используются индуктивный или взаимоиндуктивный способ преобразования (рис. 3.24).



**Рис. 3.24. Способы преобразования изменений магнитной проницаемости материала под действием деформации в электрический сигнал:**  
*a* – индуктивный; *б* – взаимноиндуктивный

В первом случае преобразователь представляет собой катушку с замкнутым магнитопроводом постоянного сечения (рис. 3.24, *a*). Индуктивность такой катушки определяется выражением

$$L = w^2 G_m = w^2 \frac{\mu S}{l_{cp}} = w^2 \frac{\mu_r \mu_0 S}{l_{cp}},$$

где  $w$  – число витков обмотки,  $S$  – площадь поперечного сечения магнитопровода,  $l_{cp}$  – длина средней силовой линии,  $\mu$ ,  $\mu_r$  – соответственно абсолютная и относительная магнитная проницаемость материала магнитопровода.

При деформации магнитопровода под действием силы  $F$  происходит не только изменение магнитной проницаемости ферромагнетика в результате проявления магнитоупругого эффекта, но и изменение его геометрических размеров. В общем случае изменение индуктивности можно определить дифференцированием:

$$\Delta L = \frac{dL}{d\mu} \Delta\mu + \frac{dL}{dS} \Delta S + \frac{dL}{dl_{cp}} \Delta l_{cp} = L \left( \frac{\Delta\mu}{\mu} + \frac{\Delta S}{S} - \frac{\Delta l_{cp}}{l_{cp}} \right),$$

где  $\Delta S$  – изменение площади поперечного сечения магнитопровода;  $\Delta l_{cp}$  – изменение длины средней силовой линии;  $\Delta\mu$  – изменение магнитной проницаемости материала магнитопровода.

Для ферромагнитных материалов с сильным проявлением магнитоупругого эффекта можно принять, что

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \gg \frac{\Delta l_{cp}}{l_{cp}}, \quad \frac{\Delta\mu}{\mu} \gg \frac{\Delta S}{S}.$$

С учетом этого изменение индуктивности равно

$$\Delta L \approx L \frac{\Delta \mu}{\mu} = L k_{\varepsilon} \varepsilon_l = L k_{\sigma} \sigma.$$

Для взаимоиндуктивного способа преобразования (рис. 3.24, б) ЭДС измерительной обмотки определяется следующим образом:

$$e = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

В случае питания обмотки возбуждения переменным током с частотой  $f$  магнитный поток в сердечнике также будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой, при этом для ЭДС можно записать

$$e = w_2 \Phi_m 2\pi f \sin 2\pi f t, \quad (3.35)$$

где  $\Phi_m$  – амплитудное значение магнитного потока, определяемое в соответствии с законом Ома для магнитной цепи:

$$\Phi_m = w_1 i_1 G_m = w_1 i_1 \frac{\mu S}{l_{cp}}, \quad (3.36)$$

где  $i_1$  – амплитуда переменного тока в первой обмотке.

С учетом (3.35) и (3.36) амплитуда наводимой в измерительной обмотке ЭДС равна:

$$e_m = 2\pi f w_1 w_2 i_1 \frac{\mu S}{l_{cp}}.$$

Изменение магнитной проницаемости под действием механических напряжений или деформаций  $\Delta \mu = \mu k_{\varepsilon} \varepsilon_l = \mu k_{\sigma} \sigma$  приведет к изменению амплитуды индуцируемой ЭДС:

$$\Delta e_m = 2\pi f w_1 w_2 i_1 \frac{\mu S}{l_{cp}} k_{\varepsilon} \varepsilon_l = 2\pi f w_1 w_2 i_1 \frac{\mu S}{l_{cp}} k_{\sigma} \sigma.$$

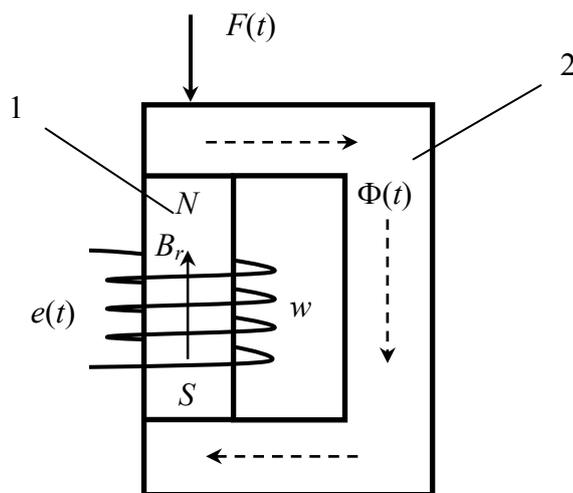
Рассмотренные способы преобразования могут быть использованы для измерения больших сил, давлений, механических напряжений и деформаций.

Для измерения переменных усилий может быть использована зависимость остаточной индукции в материале от механических деформаций в нем. Пример способа реализации такого измерительного преобразования показан на рис. 3.25.

На предварительно намагниченном стержне  $1$  из магнитотвердого материала (постоянном магните) размещена обмотка. Для усиления магнитного потока магнитная цепь преобразователя замыкается по магнитопроводу  $2$ , выполненному из магнитомягкого материала. При этом через замкнутый контур обмотки проходит постоянный магнитный поток:

$$\Phi = B_r S_M,$$

где  $B_r$  – остаточная индукция в материале;  $S_M$  – площадь поперечного сечения намагниченного стержня (постоянного магнита).



**Рис. 3.25. Способ преобразования изменения остаточной индукции в материале под действием деформации в электрический сигнал:**

$1$  – постоянный магнит;  $2$  – магнитопровод

Если магнитная индукция в стержне не меняется во времени, то ЭДС в обмотке индуцироваться не будет:

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -wS \frac{dB_r}{dt} = 0.$$

Под действием силы сжатия или растяжения остаточная индукция  $B_r$  постоянного магнита будет меняться во времени в соответствии с законом изменения усилия  $F(t)$ , действующего на постоянный магнит. Изменение магнитного потока, проходящего через контур обмотки, индуцирует в ней ЭДС:

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -wS_M \frac{dB_r(t)}{dt} = wS_M \frac{dB_r}{dF} \frac{dF(t)}{dt}.$$

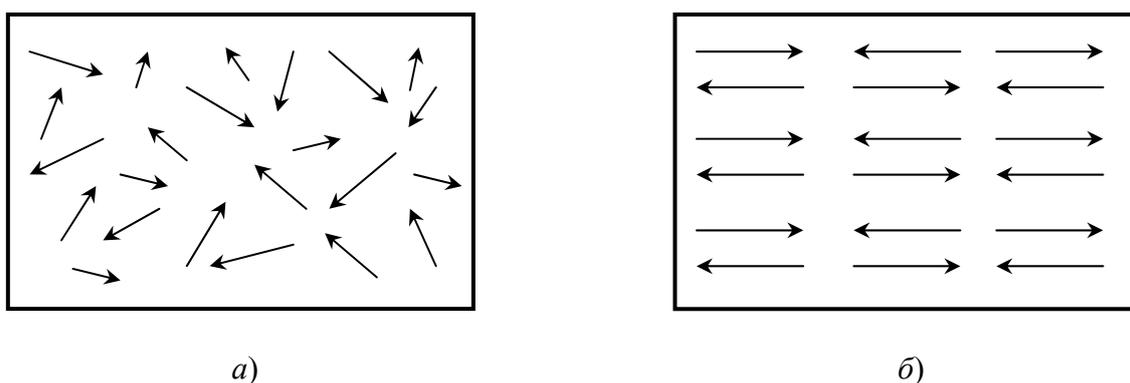
Такой способ реализации измерительного преобразования может быть использован только для измерения быстроменяющихся величин, например, для измерения параметров вибрации.

### 3.6. Пьезомагнитный и магнитострикционный эффекты

При рассмотрении физики магнитоупругого эффекта было отмечено, что под действием механических напряжений происходят те же процессы, что и при намагничивании ферромагнетика: смещаются границы доменов и изменяется направление их векторов намагниченности. Следовательно, под действием механических напряжений возможна спонтанная намагниченность материала, т.е. возникновение собственного магнитного поля при отсутствии внешнего намагничивающего источника.

Эффект возникновения в веществе намагниченности под действием механического напряжения называется *пьезомагнитным* эффектом.

Пьезомагнетизм может существовать только в материалах с особой доменной структурой, называемых *антиферромагнетиками*. Антиферромагнетики – это вещества, в которых магнитные моменты атомов взаимодействуют так, что стремятся выстроиться антипараллельно друг другу, поэтому имеет место их взаимная компенсация. Магнитная восприимчивость антиферромагнетиков мала и составляет  $\chi = 10^{-5} \dots 10^{-3}$ . В некоторой степени свойства антиферромагнетиков схожи со свойствами парамагнетиков. Пара- и антиферромагнитные вещества объединяют положительная магнитная восприимчивость и компенсация магнитных моментов атомов. Различие заключается в том, что спиновые моменты парамагнетиков ориентированы хаотически, а антиферромагнетиков – параллельно друг другу (рис. 3.26).



**Рис. 3.26. Ферромагнитная структура:**  
*a* – парамагнетика; *б* – антиферромагнетика

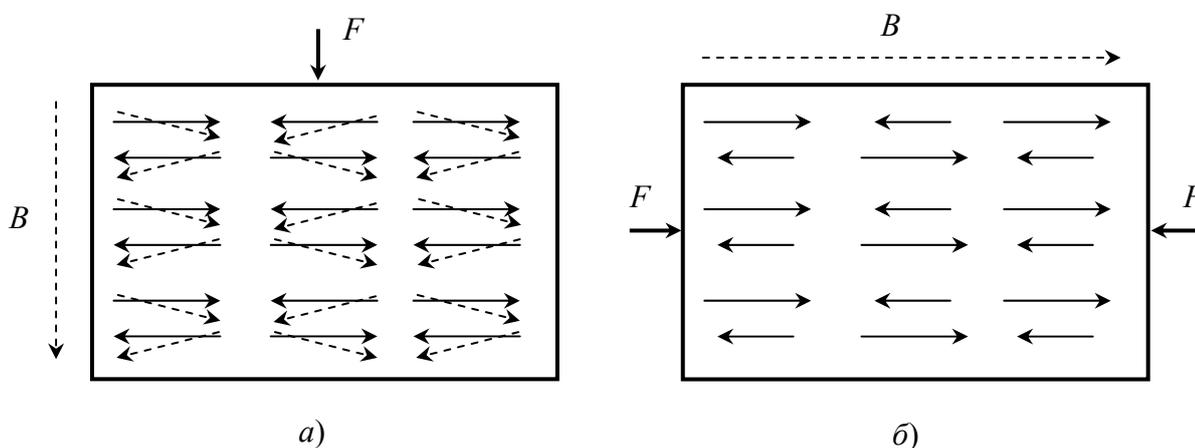
По мере повышения температуры магнитная восприимчивость антиферромагнетика растет, достигая максимума при некоторой температуре, и далее начинает уменьшаться. При этом антиферромагнетик теряет свои особые свойства и становится парамагнетиком. Температура  $T_n$ , при которой происходит

фазовый переход из антиферромагнитного в парамагнитное состояние, называется *температурой Нееля (точка Нееля)*.

К антиферромагнетикам относятся редкоземельные металлы (Ce, Pr, Nd, Sm и Eu), а также хром, марганец, многие окислы, хлориды, сульфиды, карбонаты переходных элементов на основе марганца, железа, кобальта, никеля, хрома и др.

За создание антиферромагнитного порядка и определенную ориентацию магнитных моментов ионов относительно осей ответственны два рода сил: за порядок – силы обменного взаимодействия (электрической природы), за ориентацию – силы анизотропии. В антиферромагнетизме обменные силы стремятся установить каждую пару соседних моментов строго антипараллельно. А направление магнитных моментов называется *осью легкого намагничивания* и определяется силами анизотропии.

Пьезомагнетизм возникает, когда под действием механических напряжений симметрия магнитной структуры антиферромагнитного кристалла изменяется таким образом, что в нем появляется слабый ферромагнетизм (рис. 3.27). Это возможно в результате нестрогой антипараллельности векторов намагниченности подрешеток антиферромагнетика (поперечный слабый ферромагнетизм, рис. 3.27, а) или в результате неравенства величин намагниченности двух антипараллельных подрешеток антиферромагнетика (продольный ферромагнетизм, рис. 3.28, б).



**Рис. 3.27. Физика проявления пьезомагнитного эффекта:**  
 а – поперечный ферромагнетизм; б – продольный ферромагнетизм

Пьезомагнитный эффект проявляется слабо и пока еще не имеет практического применения при построении измерительных устройств. Однако изучение физических свойств антиферромагнетиков играет большую роль в современном развитии физики магнитных явлений, особенно в теории фазовых переходов, и исследований свойств одно- и двухмерных магнитных структур.

Пьезомагнитный эффект является обратимым. Обратный пьезомагнитный эффект называется *магнитострикционным эффектом* и заключается в механической деформации ферромагнетиков под действием магнитного поля. В отличие от пьезомагнитного эффекта, возможного только в антиферромагнетиках, магнитострикционный эффект проявляется в любых ферромагнитных материалах.

Физическая природа магнитострикционного эффекта объясняется наличием при намагничивании ферромагнетиков процессов смещения границ между доменами и переориентации магнитных моментов доменов в направлении поля, что приводит к изменению энергетического состояния кристаллической решетки и проявляется в изменении равновесных расстояний между ее узлами. В результате атомы смещаются, происходит деформация решетки. Относительное удлинение образцов из некоторых ферромагнетиков (Fe, Ni, Co, Gd, Tb, Dy, их сплавов) достигает порядка  $10^{-5} \dots 10^{-2}$ .

Магнитострикционный эффект в измерительной технике применяется для преобразования энергии магнитного поля в механическую (звуковую или ультразвуковую) энергию. Обычно магнитострикционные преобразователи работают на собственной частоте механических колебаний, так как на ней наиболее эффективно преобразование энергии из одной формы в другую.

Преобразователи, основанные на магнитострикционном эффекте, применяются в ультразвуковой дефектоскопии в качестве широкополосных датчиков колебаний, в акустоэлектронике – в качестве фильтров и резонаторов.

### **3.7. Пьезоэлектрический эффект**

#### **3.7.1. Физические основы пьезоэлектрического эффекта**

Пьезоэлектрический эффект заключается в образовании электрических зарядов на гранях (поляризации) кристаллического диэлектрика под действием механических напряжений или деформаций. Это *прямой* пьезоэффект. Существует также *обратный* пьезоэффект, заключающийся в деформации пьезоэлектрического кристалла в электрическом поле.

Пьезоэффект обладает знакочувствительностью, т.е. происходит изменение знака заряда при замене сжатия растяжением и смена знака деформации при изменении направления электрического поля.

Пьезоэлектрическими свойствами обладают только ионные кристаллы, у которых отсутствует центр симметрии в кристаллической решетке. Такие вещества называют пьезоэлектриками. К естественным пьезоэлектрикам относятся кварц, ниобат лития, турмалин, сегнетова соль. Из них наибольшее распространение и применение получил кварц (химическая формула  $\text{SiO}_2$ ), обладающий наряду с пьезоэлектрическими высокостабильными механическими свойствами.

Рассмотрим физику проявления пьезоэффекта на примере кристаллической решетки кварца [5]. Элементарная ячейка кристаллической решетки кварца представляет собой шестигранник, в узлах которого находятся ионы кремния  $\text{Si}^{4+}$  или кислорода  $\text{O}_2^{2-}$  (рис. 3.28).

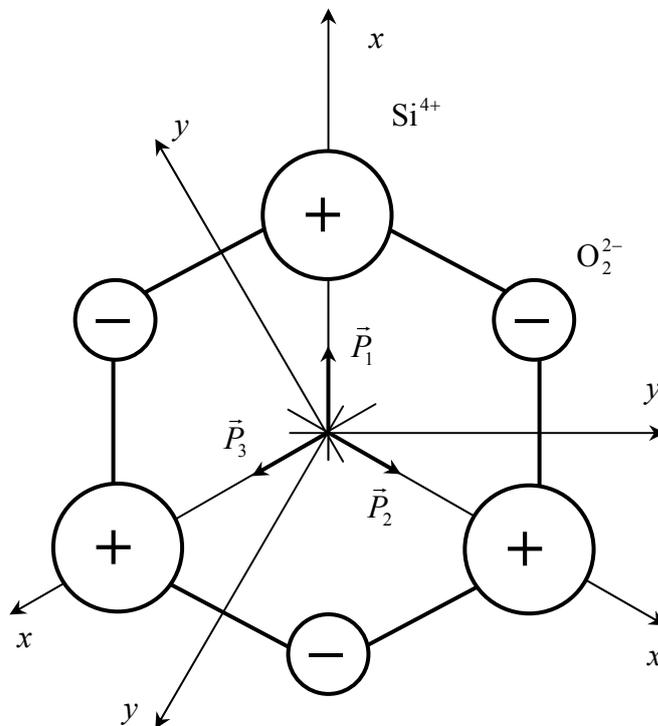


Рис. 3.28. Элементарная ячейка кристаллической решетки кварца  $\text{SiO}_2$

В данной ячейке можно выделить три направления:

1. Оси  $x$ , соединяющие два разнополярных иона, и проходящие через центр ячейки. Каждая из пар упомянутых разноименных зарядов образует электрический диполь, характеризуемый соответствующим дипольным моментом или вектором поляризации:  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  (направлены в сторону положительно заряженного иона). Оси  $x$  называются *электрическими осями*, угол между ними равен  $120^\circ$ .

В недеформированном состоянии суммарный вектор поляризации элементарной ячейки кристаллической решетки кварца равен нулю:

$$\vec{P}_\Sigma = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 0,$$

поэтому ячейка кварца в недеформированном состоянии остается электрически нейтральной.

2. Оси  $y$ , направленные перпендикулярно к граням решетки и проходящие через центр ячейки. Оси  $y$  называются *механическими осями*, угол между ними составляет  $120^\circ$ . Угол между осями  $x$  и  $y$  равен  $90^\circ$ .

3. Ось  $z$ , проходящая через центр ячейки перпендикулярно осям  $x$  и  $y$  таким образом, чтобы система координат  $Oxyz$  была правой (в данном случае ось  $z$  направлена в плоскость рисунка). Ось  $z$  называют *оптической осью*.

Рассмотрим различные случаи деформации кварцевого пьезокристалла.

### **Деформация растяжения-сжатия вдоль оси $x$**

При приложении силы  $F$  равномерно распределенной по грани, перпендикулярной оси  $x$ , по оси  $x$  кристаллическая решетка деформируется (рис. 3.29). При этом оси  $x$  разворачиваются относительно первоначального положения, принимая положение  $x'$ . За счет разворота векторов поляризации  $\vec{P}_2$  и  $\vec{P}_3$  сумма их проекций на ось  $x$  становится меньше (при сжатии) или больше (при растяжении) вектора  $\vec{P}_1$ . Определим сумму проекций векторов поляризации на оси  $x$  и  $y$  (рис. 3.30):

$$P_x^F = P_{1x}^F - (P_{2x}^F + P_{3x}^F) > 0,$$

$$P_y^F = P_{2y}^F - P_{3y}^F = 0.$$

Таким образом, при деформации растяжения-сжатия вдоль оси  $x$  нарушается электрическая нейтральность кристаллической решетки. При этом суммарный вектор поляризации  $\vec{P}_\Sigma^F$  элементарной ячейки кристаллической решетки направлен вдоль оси  $x$ , и на гранях, перпендикулярных этой оси, образуются поляризационные заряды (рис. 3.29).

Величина поляризационного заряда характеризуется его поверхностной плотностью:

$$\delta_x = d_{xx} \sigma_{xx},$$

где  $\sigma_{xx}$  – механическое напряжение растяжения-сжатия кристалла кварца вдоль оси  $x$ ;  $d_{xx}$  – пьезоэлектрический модуль – константа материала, характеризующая его свойства вдоль выбранного направления.

Процесс образования зарядов на гранях, перпендикулярных действию силы, называется прямым продольным пьезоэффектом.

Определим суммарный заряд, индуцируемый на гранях пьезокристалла:

$$q = \delta_x S_x = d_{xx} \sigma_{xx} S_x = d_{xx} \frac{F}{S_x} S_x = d_{xx} F, \quad (3.37)$$

где  $S_x$  – площадь поверхности грани пьезоэлемента, перпендикулярной оси  $x$ .

Из (3.37) следует, что при прямом продольном пьезоэффекте величина поляризованного заряда зависит только от приложенной силы и не зависит от размеров пьезоэлемента.

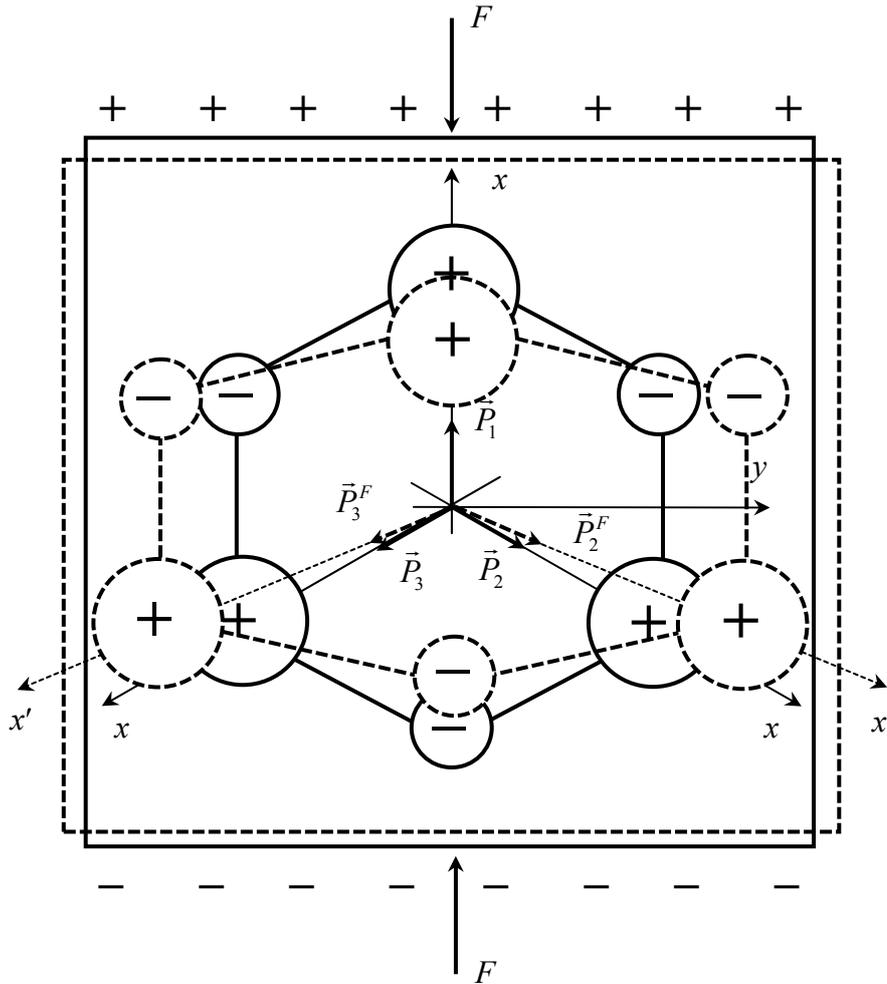


Рис. 3.29. Деформация кристаллической решетки кварца (сила приложена по оси  $x$ )

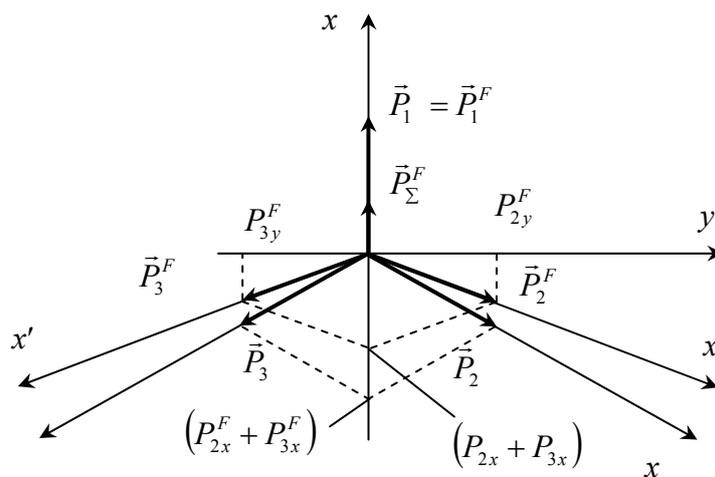


Рис. 3.30. К определению суммарного вектора поляризации элементарной ячейки кристаллической решетки кварца (сила приложена по оси  $x$ )

При замене растяжения сжатием сумма проекций векторов поляризации  $\vec{P}_2$  и  $\vec{P}_3$  на оси  $x$  увеличивается, и направление суммарного вектора поляризации  $\vec{P}_\Sigma^F$  изменяется на противоположное (меняется полярность зарядов на гранях).

### *Деформация растяжения-сжатия вдоль оси $y$*

На рис. 3.31 показана деформация кристаллической решетки кварца при приложении силы  $F$  равномерно распределенной по грани, перпендикулярной оси  $y$ . Аналогично случаю деформации растяжения-сжатия вдоль оси  $x$  за счет разворота векторов поляризации  $\vec{P}_2$  и  $\vec{P}_3$  изменяется сумма их проекций на ось  $x$ . Определим сумму проекций векторов поляризации на оси  $x$  и  $y$  (рис. 3.32):

$$P_x^F = P_{1x}^F - (P_{2x}^F + P_{3x}^F) < 0,$$

$$P_y^F = P_{2y}^F - P_{3y}^F = 0.$$

Таким образом, при деформации растяжения-сжатия вдоль оси  $y$  суммарный вектор поляризации  $\vec{P}_\Sigma^F$  элементарной ячейки кристаллической решетки направлен вдоль оси  $x$ , и так же, как и в предыдущем случае деформации, поляризационные заряды образуются на гранях, перпендикулярных оси  $x$ .

Поверхностная плотность поляризационного заряда при этом равна

$$\delta_x = d_{xy} \sigma_{yy},$$

где  $\sigma_{yy}$  – механическое напряжение растяжения-сжатия пьезокристалла вдоль оси  $y$ ;  $d_{xy}$  – пьезоэлектрический модуль, характеризующий свойства кристалла вдоль оси  $y$ .

Процесс образования зарядов на гранях, параллельных линии действия силы называется прямым поперечным пьезоэффектом. В отличие от прямого продольного пьезоэффекта, при прямом поперечном пьезоэффекте величина поляризационного заряда зависит от размеров пьезоэлемента:

$$q = \delta_x S_x = d_{xy} \sigma_{yy} S_x = d_{xy} \frac{F}{S_y} S_x = d_{xy} \frac{a_y a_z}{a_x a_z} F = d_{xy} \frac{a_y}{a_x} F,$$

где  $S_y$  – площадь поверхности грани пьезоэлемента, перпендикулярной оси  $y$ ;  $a_x, a_y, a_z$  – размеры пьезокристалла вдоль соответствующих осей.

При прямом продольном пьезоэффекте при сжатии суммарный вектор поляризации сонаправлен с осью  $x$ . При прямом поперечном пьезоэффекте при сжатии суммарный вектор поляризации направлен встречно оси  $x$ . Следовательно, пьезоэлектрические модули в зависимости от видов и направлений деформации кристалла могут отличаться не только значением, но и знаком.

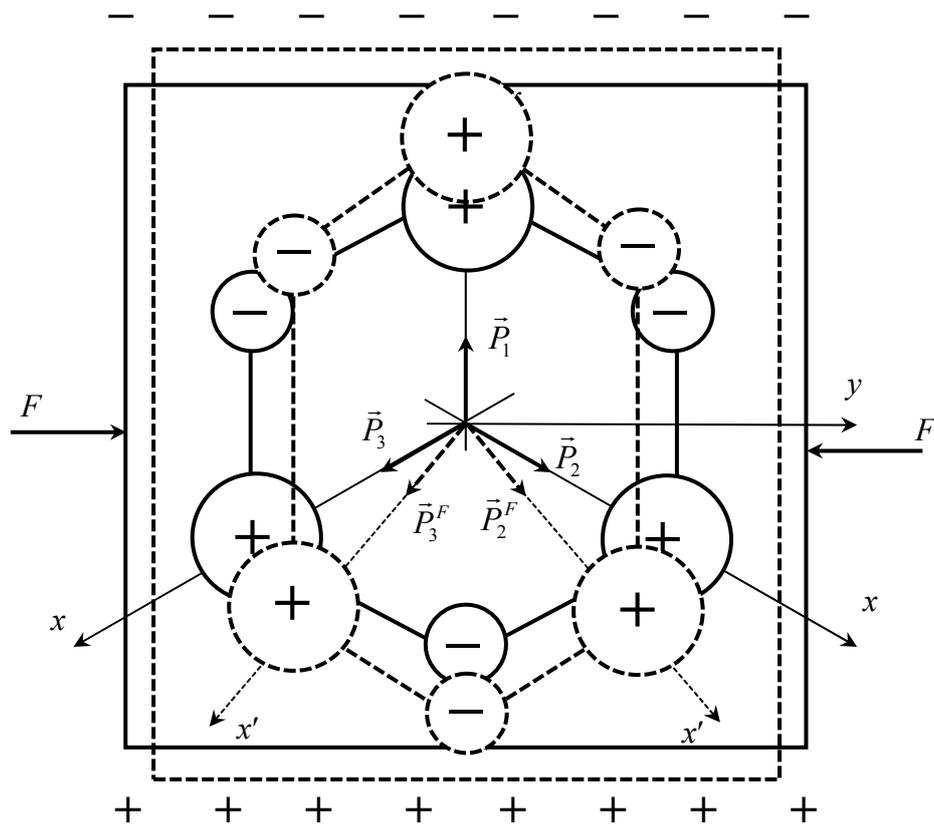


Рис. 3.31. Деформация кристаллической решетки кварца (сила приложена по оси  $y$ )

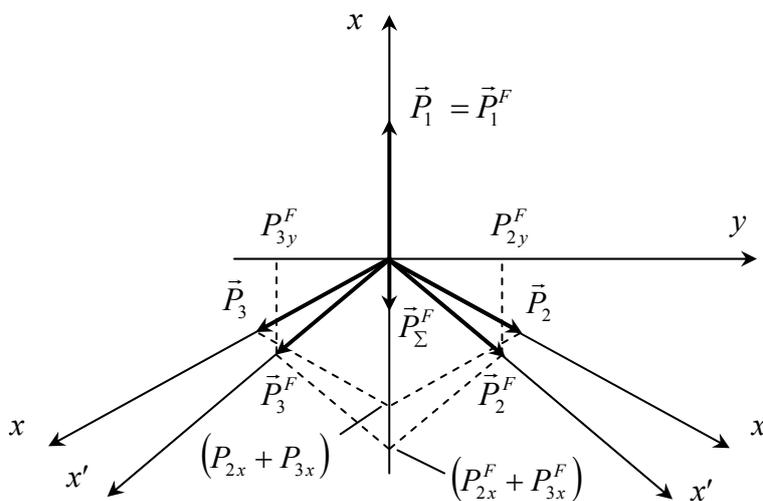


Рис. 3.32. К определению суммарного вектора поляризации элементарной ячейки кристаллической решетки кварца (сила приложена по оси  $y$ )

### Деформация сдвига в плоскости $x$ - $y$

В случае сдвиговой деформации в плоскости  $x$ - $y$  (рис. 3.33) за счет несимметричного разворота векторов поляризации  $\vec{P}_2$  и  $\vec{P}_3$  меняются их проекции как на ось  $x$ , так и на ось  $y$  (рис. 3.34). При этом модуль проекции вектора  $\vec{P}_3$  на

ось  $x$  увеличивается, вектора  $\vec{P}_2$  – уменьшается, а сумма проекций векторов поляризации на ось  $x$  остается равной нулю:

$$P_x^F = P_{1x}^F - (P_{2x}^F + P_{3x}^F) = 0.$$

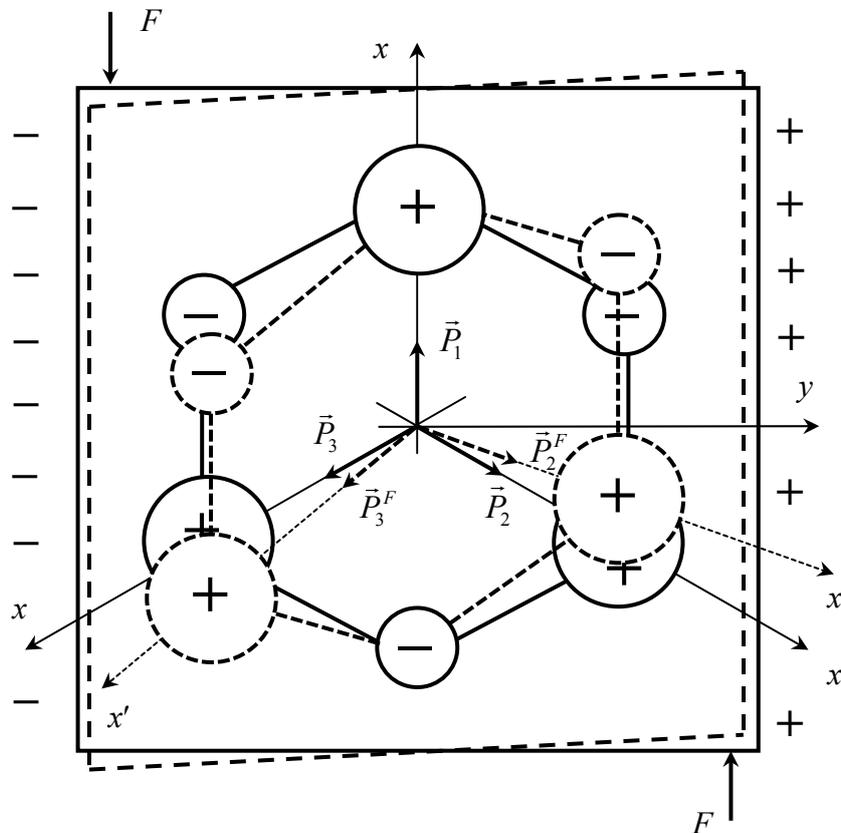


Рис. 3.33. Деформация кристаллической решетки кварца (сдвиг в плоскости  $x$ - $y$ )

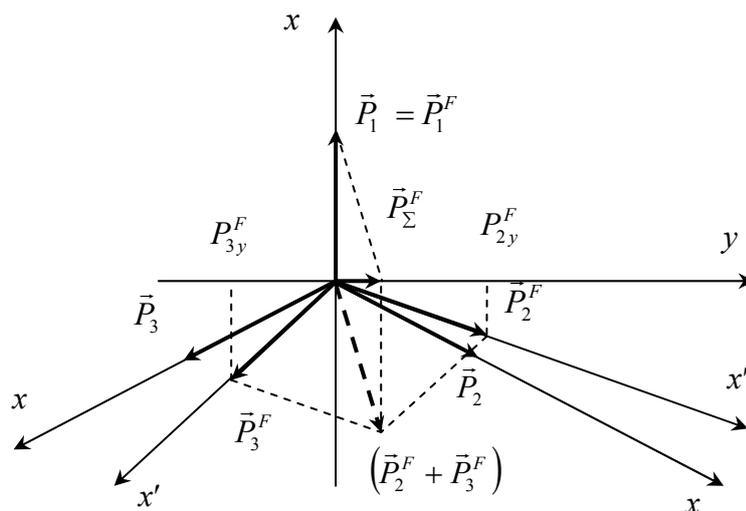


Рис. 3.34. К определению суммарного вектора поляризации элементарной ячейки кристаллической решетки кварца (деформация сдвига в плоскости  $x$ - $y$ )

Проекции векторов  $\vec{P}_2$  и  $\vec{P}_3$  на ось  $y$  имеют разные знаки и при несимметричном развороте при сдвиговой деформации (рис. 3.34) не компенсируют друг друга:

$$P_y^F = P_{2y}^F - P_{3y}^F > 0.$$

Таким образом, при сдвиговой деформации пьезокристалла в плоскости  $x$ - $y$  суммарный вектор поляризации  $\vec{P}_\Sigma^F$  элементарной ячейки кристаллической решетки направлен вдоль оси  $y$ , и, соответственно, поляризационные заряды образуются на гранях, перпендикулярных оси  $y$  (рис. 3.34).

Поверхностная плотность поляризационного заряда при этом равна

$$\delta_y = d_{yxy} \sigma_{xy},$$

где  $\sigma_{xy}$  – сдвиговое механическое напряжение пьезокристалла в плоскости  $x$ - $y$ ;  $d_{yxy}$  – пьезоэлектрический модуль, характеризующий свойства кристалла при сдвиговой деформации в плоскости  $x$ - $y$ .

### ***Деформация растяжения-сжатия вдоль оси $z$***

При приложении силы вдоль оптической оси  $z$ , перпендикулярной плоскости кристаллической решетки, деформации кристаллической решетки не происходит. Элементарная ячейка кристаллической решетки остается электрически нейтральной, и зарядов на гранях не образуется.

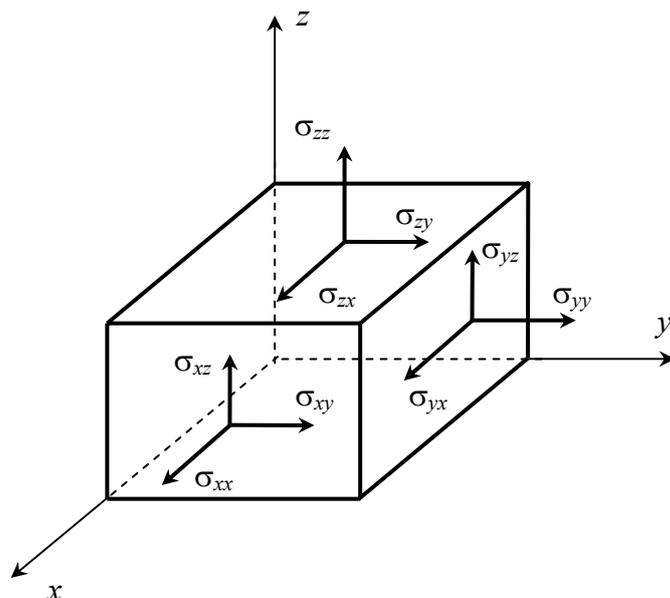
Таким образом, при деформации кристалла кварца вдоль оси  $z$  никаких пьезоэффектов не наблюдается.

Аналогично пьезоэффект в кварцевых кристаллах не проявляется при гидростатическом сжатии (равномерном нагружении кристалла со всех сторон) или температурном нагреве (тепловом линейном расширении).

### **3.7.2. Основные характеристики пьезоматериалов**

Рассмотрение физической природы пьезоэффекта показывает, что при наличии механических напряжений в материале заряды принципиально могут возникать между тремя парами граней.

В общем случае в любой среде можно выделить девять компонент механических напряжений (рис. 3.35): три механических напряжения растяжения-сжатия ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) и шесть сдвиговых механических напряжений ( $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$ ). Однако независимых компонент механических напряжений только шесть, так как сдвиговые напряжения – парные:  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ .



**Рис. 3.35. Компоненты механических напряжений твердого тела**

Таким образом, любая из шести компонент механических напряжений может вызвать образование зарядов на любых из трех пар граней пьезоэлемента (плотности зарядов:  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ ).

Коэффициент пропорциональности между механическим напряжением в материале и плотностью поляризационных зарядов называется пьезоэлектрическим модулем. При этом следует помнить, что кристаллические материалы характеризуются анизотропией своих свойств, т.е. свойства кристалла как механические, так и электрические, различны в различных направлениях. Поэтому в зависимости от вида механического напряжения и выбранной пары граней кристалла, на которых образуется заряд, пьезоэлектрические модули могут быть различными.

Таким образом, пьезоэлектрические свойства материала характеризуются не одним коэффициентом, а их набором, называемым *тензором*, или *матрицей коэффициентов*. Для определенного типа материала тензор является постоянной величиной.

Для удобства математической записи тензорных зависимостей буквенные индексы в обозначениях заменяют числовыми, при этом устанавливается следующее соответствие:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_1, \sigma_{yy} = \sigma_2, \sigma_{zz} = \sigma_3, \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \sigma_4, \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_5, \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_6, \\ \delta_x &= \delta_1, \delta_y = \delta_2, \delta_z = \delta_3. \end{aligned}$$

Таким образом, тензор пьезоэлектрических модулей в общем случае представляет собой матрицу размером (3×6) с 18 коэффициентами:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 \delta_i \setminus \sigma_j & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\
 \hline
 \delta_1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\
 \delta_2 & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\
 \delta_3 & d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36}
 \end{array} \quad (3.38)$$

С помощью данной матрицы можно рассчитать плотность зарядов на всех парах граней пьезоэлемента при любых механических напряжениях:

$$\delta_i = d_{ij} \sigma_j, \quad i = 1 \dots 3, j = 1 \dots 6. \quad (3.39)$$

При сложных видах механических напряжений плотность заряда по каждому из направлений определяется следующим образом:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^6 d_{ij} \sigma_j, \quad i = 1 \dots 3. \quad (3.40)$$

Формулы (3.38)–(3.40) представлены в общем виде и справедливы для любых типов пьезоэлементов. В реальных кристаллических структурах в силу симметрии количество ненулевых коэффициентов тензора значительно меньше максимально возможного, например, тензор пьезоэлектрических модулей для кварца имеет вид [5]:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 \delta_i \setminus \sigma_j & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\
 \hline
 \delta_1 & d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\
 \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\
 \delta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

где  $d_{11} = -2,31 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н,  $d_{14} = -0,67 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н.

Из данного тензора видно, что усилие, приложенное вдоль электрической оси вызывает прямой продольный пьезоэффект. Усилие, приложенное вдоль механической оси, – прямой поперечный пьезоэффект с противоположным знаком. В направлении оптической оси пьезоэффект отсутствует.

Наличие механических напряжений в материале вызывает деформацию. Следовательно, пьезоэффект может быть описан при помощи зависимости

плотности зарядов от деформации пьезоэлемента. Прямой пьезоэффект по отношению к деформации описывается следующей тензорной зависимостью:

$$[\delta_i] = [e_{ij}] \times [\varepsilon_j],$$

где  $[e_{ij}]$  – матрица коэффициентов, называемых пьезоэлектрическими константами, размером (3×6);  $[\varepsilon_j]$  – вектор деформаций.

Прямой пьезоэффект для кварца может быть описан с помощью следующей матрицы [5]:

$\delta_i \setminus \varepsilon_j$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$
$\delta_1$	$e_{11}$	$-e_{11}$	$0$	$e_{14}$	$0$	$0$
$\delta_2$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-e_{14}$	$0$
$\delta_3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-2e_{11}$

где  $e_{11} = -0,0403$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{14} = -0,171$  Кл/м<sup>2</sup>.

Деформация и механическое напряжение в материале связаны между собой законом Гука. Для анизотропного материала закон Гука также описывается тензорной зависимостью

$$[\sigma_i] = [C_{ij}] \times [\varepsilon_j],$$

или

$$[\varepsilon_i] = [S_{ij}] \times [\sigma_j],$$

$\varepsilon_i$  – относительная деформация, соответствующая механическому напряжению  $\sigma_i$  ( $i = 1 \dots 6$ ), ей оси;  $[C_{ji}]$  - матрица модулей упругости;  $[S_{ij}]$  - матрица коэффициентов податливости.

Матрица коэффициентов податливости и модулей упругости имеют размер (6×6) (содержат 36 коэффициентов) и являются взаимно обратными:

$$[C_{ij}] = [S_{ij}]^{-1}.$$

Обратный пьезоэлектрический эффект описывается уравнением

$$[\sigma_j] = [e_{ij}] \times [E_i],$$

или по отношению к деформации

$$[\varepsilon_j] = [d_{ij}] \times [E_i],$$

где  $E_i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) – напряженность электрического поля вдоль соответствующей оси.

Тензорные зависимости, описывающие обратный пьезоэффект для кристаллического кварца, имеют вид

$\sigma_j \setminus E_j$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\varepsilon_j \setminus E_i$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	
$\sigma_1$	$e_{11}$	$0$	$0$	$\varepsilon_1$	$d_{11}$	$0$	$0$	
$\sigma_2$	$-e_{11}$	$0$	$0$	$\varepsilon_2$	$-d_{11}$	$0$	$0$	
$\sigma_3$	$0$	$0$	$0$	$\varepsilon_3$	$0$	$0$	$0$	(3.41)
$\sigma_4$	$e_{14}$	$0$	$0$	$\varepsilon_4$	$d_{14}$	$0$	$0$	
$\sigma_5$	$0$	$-e_{14}$	$0$	$\varepsilon_5$	$0$	$-d_{14}$	$0$	
$\sigma_6$	$0$	$-2e_{11}$	$0$	$\varepsilon_6$	$0$	$-2d_{11}$	$0$	

Из данных зависимостей видно, что электрическое поле, приложенное вдоль оси  $x$ , вызывает растяжение элемента вдоль этой оси, сжатие его вдоль оси  $y$  и сдвиг в плоскости  $z$ - $y$ . Поле, приложенное вдоль оси  $y$ , вызывает сдвиговые деформации в плоскостях  $z$ - $x$  и  $x$ - $y$ . При наличии электрического поля по оси  $z$  деформации пьезокристалла элемента не возникает.

### 3.7.3. Срезы кристаллов

Наличие анизотропии и полярных направлений в пьезоэлектриках определяет важность выбора ориентации граней пьезопластины относительно осей кристаллической решетки (кристаллографических осей). Выбирая ориентацию граней пьезоэлектрика относительно кристаллографических осей кристаллической решетки, можно изменять его пьезоэлектрические свойства. Такой способ задания свойств пьезоэлемента называют *выбором среза кристалла*.

За счет выбора среза кристалла при создании пьезоэлектрического измерительного преобразователя можно обеспечить избирательные свойства материала, т.е. обеспечить приоритетность в направлении преобразования.

Пусть у нас имеется кристалл кварца (рис. 3.36), ребра которого совпадают с кристаллографическими осями. Для обеспечения приоритетности преобразования необходимо сделать так, чтобы при приложении электрического поля  $E_1$  вдоль оси  $x$  наиболее существенной была бы деформация  $\Delta l$  вдоль оси  $y$ , а остальные деформации были бы значительно меньше или отсутствовали совсем.

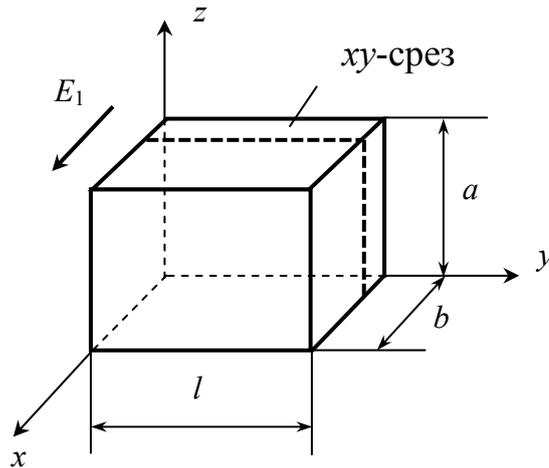


Рис. 3.36. Кристалл кварца (xy – срез)

В соответствии с (3.41) электрическое поле, приложенное вдоль оси  $x$ , приведет к деформациям растяжения-сжатия вдоль осей  $x$  и  $y$  и сдвиговой деформации в плоскости  $z$ - $y$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} = d_{11}E_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta l}{l} = -d_{11}E_1, \quad \varepsilon_4 = \frac{\Delta l}{a} = d_{14}E_1, \quad (3.42)$$

где  $\Delta l$ ,  $\Delta b$  – абсолютные деформации пьезоэлемента в направлении оси  $y$  и  $x$  соответственно.

Выразим из (3.42) абсолютные деформации:

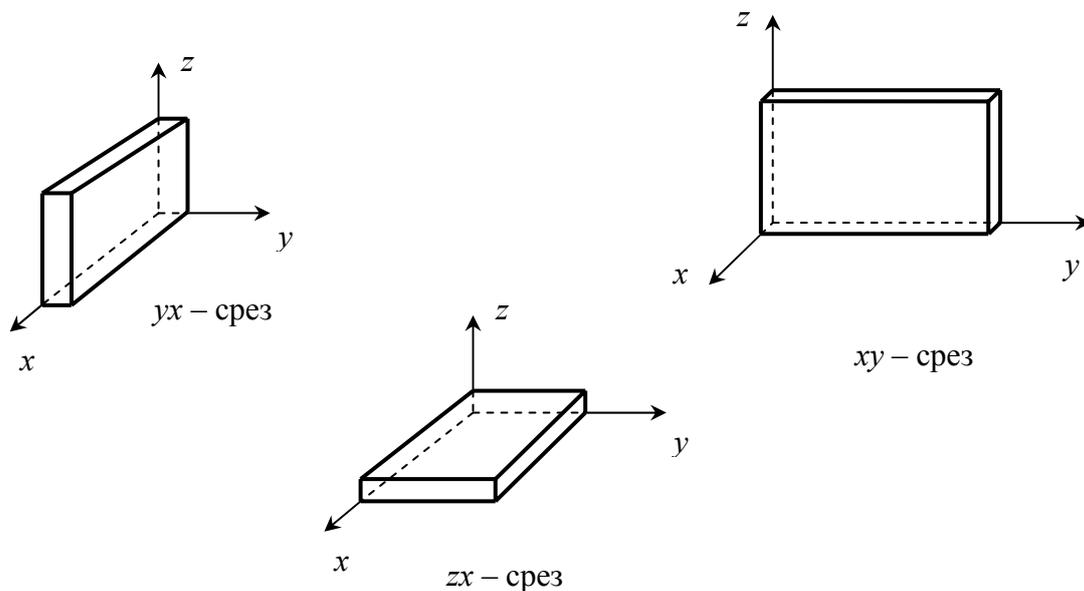
$$\begin{aligned} \Delta b &= \varepsilon_1 b = b d_{11} E_1, \\ \Delta l &= \varepsilon_2 l + \varepsilon_4 a = (-d_{11} l + d_{14} a) E_1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Из (3.43) следует, что для выполнения условия  $|\Delta l| \gg |\Delta b|$  необходимо, чтобы размер  $b$  пьезоэлемента был как можно меньше. То есть пьезоэлемент должен иметь форму тонкой пластины, направление наименьшей грани которой совпадает с электрической осью  $x$  кристаллической решетки кварца.

Срезы кристалла обозначаются следующим образом: на первом месте ставится название оси, вдоль которой расположена толщина пластины (наименьший размер), затем следует название оси, вдоль которой расположена длина пластины. Пьезоэлемент на рис. 3.36 обозначается как  $xy$  – срез.

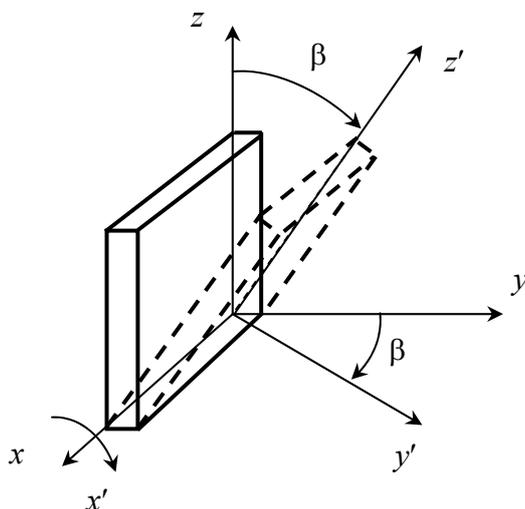
Форма матриц и значения пьезоэлектрических констант и модулей кварца, приведенные в п. 3.7.2, определены относительно осей координат, совпадающих с кристаллографическими осями. Это значит, что ребра пьезоэлемента должны быть ориентированы по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Примеры таких срезов приведены

на рис. 3.37. Для них механические напряжения, действующие на грани, совпадают по направлениям с кристаллографическими осями.



**Рис. 3.37. Срезы кристаллов с ориентацией граней пьезоэлементов по кристаллографическим осям**

Пьезоэлемент может быть изготовлен таким образом, что его собственные оси будут развернуты по отношению к осям кристаллической решетки (рис. 3.38). Такой метод называется *получением поворотных срезов*.



**Рис. 3.38. Получение одноповоротного среза**

Так как направление электрического поля определяется обкладками, нанесенными на гранях пьезоэлемента, следовательно это направление совпадает ребрами пьезоэлемента, т.е. его собственными осями  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Механические на-

пряжения в этом случае также действуют вдоль осей  $x', y', z'$ , и измерение деформаций пьезоэлемента осуществляется относительно его собственных осей. Для такого пьезоэлемента тензор пьезоэлектрических модулей должен быть преобразован к системе координат  $O x' y' z'$ .

За счет получения поворотных срезов происходит проецирование всех пьезоэлектрических констант и модулей на вновь выбранные направления, при этом число ненулевых коэффициентов тензора обычно возрастает.

Поворотные срезы обозначаются следующим образом: на первом месте располагается название оси, вдоль которой расположена толщина пластины, на втором месте – название оси, вдоль которой расположена длина пластины, затем ставится размер, вокруг которого осуществляется поворот, а через дробь – угол поворота.

Представленный на рис. 3.38 срез называется *одноповоротным* и обозначается:  $yx l/\beta$  – срез. Возможно создание двух или трех поворотных срезов.

Выбором среза пластин можно корректировать чувствительность пьезоэлемента к определенным видам механических напряжений, а также к внешним влияющим факторам. Например, влияние температуры на пьезомодули в значительной степени зависит от среза пластин. Срезы, параметры которых мало зависят от температуры, используются при создании прецизионных измерительных преобразователей физических величин. Срезы, сильно зависящие от температуры, используются при создании преобразователей температуры.

#### **3.7.4. Материалы пьезоэлементов**

Материалы пьезоэлементов подразделяются на естественные и искусственные. К естественным материалам относятся природные монокристаллы (например, кварц). Естественные материалы обладают наиболее стабильными характеристиками, малыми гистерезисами характеристики, очень малыми остаточными деформациями и очень малыми внутренними трениями. Основными достоинствами кварца, с точки зрения использования его для измерительных преобразований, являются стойкость к воздействиям температуры и влажности, механическая прочность. Кварц имеет незначительный коэффициент расширения, его пьезомодуль мало зависит от температуры в широком диапазоне ее изменения.

Существуют разновидности пьезоэлектрических материалов, обладающие особыми свойствами, – пироэлектрики и сегнетоэлектрики.

*Пироэлектрики* (например кристаллы турмалина) – особая разновидность пьезоэлектрических кристаллов имеющих несколько взаимно неуравновешенных полярных направлений. Поэтому пироэлектрики могут поляризо-

ваться, например, под воздействием гидростатического давления или температурном нагреве.

*Сегнетоэлектрики* входят в группу пьезоэлектриков и отличаются от них тем, что кристалл состоит из доменов, которые представляют собой упорядоченную структуру со своим полярным направлением. К сегнетоэлектрикам относятся титанат бария, цирконат свинца, сегнетова соль.

Сегнетоэлектрики служат основой для получения искусственных пьезоэлектрических материалов – пьезокерамики. При получении пьезокерамики сегнетоэлектрики дробятся до дисперсионного состояния так, что каждая частица фактически представляет собой отдельный домен. После этого в порошок добавляются определенные связующие компоненты, и полученная масса спекается в различных формах. Пьезоэлектрические свойства пьезокерамика приобретает после поляризации в сильном электрическом поле в процессе медленного нагрева и охлаждения.

Достоинством пьезокерамики является высокий коэффициент преобразования (относительно большие значения пьезомодулей). Пьезокерамика позволяет изготавливать элементы сложных форм, к тому же пьезокерамика дешевле, чем естественные кристаллические элементы. Недостатками пьезокерамики являются нелинейность коэффициента преобразования (зависимость его значения от значения преобразуемой величины) и худшие, по сравнению с кварцем, механические свойства (наличие остаточных деформаций, гистерезис, зависимость механических свойств от температуры).

Весьма перспективными пьезоэлектрическими материалами являются также пьезоэлектрические поливинилиденфторидные пленки (PVDF-пленки) – полукристаллический полимер, представляющий собой слоистую структуру с аморфными зонами. Из PVDF-пленок можно получать структуры произвольной формы и соединять их обычными клеями.

Пьезоэлектрические пленки обладают уникальными свойствами [4]: широким частотным диапазоном ( $10^{-3} \dots 10^9$  Гц), большим динамическим диапазоном, высокой упругой податливостью и механической прочностью, высоким выходным напряжением (в 10 раз большим, чем у пьезокерамики при одинаковых приложенных силах), высокой электрической прочностью (выдерживают поля до 75 В/мкм, при которых большинство пьезокерамических материалов теряют поляризацию), устойчивостью к влажности, большинству химических реактивов, окислителям, мощному ультрафиолетовому и ядерному излучениям.

Другим преимуществом пьезопленок над пьезокерамикой является их низкий акустический импеданс, который по значению близок к воде, человеческим тканям и другим органическим материалам. Близкие значения импедансов позволяют осуществлять более эффективную передачу акустических сигналов в воде и тканях.

Недостатком пьезоэлектрических пленок является малый температурный диапазон (до 100°C) использования и хранения.

### 3.7.5. Область применения пьезоэлектрического эффекта

Область применения пьезоэлектрического измерительного преобразования весьма обширна. Преобразователи, использующие прямой пьезоэффект, применяются для преобразования в электрический сигнал силы, давления, ускорения. Преобразователи, использующие обратный пьезоэффект, применяются в качестве источников акустических волн, обратных преобразователей в приборах уравнивания. Преобразователи, использующие одновременно прямой и обратный пьезоэффекты – пьезорезонаторы, применяются в качестве узкополосных фильтров электрических сигналов. Пьезорезонаторы на основе кварца благодаря высокой стабильности характеристик последнего используются, в частности, для построения эталонных генераторов и таймеров.

Пьезоэлектрические элементы могут использоваться либо в форме монокристалла, либо в виде многослойной структуры, в которой отдельные пластины соединяются вместе при помощи электродов, размещенных между ними. На рис. 3.39 показан двухслойный пьезоэлектрический элемент, используемый в датчике силы. При приложении к этому элементу внешней силы одна из его частей расширяется, в то время как другая сжимается. Сдвоенные пьезоэлементы могут включаться параллельно (рис. 3.40, а) либо последовательно (рис. 3.40, б). Сопротивление утечки в пьезодатчиках, как правило, является очень большим (порядка  $10^{12} \dots 10^{14}$  Ом).

Это значит, что датчик обладает чрезвычайно высоким выходным сопротивлением. Поэтому для согласования с последующими электронными цепями необходимо использовать специальные интерфейсы, представляющие собой преобразователи заряда (тока) в напряжение или усилители напряжения, имеющие высокие входные сопротивления.

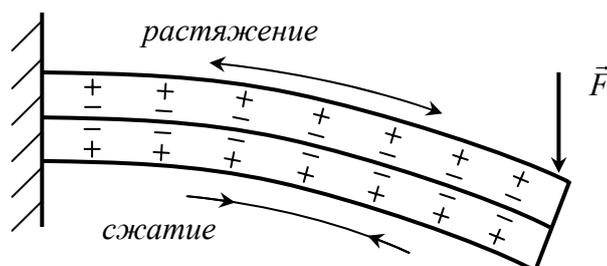
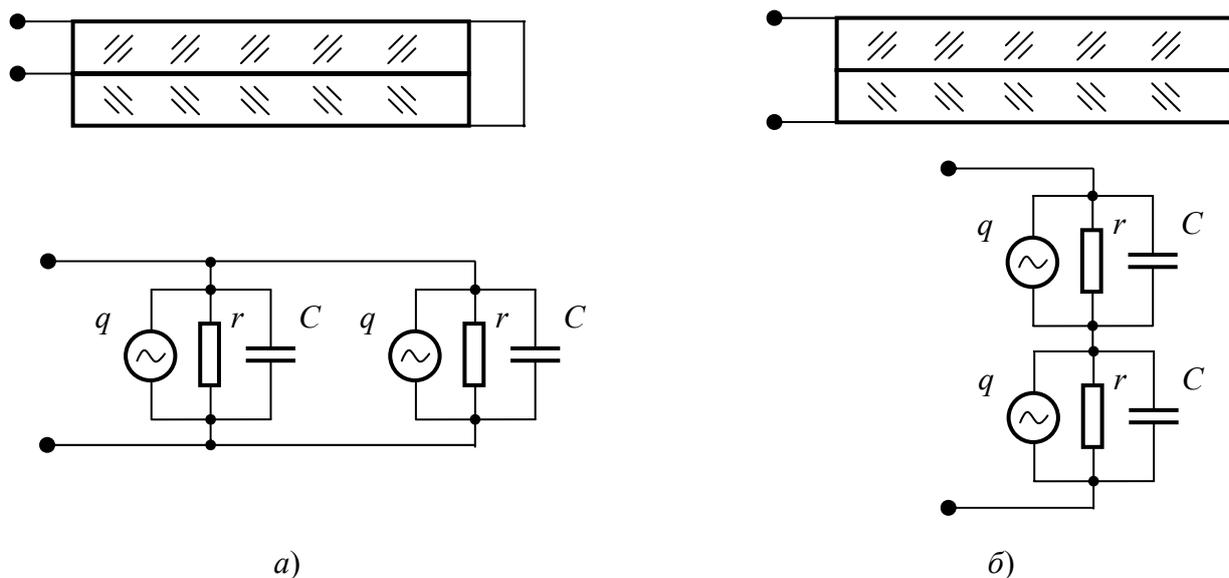


Рис. 3.39. Двухслойный пьезоэлектрический элемент

При приложении усилия кристаллы пьезоэлектрика поляризуются, но электрически заряженными они остаются только сравнительно короткий промежуток времени. Это объясняется тем, что внутри материала содержится достаточное количество свободных носителей зарядов, которые могут передвигаться под действием электрического поля. Эти свободные заряды, приближаясь к соответствующим концам диполей, нейтрализуют их. Поэтому вскоре поляризованный пьезоматериал становится электрически разряженным и удерживается в этом состоянии в течение всего времени, пока находится в стационарных условиях.

Однако, когда в материале меняется механическое напряжение, состояние равновесия нарушается и на поверхности пьезоэлектрика появляется электрический заряд. Если механическое напряжение будет поддерживаться некоторое время, заряды в материале опять нейтрализуются за счет внутренних утечек.

Таким образом, можно сделать вывод, что пьезоэлектрические датчики являются чувствительными только к изменениям прилагаемых усилий, а не к их постоянному уровню, т.е. могут работать только в динамическом режиме.

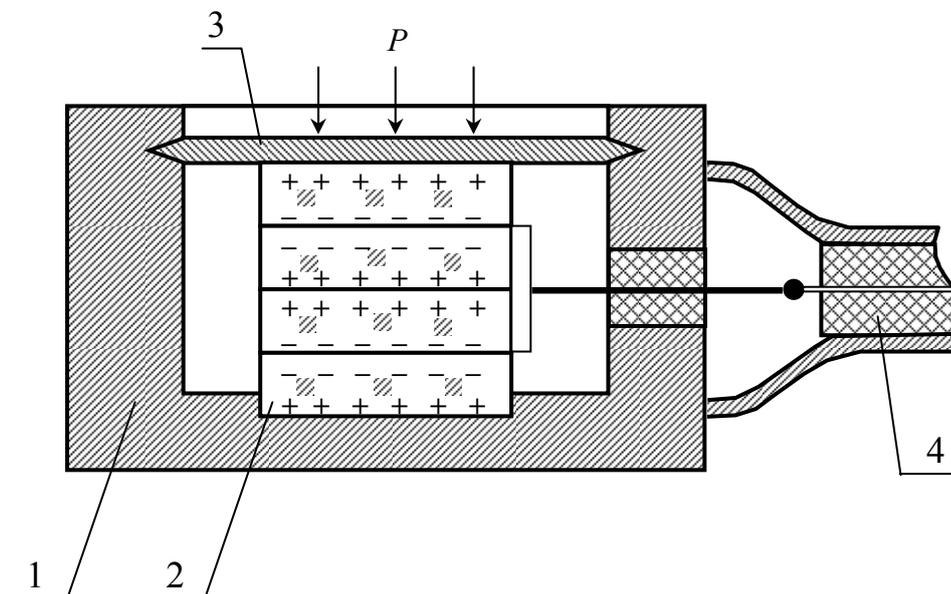


**Рис. 3.40. Параллельное (а) и последовательное (б) соединение пьезоэлектрических элементов и их эквивалентные схемы:**

$q$  – индуцируемый заряд;  $r$  – сопротивление утечки;  $C$  – емкость пьезоэлемента

Работа преобразователя, схема построения которого представлена на рис. 3.39, основана на прямом поперечном пьезоэффекте (направление механических напряжений и возникающего в материале электрического поля взаимно перпендикулярны). Пример преобразователя, использующего прямой продольный пьезоэффект, показан на рис. 3.41. Преобразователь давления представляет собой корпус 1, в котором размещены четыре пьезопластины 2, соединенные

между собой параллельно. С верхним пьезоэлементом жестко закреплена мембрана 3, воспринимающая давление. Съем сигнала и передача его к блоку электроники осуществляется с помощью коаксиального кабеля 4. Представленный преобразователь также может работать только в динамическом режиме.



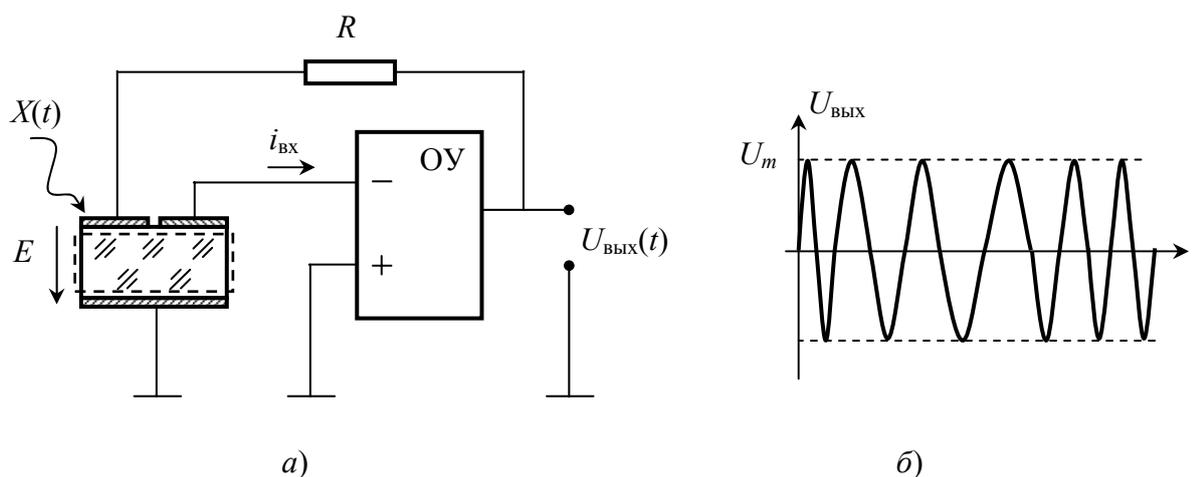
**Рис. 3.41.** Схема построения пьезоэлектрического датчика давления:  
1 – корпус; 2 – пьезоэлементы; 3 – мембрана; 4 – коаксиальный кабель

С помощью пьезоэлектрических преобразователей возможно измерение стационарных или медленно меняющихся величин. Для этого необходимо заставить кристалл совершать вынужденные колебания на своей резонансной частоте. Такие преобразователи называют *пьезорезонансными*. Их работа основывается на одновременном использовании прямого и обратного пьезоэффекта. Чаще всего выходной величиной пьезорезонансных преобразователей является частота переменного напряжения, снимаемого с резонатора. Для создания колебаний в пьезоэлементе, пьезоэлемент включается в цепь положительной обратной связи операционного усилителя (автогенераторная схема, рис. 3.42, а).

Напряжение, поданное на пьезоэлемент с усилителя, вызывает деформацию пьезоэлемента за счёт обратного пьезоэффекта. Эта деформация приводит к появлению зарядов на электродах за счёт прямого пьезоэффекта. Индуцируемые заряды стекают на дифференциальный вход усилителя, образуя ток  $i_{вх}$ , который усиливается усилителем и вновь подаётся на пьезоэлемент. При соблюдении условий баланса фаз и амплитуд колебания пьезоэлемента будут незатухающими, а с выхода усилителя будет сниматься переменное напряжение  $U_{вых}(t)$  с постоянной амплитудой  $U_m$ , частота которого определяется собственной резонансной частотой пьезокристалла (рис. 3.42, б).

Под действием измеряемой величины  $X(t)$  собственная частота колебаний  $\omega$  пьезокристалла меняется, при этом напряжение  $U_{\text{ВЫХ}}(t)$  с усилителя представляет собой сигнал частотной модуляции (рис. 3.42, б), модулирующим сигналом которого является входное воздействие  $X(t)$ :

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_m \sin \left( \int_0^t \omega(X(t)) dt \right).$$



**Рис. 3.42. Физические основы работы пьезорезонансных преобразователей:**

а – схема включения пьезоэлемента с положительной обратной связью;

б – частотно модулированный выходной сигнал

Пьезорезонансные датчики широко используются для измерения различных физических величин: перемещения, силы, давления, ускорения, температуры, влажности, массы, параметров акустических колебаний и др.

Перспективными пьезодатчиками являются датчики на основе полимерных пьезоэлектрических пленок (PVDF-пленок).

Пьезоэлектрические полимеры могут напрямую прикрепляться к тонкопленочным структурам, не мешая их механическому перемещению. Пьезоэлектрические пленки годятся для применения в датчиках деформации, которые должны обладать высокой чувствительностью в широком частотном диапазоне. Низкий акустический импеданс полимеров позволяет изготавливать преобразователи, эффективно передающие энергию в широкой полосе частот воздуху и другим газам.

В отличие от пьезокерамических преобразователей, датчики на основе пьезоэлектрических пленок обладают более широкими динамическим и частотным диапазонами. Широкая полоса частот (практически от 0 до 2 ГГц) и низкая добротность могут быть объяснены мягкостью, присущей полимерам. В передатчиках звуковых сигналов пленочный пьезоэлемент, зафиксированный на двух концах, вибрирует на частоте, определяемой коэффициентом  $d_{31}$ .

Такие датчики нашли широкое применение в ультразвуковой технике, работающей на частотах до 50 кГц. При использовании в ультразвуковых передатчиках (частота более 500 кГц) частота пьезодатчиков определяется коэффициентом  $d_{33}$ .

Пьезоэлектрическая пленка является практически прозрачной в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах и поглощает излучение дальней инфракрасной области спектра (в диапазоне длин волн 7...20 мкм). Этот диапазон соответствует спектру длин волн, излучаемых человеческим телом. PVDF-пленки также обладают пьезоэлектрическими свойствами (см. п. 3.9), т.е. на его поверхности образуется электрический сигнал в ответ на изменение температуры.

Изложенное дает возможность реализации на основе PVDF-пленок датчиков перемещения людей, а также пьезоэлектрических датчиков для более сложных устройств, таких как видеокамеры для ночного наблюдения и лазерные копировальные приборы. В настоящее время созданы инфракрасные матрицы на основе PVDF-пленок, позволяющие идентифицировать отпечатки пальцев, использующие присущий полимерам пьезоэффект.

Датчики на пьезоэлектрических пленках имеют ряд ограничений. Они обладают довольно слабым электромеханическим коэффициентом связи по сравнению с пьезокерамикой, особенно на частоте резонанса и низких частотах. Пленки из сополимеров могут использоваться и храниться при температурах, не превышающих 135°C, а PVDF-пленки рекомендуется использовать при температурах до 100°C. Как только на пленку нанесены электроды, полученный сенсор становится чувствительным к электромагнитному излучению. Для защиты устройств от высокочастотных электромагнитных помех и радиочастотных шумов необходимо применять методы экранирования.

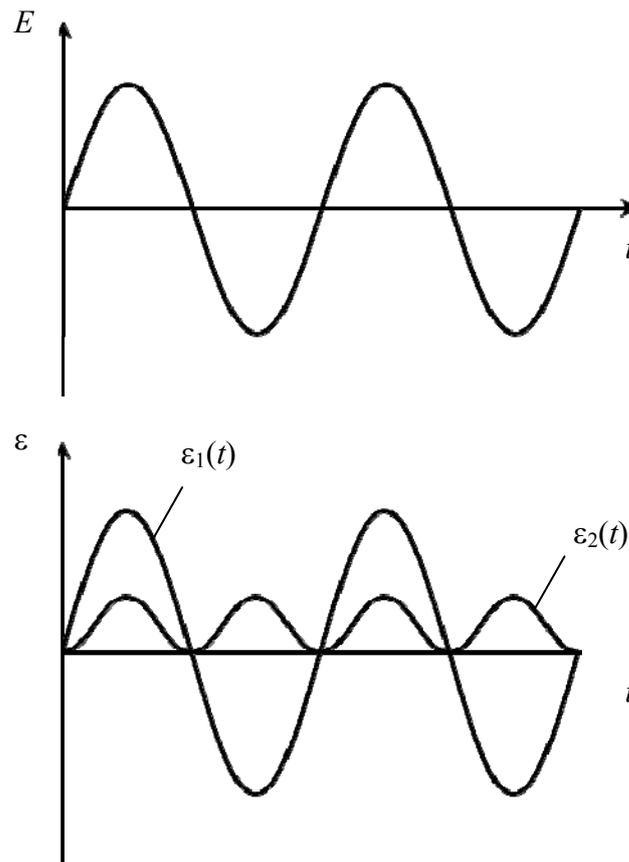
### 3.8. Электрострикция

*Электрострикция* – физическое явление, заключающееся в деформации диэлектрика под действием внешнего электрического поля, пропорционально квадрату напряженности поля. Электрострикция присуща всем твердым и жидким диэлектрикам независимо от их симметрии и структуры.

Физика явления электрострикции близка к физике обратного пьезоэлектрического эффекта и заключается в следующем. Внешнее электрическое поле, взаимодействуя с диполями молекул или ионов диэлектрика, создает деформирующие силы. Под действием поля атомы и молекулы, из которых состоит диэлектрик, смещаются, и в результате возникают электрострикционные деформации.

В отличие от обратного пьезоэлектрического эффекта, который является эффектом линейным (деформация прямо пропорциональна величине поля),

электрострикция – эффект квадратичный. Поэтому в зависимости от направления поля знак пьезоэлектрической деформации меняется, а знак электрострикции (сжимается или растягивается кристалл под действием электрического поля) не меняется и зависит только от материала диэлектрика. В переменном поле в результате электрострикции кристалл колеблется с частотой, удвоенной по сравнению с частотой поля, а в случае пьезоэлектрического эффекта частота поля и деформации совпадают (рис. 3.43).



**Рис. 3.43. Зависимости от времени напряженности электрического поля  $E(t)$  и относительной деформации вследствие обратного пьезоэффекта  $\varepsilon_1(t)$  и электрострикции  $\varepsilon_2(t)$**

Электрострикция имеет место у всех кристаллических диэлектриков, независимо от симметрии, в то время как пьезоэлектрический эффект возможен только в центросимметричных кристаллах.

У большинства диэлектриков электрострикционные деформации чрезвычайно малы. Однако в некоторых сегнетокерамических материалах из-за добавочного вклада в деформацию, обусловленного переориентацией доменов в электрическом поле, электрострикционная деформация может достигать больших значений, соизмеримых с пьезоэлектрической деформацией.

Эффект электрострикции широко применяется в электрострикционных преобразователях, предназначенных для измерения колебаний поверхностей твердых тел. К электрострикционным преобразователям относятся, например, акустические зонды. Электрострикционная сегнетокерамика применяется в исполнительных механизмах для создания точных перемещений.

### 3.9. Пироэлектрический и электрокалорический эффекты

Пироэлектрический эффект близок по своей природе к пьезоэлектрическому эффекту и заключается в поляризации диэлектрика (образовании зарядов на гранях) вследствие его нагрева.

*Пироэлектрики* – это материалы с кристаллической структурой, отличающиеся от пьезоэлектриков тем, что их кристаллическая решетка имеет одно или несколько взаимно неуравновешенных полярных направлений. В дополнение к пироэлектрическим свойствам все эти кристаллы являются пьезоэлектриками, т.е. в них появляются заряды при механическом напряжении. Яркими пироэлектриками являются кристаллы турмалина и сегнетовой соли, цирконат-титанат свинца.

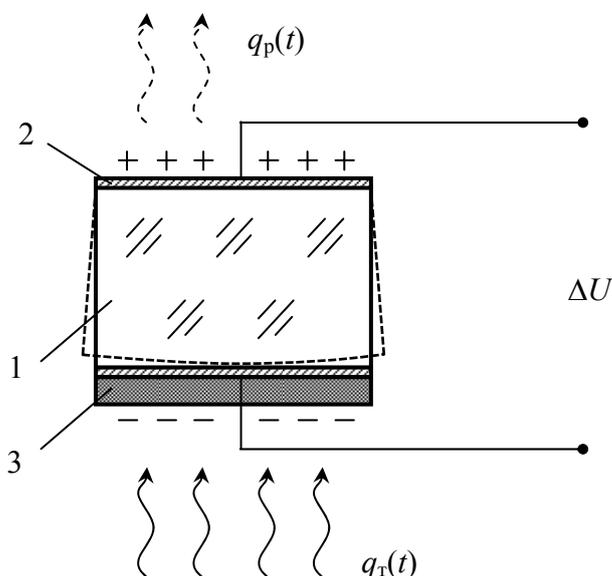
Пироэлектрики можно рассматривать как совокупность упорядоченно расположенных электрических диполей. В общем случае все эти диполи имеют произвольную ориентацию. Изменение температуры вызывает изменение размеров отдельных диполей (удлинение или укорачивание), что приводит к возникновению электрического поля в материале и поляризации диэлектрика. Эти явления получили название *первичного пироэлектричества*. Существует также *вторичное пироэлектричество*, которое в упрощенном виде можно считать следствием пьезоэлектрического эффекта (например, возникновение напряжения в материале из-за теплового расширения).

На рис. 3.44 схематично показана структура пироэлектрического преобразователя, представляющего собой кристалл 1 из пироэлектрического материала, противоположные грани которого имеют электроды 2 для сбора индуцированных теплом электрических зарядов. Электрод, который подвергается воздействию теплового потока  $q_T(t)$ , покрыт теплопоглощающим слоем 3.

Под воздействием потока тепла  $q_T(t)$  (например от источника инфракрасного излучения), температура пироэлектрического кристалла повышается, и он также становится источником тепла, поэтому с противоположной стороны кристалла возникает отток тепла  $q_P(t)$ , как показано на рис. 3.44.

В результате поглощения тепла нижняя часть преобразователя нагревается, что приводит к его расширению и вызывает изгиб элемента (на рис. 3.44 де-

формация схематично показана пунктиром). Появившаяся деформация приводит к возникновению механического напряжения и, следовательно, изменению ориентации диполей. Поскольку кристалл также обладает и пьезоэлектрическими свойствами, его напряженное состояние приводит к появлению на электродах противоположных по знаку зарядов.



**Рис. 3.44. Физические основы работы пироэлектрических преобразователей:**

1 – пироэлектрический кристалл; 2 – электрод; 3 – теплоизолирующий слой

Таким образом, вторичный пироэлектрический эффект можно описать следующей последовательностью:

тепловое излучение → поглощение тепла → механическое напряжение,  
индуцированное теплом → электрический заряд.

Пироэлектрический преобразователь можно представить в виде конденсатора, электрически заряжающегося от потока тепла, причем заряд на гранях пироэлектрика формируется заряд только при динамическом изменении температуры. В стационарных условиях свободные носители зарядов нейтрализуют заряды, возникшие вследствие поляризации, и конденсатор, образованный электродами и пироэлектриком, разряжается.

Пироэлектрический эффект описывается следующим выражением [4]:

$$\delta = p \cdot \Delta\Theta,$$

где  $\delta$  – поверхностная плотность индуцируемого заряда;  $p$  – пироэлектрический коэффициент;  $\Delta\Theta$  – изменение температуры.

Возникающая в результате проявления пироэффекта разность потенциа-

лов  $\Delta U$  на гранях элемента связана с изменением температуры кристалла  $\Delta\Theta$  выражением

$$\Delta U = \frac{Q}{C} = \frac{\delta Sh}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{ph}{\varepsilon\varepsilon_0} \Delta\Theta,$$

где  $Q$  – заряд на гранях элемента;  $C$  – его электрическая емкость;  $h$  – толщина кристалла,  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала элемента.

В пирозлектриках возможно проявление обратного пирозлектрического эффекта, называемого *электрокалорическим эффектом*. Электрокалорический эффект заключается в изменении температуры кристалла при приложении к нему электрического поля.

Электрокалорический эффект описывается выражением

$$\Delta T = qE, \quad (3.44)$$

где  $\Delta T$  – изменение температуры кристалла;  $q$  – электрокалорический коэффициент, определяемый свойствами материала;  $E$  – напряженность электрического поля.

Электрокалорический коэффициент связан с пирозлектрическим коэффициентом соотношением

$$q = -\frac{\rho T}{\rho C_m},$$

где  $\rho$  – плотность кристалла;  $T$  – температура кристалла;  $C_m$  – его теплоёмкость.

Электрокалорический коэффициент у пирозлектриков очень мал, например, для кристалла турмалина электрическое поле  $E \sim 10^5$  В/м приводит к охлаждению или нагреванию (в зависимости от направления поля относительно поля спонтанной поляризации) лишь на  $5 \cdot 10^{-5}$  К. В сегнетоэлектриках этот коэффициент на несколько порядков выше, поэтому изменение температуры может составлять десятые доли и даже единицы градусов, при этом зависимость (3.44)  $\Delta T(E)$  при сильных электрических полях перестаёт быть линейной.

Ввиду слабого проявления электрокалорический эффект не нашел практического применения при построении измерительных устройств.

Преобразователи, использующие пирозлектрический эффект, применяются для измерения теплового потока излучения, теплового сопротивления среды и непосредственно изменения температуры.

Нанесение на пирозлектрик поглощающего покрытия позволяет исполь-

зовать его нагрев для измерения потока электромагнитного излучения и потоков частиц. Таким способом пирозлектрик может быть применен для измерения всех параметров излучения при длинах волн от жесткого электромагнитного до дециметрового диапазона или для воспроизведения пространственного распределения мощности, т. е. получения изображений.

Особенно перспективно применение пирозлектрических приемников в области частот ИК-диапазона. Они практически решают проблему детектирования потоков тепловой энергии малой мощности, измерения формы и мощности коротких ( $10^{-5} \dots 10^{-11}$  с) импульсов лазерного излучения, чувствительного контактного и бесконтактного измерения температуры (чувствительность пирозлектрических термометров достигает  $10^{-6}$  К).

По параметрам воспринятого излучения можно характеризовать источник, т.е. применительно, в частности, к тепловому инфракрасному излучению получать информацию о его температуре или тепловой картине в целом. Приборы такого назначения получили название *пироприемников* и *пирозлектрических преобразователей изображения*. Подобным образом работают приборы для индикации пространственного распределения излучений в системах визуализации ИК-изображений (темновидение) – пирозлектрические видиконы (тепловые передающие телевизионные трубки с пирозлектрической мишенью).

Широкое применение получили пироприемники рентгеновского излучения. Их используют в медицинской радиологии для измерения параметров радиационного излучения. Пироприемники применяются в радиометрии, охранно-пожарных сигнализациях, детектировании лазерного излучения, дистанционном включении исполнительных устройств, охранных системах.

Пирозлектрические преобразователи, определяющие параметры конвективного теплообмена, используются для измерения направлений и скоростей потоков газов и жидкостей.

Использование пирозлектриков для измерения теплового сопротивления среды позволяют не только измерять удельную теплоемкость и теплопроводность твердых, жидких и газообразных тел, но и по этим характеристикам идентифицировать компоненты жидких и газообразных смесей.

На основе пирозлектриков возможно создание устройств для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую. Хотя КПД подобных устройств уступает имеющимся способам преобразования энергии, для некоторых специальных применений данный способ преобразования является конкурентоспособным. Основная предполагаемая сфера применения таких преобразователей – космические аппараты и орбитальные станции.

### 3.10. Тензорезистивный эффект

Тензорезистивный эффект заключается в изменении активного сопротивления проводников и полупроводников при их механической деформации.

Рассмотрим деформацию проводника в виде стержня прямоугольного сечения (рис. 3.45). Сопротивление такого проводника определяется следующим образом:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление материала;  $S = ab$  – площадь сечения проводника;  $l$  – длина проводника;  $a$ ,  $b$  – поперечные размеры.

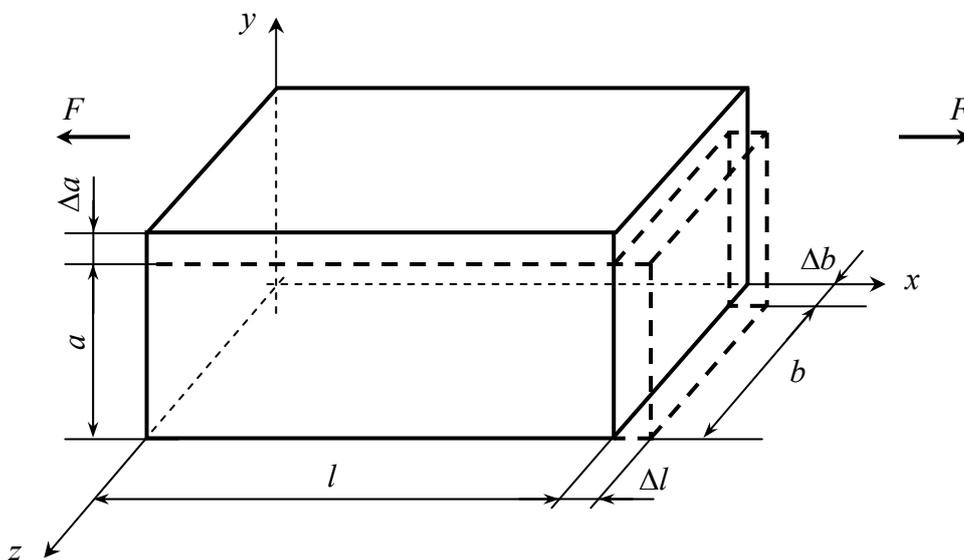


Рис. 3.45. Деформация проводника под действием силы  $F$

Изменение сопротивления в результате деформации можно определить следующим образом:

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial R}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial R}{\partial S} \Delta S = R \left( \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{\Delta S}{S} \right).$$

Относительное изменение сопротивления:

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{\Delta S}{S}. \quad (3.45)$$

Таким образом, изменение сопротивления происходит как из-за физиче-

ских процессов, происходящих на молекулярном уровне в материале проводника или полупроводника ( $\Delta\rho/\rho$ ), так и из-за деформации элемента, приводящей к изменению его конечных размеров ( $\Delta l/l$ ,  $\Delta S/S$ ).

Выразим относительное изменение площади поперечного сечения проводника через изменение линейных размеров:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}. \quad (3.46)$$

В твердом теле в зоне упругих деформаций величины поперечной и продольной деформации связаны через коэффициент Пуассона  $\mu$ :

$$\varepsilon_a = -\mu\varepsilon_l, \quad \varepsilon_b = -\mu\varepsilon_l, \quad (3.47)$$

где  $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$  – продольная деформация;  $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a}$ ,  $\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b}$  – поперечная деформация.

Подставив (3.47) в (3.46) и далее в (3.45), после преобразования получим

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta\rho}{\rho} + (1 + 2\mu)\varepsilon_l. \quad (3.48)$$

Тензорезистивный эффект проявляется как в металлах, так и в полупроводниках.

Удельное сопротивление металла определяется диффузионным оттоком свободных электронов сквозь атомную решетку. Возможность диффузии тем выше, чем больше амплитуда колебаний атомов. С увеличением приложенного к проводнику давления происходит уменьшение объема и, следовательно, уменьшение межатомных расстояний. С уменьшением ячеек атомной решетки при сближении атомов возрастают силы их взаимного притяжения и, следовательно, уменьшаются амплитуды атомных колебаний. При этом вероятность диффузии свободных электронов снижается, поэтому с увеличением давления удельное сопротивление большинства металлов уменьшается.

Упругие свойства металлов не зависят от выбранного направления, поэтому тензоэффект в металлических проводниках определяется только напряжениями растяжения или сжатия и не зависит от сдвиговых напряжений.

На рис. 3.46 представлен тензорезистор, жестко закрепленный на деформируемом упругом элементе. Закон Ома для металлического тензорезистивного элемента можно представить в следующем виде:

$$\frac{E_x}{j_x} = \rho = \rho_0(1 + \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}\sigma_2 + \pi_{13}\sigma_3) = \rho_0(1 + \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}(\sigma_2 + \sigma_3)), \quad (3.49)$$

где  $E_x$  – напряженность электрического поля;  $j_x$  – плотность тока в выбранном направлении;  $\pi_{11}$  – продольный тензорезистивный коэффициент,  $\pi_{12}, \pi_{13}$  – поперечные тензорезистивные коэффициенты;  $\rho, \rho_0$  – удельное сопротивление тензорезистора при наличии и отсутствии деформации соответственно;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – механические напряжения растяжения-сжатия в соответствующем направлении (рис. 3.46).

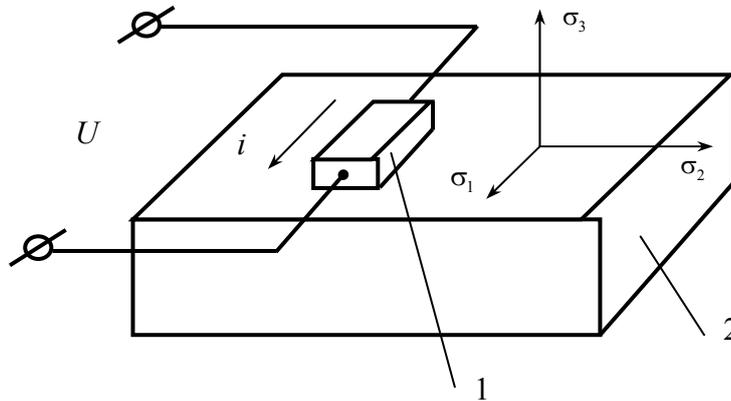


Рис. 3.46. Тензорезистор (1) на упругом элементе (2)

Для металлов все поперечные тензорезистивные коэффициенты между собой равны ( $\pi_{12} = \pi_{13}$ ).

Выражая из (3.49) относительное изменение удельного сопротивления

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

и подставляя его в (3.46), получим

$$\varepsilon_R = \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}(\sigma_2 + \sigma_3) + (1 + 2\mu)\varepsilon_l.$$

При отсутствии или пренебрежимо малых значениях поперечных механических напряжений ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )

$$\varepsilon_R = \pi_{11}\sigma_1 + (1 + 2\mu)\varepsilon_l. \quad (3.50)$$

Механическое напряжение связано с деформацией законом Гука:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_l, \quad (3.51)$$

где  $E$  – модуль упругости материала тензорезистора.

Подставив (3.51) в (3.50), получим

$$\varepsilon_R = (\pi_{11}E + 1 + 2\mu)\varepsilon_l.$$

Отношение относительного изменения сопротивления к относительной деформации называется коэффициентом тензочувствительности:

$$K_T = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_l} = \pi_{11}E + 1 + 2\mu. \quad (3.52)$$

Из полупроводниковых материалов для тензорезисторов используется кремний *p*- и *n*-проводимости.

Проводимость *n*-типа получается добавлением в кремний элементов пятой группы таблицы Менделеева (фосфор, сурьма), проводимость *p*-типа – добавлением элементов третьей группы (галлий, индий). Получаемая структура покрывается защитной пленкой ( $\text{SiO}_2$ ), сквозь которую осуществляется контакт тензорезистора с металлическими выводами [5].

Полупроводниковые материалы (кремний, германий) являются анизотропными. При одновременном воздействии электрического поля и механических напряжений на анизотропный материал каждая из компонент электрического поля  $E_x, E_y, E_z$  является функцией плотностей токов  $j_x, j_y, j_z$ , текущих во всех трех направлениях (рис. 3.47), т.е.

$$E_x = f_x(j_x, j_y, j_z), \quad E_y = f_y(j_x, j_y, j_z), \quad E_z = f_z(j_x, j_y, j_z).$$

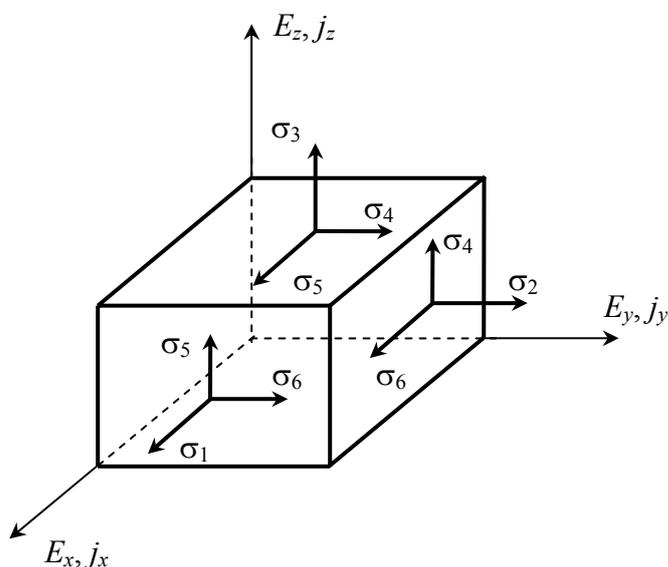


Рис. 3.47. К пояснению физики тензоэффекта в полупроводниках

Поэтому тензорезистивные свойства полупроводников характеризуются набором коэффициентов, например, для кремния, обладающего кубической формой кристаллической решетки, в силу ее симметрии можно записать:

$$\begin{cases} \frac{E_x}{\rho_0} = j_x(1 + \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}\sigma_2 + \pi_{13}\sigma_3) + \pi_{44}(j_y\sigma_6 + j_z\sigma_5), \\ \frac{E_y}{\rho_0} = j_y(1 + \pi_{21}\sigma_1 + \pi_{22}\sigma_2 + \pi_{23}\sigma_3) + \pi_{55}(j_x\sigma_6 + j_z\sigma_4), \\ \frac{E_z}{\rho_0} = j_z(1 + \pi_{31}\sigma_1 + \pi_{32}\sigma_2 + \pi_{33}\sigma_3) + \pi_{66}(j_x\sigma_5 + j_y\sigma_4), \end{cases} \quad (3.53)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – нормальные компоненты механического напряжения;  $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  – сдвиговые компоненты механического напряжения;  $\pi_{11}, \pi_{22}, \pi_{33}$  – продольные тензорезистивные коэффициенты;  $\pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{23}, \pi_{21}, \pi_{31}, \pi_{32}$  – поперечные тензорезистивные коэффициенты;  $\pi_{44}, \pi_{55}, \pi_{66}$  – сдвиговые тензорезистивные коэффициенты.

Данные соотношения записаны для системы координат, оси которой совпадают с осями кристаллической решетки. Тензоэлемент может быть вырезан так, что его грани не будут совпадать с кристалло-физическими осями. В этом случае свойства элемента в направлении характерных размеров необходимо определять с учетом углов поворота между осями кристаллической решетки и осями самого элемента.

Для кристаллов с кубической симметрией (такой, как у кремния) введены индексы Миллера, определяющие положение элемента относительно кристалло-физических осей. При этом направление оси  $x$  обозначается  $[100]$ ,  $y$  –  $[010]$ ,  $z$  –  $[001]$  и т.д. Наиболее часто в качестве материалов для полупроводниковых тензорезисторов используют кремний  $n$ -проводимости плоскости  $[100]$  ( $n$ -Si  $[100]$ ) и  $p$ -проводимости плоскости  $[111]$  ( $p$ -Si  $[111]$ ). Для них тензочувствительность максимальна.

Если тензоэлемент вырезан вдоль одной из кристаллографических осей, например вдоль оси  $x$ , и протекание тока возможно только в направлении этой оси, то система уравнений (3.53) сводится к одному уравнению:

$$\frac{E_x}{\rho_0} = j_x(1 + \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}\sigma_2 + \pi_{13}\sigma_3).$$

При линейно напряженном состоянии чувствительность полупроводникового элемента так же, как и металлического, оценивается коэффициентом тензочувствительности (3.52). Однако его значение практически полностью определяется изменением физических свойств материала тензорезистора, поэтому на практике можно принять

$$K_T = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_l} \approx \pi_{11}E.$$

Коэффициент тензочувствительности зависит от ориентации определяющих размеров тензорезистора относительно кристаллографических осей, а также от типа ( $p$  или  $n$ ) полупроводника и концентрации примеси. Обычно с возрастанием количества примесей коэффициент тензочувствительности уменьшается, но улучшается линейность и уменьшается чувствительность к вариациям температуры, что позволяет расширить температурную область применения.

Удельное сопротивление полупроводникового тензорезистора по мере повышения концентрации примесей уменьшается [2]:

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_n n + \mu_p p)},$$

где  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – абсолютное значение заряда электрона или дырки;  $n$  и  $p$  – концентрации электронов и дырок соответственно;  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  – подвижность электронов и дырок.

Для полупроводников  $n$ -типа с концентрацией донорных атомов  $N_d$  обычно  $n \approx N_d$  и  $p \ll n$ , при этом

$$\rho = \frac{1}{q\mu_n N_d}.$$

Для полупроводников  $p$ -типа с концентрацией акцепторных атомов  $N_a$  при тех же условиях ( $p \approx N_a$  и  $n \ll p$ ) удельное сопротивление

$$\rho = \frac{1}{q\mu_p N_d}.$$

Абсолютная величина коэффициента тензочувствительности датчика  $K_T$  равномерно убывает при возрастании концентрации примесей.

В общем случае, изменение сопротивления в зависимости от деформации является нелинейным:

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta R}{R} = K_{T1}\varepsilon_l + K_{T2}\varepsilon_l^2 + K_{T3}\varepsilon_l^3,$$

причем все коэффициенты ( $K_{T1}$ ,  $K_{T2}$ ,  $K_{T3}$ ) этого выражения зависят от концентрации примесей.

Для коэффициента тензочувствительности можно написать

$$K_T = K_{T1} + K_{T2}\varepsilon_l + K_{T3}\varepsilon_l^2.$$

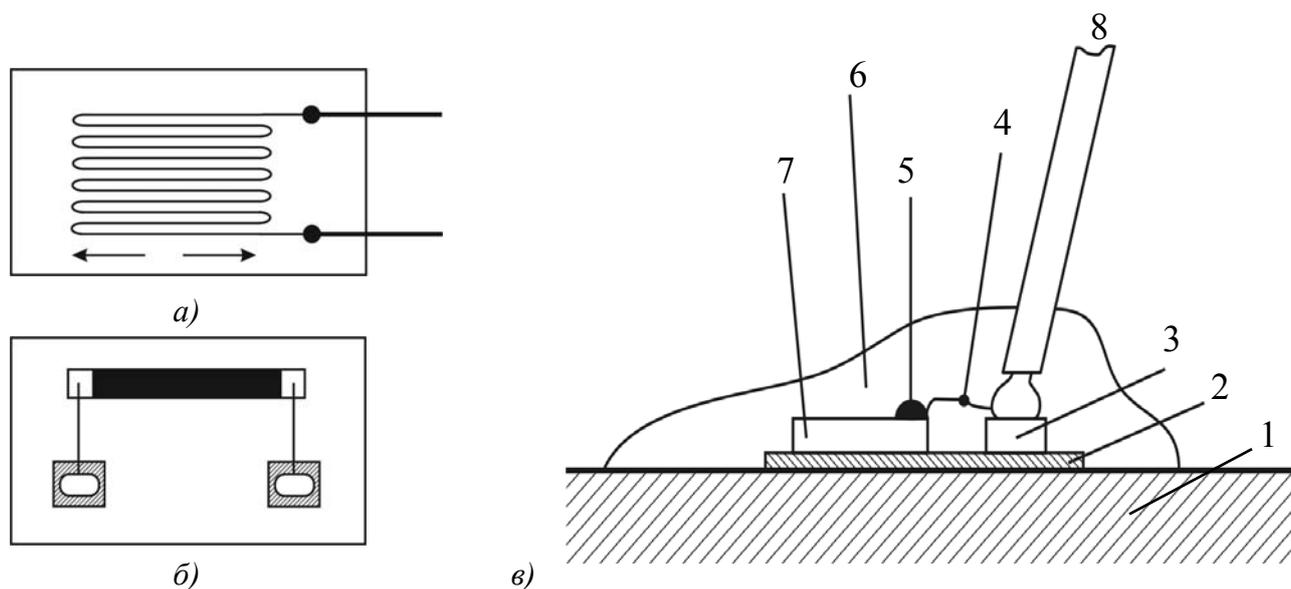
Таким образом, величина коэффициента тензочувствительности полупроводникового тензорезистора зависит от деформации, но всегда возможно выбрать максимальное значение  $\epsilon_l$ , ниже которого коэффициент  $K_T$  можно считать постоянным (с заданной степенью точности).

При возрастании концентрации примесей чувствительность к деформации значительно увеличивается, поэтому у датчиков с большой концентрацией примесей линейность изменения сопротивления практически такая же, как у металлических датчиков.

Коэффициент тензочувствительности преобразователя убывает с повышением температуры, однако это убывание тем меньше, чем более значительна концентрация примесей.

Из рассмотренного следует, что:

- а) тензорезисторы с незначительным количеством примесей имеют высокий коэффициент тензочувствительности, но чувствительны к температуре и имеют значительную погрешность линейности;
- б) тензорезисторы со значительным количеством примесей имеют сравнительно невысокий коэффициент тензочувствительности, но при этом практически не зависят от температуры и имеют линейную характеристику.



**Рис. 3.48. Тензорезисторы дискретного исполнения:**

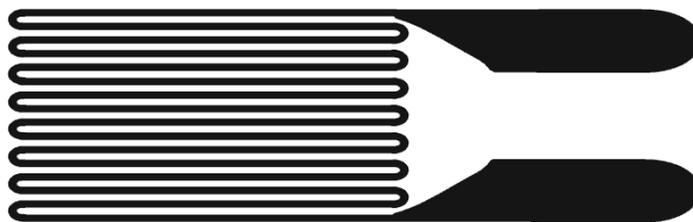
*а* – металлический проволочный тензорезистор; *б* – полупроводниковый тензорезистор; *в* – расположение тензорезистора на поверхности образца: *1* – изучаемая поверхность; *2* – клей; *3* – контакт; *4* – провод; *5* – спайка; *6* – защитный слой; *7* – датчик; *8* – кабель

Конструктивно тензорезисторы бывают дискретного и интегрального исполнения. Металлические тензорезисторы выполняются только в дискретной

форме (законченные конструкции, наклеиваемые на исследуемый объект). Полупроводниковые тензорезисторы могут быть как дискретные, так и интегральные (диффузионные).

При дискретном исполнении тензорезистор обычно состоит из сетки, образованной нитевидными проводниками. Количество этих проводников для металлических тензорезисторов обычно составляет от 10 до 20 (рис. 3.48, *а*), а для полупроводниковых равно единице (рис. 3.48, *б*) [4, 6].

Металлические тензорезисторы бывают проволочными (рис. 3.48, *а*) и фольговыми (рис. 3.49). Проволочный тензорезистор выполняется в виде зигзагообразно уложенной тонкой проволоки, наклеенной на изолирующую подложку (полоску бумаги или лаковую пленку) [6]. К концам проволоки пайкой или сваркой присоединяются выводные проводники. Сверху тензорезистор покрывается защитным слоем лака.



**Рис. 3.49. Фольговый тензорезистор**

Фольговые тензорезисторы (рис. 3.49) изготавливают методом фотохимического травления. Решетка такого датчика выполняется из сплавов, обеспечивающих достаточную чувствительность и надежное сцепление (адгезию) с изоляционной основой, на которой выполняется датчик.

Фольговые пленочные тензорезисторы изготавливаются путем вакуумного напыления тензочувствительного материала на поверхность упругого элемента. Форма тензорезистора задается маской, через которую производится напыление [6].

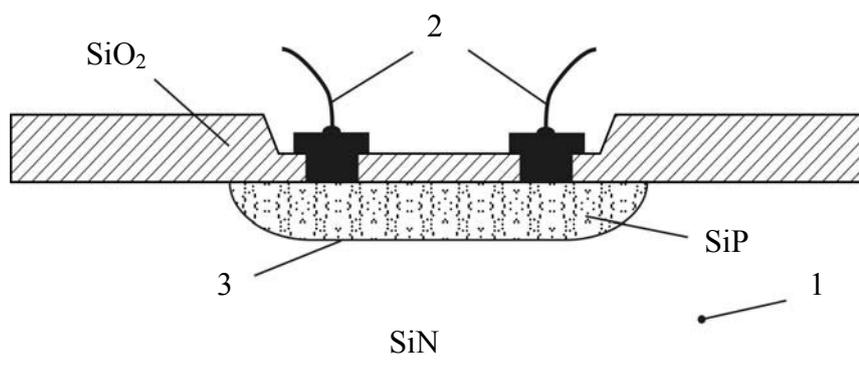
В отличие от проволочных, фольговые тензодатчики имеют решетку не круглого, а прямоугольного сечения с большим отношением ширины к высоте. Благодаря большой площади соприкосновения токопроводящих полосок фольгового датчика с деталью обеспечиваются хорошие условия теплоотдачи. Это позволяет в несколько раз повысить плотность тока фольговых датчиков. Кроме того, благодаря большой площади соприкосновения улучшаются восприимчивость к деформации и точность ее измерения.

Фотохимический способ позволяет выполнить любой рисунок решетки, что также является достоинством фольговых датчиков.

Полупроводниковые тензорезисторы дискретного исполнения по конструкции подобны металлическим. Они изготавливаются из кремниевых кристаллов, нарезанных в виде волокна и наклеенных на пластиковую подложку.

Полупроводниковые тензорезисторы много чувствительнее металлических, но менее линейны и имеют более высокую температурную чувствительность. Кроме того, они хрупки и не могут использоваться для регистрации ударной нагрузки.

Наибольшее распространение получили германиевые и кремниевые тензодатчики, выполняемые по интегральной технологии. Интегральные полупроводниковые тензорезисторы изготавливаются путем диффузии материала датчика в поверхность диафрагмы, которая представляет собой тонкий срез монокристалла. Интегральные тензорезисторы, по сравнению с дискретными, имеют более высокую линейность и меньший гистерезис. На рис. 3.50 показана структурная схема интегрального кремниевого тензорезистора [2].



**Рис. 3.50. Структура интегрального тензорезистора с диффузией в подложку из кремния:** 1 – подложка; 2 – металлические выводы; 3 –  $p-n$ -переход

Интегральный тензорезистор "сцепляется" с материалом упругого элемента за счет внутримолекулярных сил, что обеспечивает превосходный механический и тепловой контакт между упругим элементом и установленным на нем датчиком. Равенство коэффициентов линейного расширения подложки и проводящего элемента датчика позволяет избежать погрешностей, связанных с передачей деформации от упругого элемента к тензорезистору.

Кроме того, такой способ производства позволяет путем одновременной диффузии нескольких одинаковых проводящих слоев на одной и той же подложке получить не один тензорезистор, а структуру в виде полумоста или моста и термокомпенсирующие элементы. Благодаря применяемой технологии тензорезисторы, входящие в мостовую схему, обладают абсолютной идентичностью,

кроме того, обеспечивается большая идентичность внешних условий и, таким образом, существенно снижается погрешность нуля.

Тензорезисторы применяются для исследования физических свойств материалов, деформаций и напряжений в деталях и конструкциях, а также для измерения механических величин, преобразуемых в деформацию упругого элемента (в датчиках силы, давления, ускорения и т.д.). При этом тензорезисторы могут использоваться для измерения как статических, так и динамических деформаций.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гольдштейн, А.Е.** Физические основы получения информации: учебник / А.Е. Гольдштейн. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 292 с.
2. **Аш, Ж.** Датчики измерительных систем / Ж. Аш [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1992.
3. Материалы в приборостроении и автоматике: справочник / под ред. Ю.М. Пятина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 528 с.
4. **Фрайден, Дж.** Современные датчики: справочник / Дж. Фрайден. – М.: Техносфера, 2005.
5. **Левшина, Е. С.** Электрические измерения физических величин: Измерительные преобразователи / Е. С. Левшина, П. В. Новицкий. – Л.: Энергоатомиздат, 1983.
6. **Раннев Г.Г.** Методы и средства измерений: учебник / Г.Г. Раннев, А.П. Тарасенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Издательский центр "Академия", 2004.
7. **Шалимова, К.В.** Физика полупроводников: учебник / К.В. Шалимова. – Спб.: Изд-во «Лань», 2010. – 400 с.
8. **Асс, Б.А.** Детали и узлы авиационных приборов и их расчет / Б.А. Асс, Н.А. Жукова, А.В. Антипов. - М.: Машиностроение, 1966. – 344 с.
9. **Шишмарев, В.Ю.** Физические основы получения информации: учебник / В.Ю. Шишмарев. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 384 с.
10. **Афанасьев, А.А.** Физические основы измерений: учебник / А.А. Афанасьев, А.А. Погонин, А.Г. Схиртладзе. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 448 с.

**Гуськов Андрей Александрович**

**ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И ЭФФЕКТЫ  
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

Редактор Н.Н. Максимова

Технический редактор Т.П. Новикова

Компьютерная верстка А.А. Гуськов

Подписано в печать 23.04.2018. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,5.

Тираж 100 экз. Заказ .

---

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.

Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:

603950, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24.